Bull. Soc. math. France
133 (4), 2005, p. 581–600

THÉORÈMES D'ANNULATION POUR DES FIBRÉS MUNIS D'UNE FORME NON DÉGÉNÉRÉE

PAR PIERRE-EMMANUEL CHAPUT

RÉSUMÉ. — Je démontre des théorèmes d'annulation de la cohomologie de Dolbeault de fibrés vectoriels amples sur une variété projective lisse, munis d'une forme symplectique ou d'une forme quadratique non-dégénérée à valeurs dans un fibré en droites. L'hypothèse d'existence d'une telle forme permet d'améliorer les résultats similaires précédents. Je fais aussi des remarques sur la cohomologie des fibrés en droites sur les grassmanniennes isotropes.

ABSTRACT (*Vanishing theorems for vector bundles admitting a non-degenerate form*)
I prove vanishing theorems for the Dolbeault cohomology of ample vector bundles over a smooth projective variety, admitting a non-degenerate quadratic or symplectic form with values in a line bundle. The existence of such a form makes it possible to improve similar existing results. I also give results concerning the Dolbeault cohomology of line bundles on isotropic Grassmannians.

Introduction

De nombreux auteurs se sont attachés à démontrer des théorèmes d'annulation pour la cohomologie de Dolbeault des fibrés vectoriels amples sur une variété projective complexe lisse. Par exemple, Le Potier [10, cor. 3, p. 258] établit le résultat suivant :

Texte reçu le 3 novembre 2003, révisé le 26 novembre 2004.
PIERRE-EMMANUEL CHAPUT, Laboratoire de Mathématiques Jena Leray, Unité Mixte de Recherche CNRS 6629, UFR Sciences et Techniques, 2 rue de la Houssinière - BP 92208 - F-44322 Nantes Cedex 3 • *E-mail :* `Pierre-Emmanuel.Chaput@math.univ-nantes.fr`
Classification mathématique par sujets (2000). — 14F17.
Mots clefs. — Théorèmes d'annulation, grassmanniennes isotropes.

THÉORÈME. — *Soit E un fibré vectoriel ample de rang e sur une variété X projective lisse complexe de dimension n. Alors on a $H^{p,q}(X, \wedge^k E) = 0$ si $p+q > n + k(e-k)$.*

Par la suite, des efforts ont été réalisés notamment pour améliorer cette borne (voir par exemple [13], [8]), généraliser ce résultat à d'autres puissances de Schur [4], et traiter le cas où E a des propriétés de positivité plus faibles [14]. En ce qui me concerne, je propose de diminuer la borne donnée par ce théorème dans le cas où E admet de plus une forme non dégénérée, symplectique ou quadratique. Je démontre le résultat suivant (si V est un espace vectoriel muni d'une forme symplectique, $\wedge^{\langle t\rangle} V$ est la composante irréductible de la $\mathrm{Sp}(V)$-représentation $\wedge^t V$ décrite au paragraphe 1.1) :

THÉORÈME 1. — *Soit E un fibré vectoriel ample de rang $2e$ sur X, variété projective lisse de dimension n, muni d'une forme symplectique à valeurs dans un fibré en droites. Alors*

$$H^{p,q}\big[X, \wedge^{\langle t\rangle} E \otimes (\det E)^k\big] = 0 \quad si \quad \begin{cases} p+q > n + \frac{1}{2}t(2e+3-t), \\ 4k \geq t+3, \\ n-p \leq e-t-1. \end{cases}$$

La borne du théorème de Le Potier est donc, dans ce cas particulier, approximativement divisée par 2. Je démontre aussi un résultat dans le cas $n-p > e-t+1$ et un analogue pour des fibrés munis d'une forme quadratique :

THÉORÈME 2. — *Soit E un fibré vectoriel ample de rang e sur X, variété projective lisse de dimension n, muni d'une forme quadratique. Soient p, q, t, k des entiers avec $0 \leq 2t \leq e$. Alors*

$$H^{p,q}\big[X, \wedge^t E \otimes (\det E)^{2k}\big] = 0 \quad si \quad \begin{cases} p+q > n + \frac{1}{2}t(e+2-t), \\ 8k \geq t+1, \\ n-p \leq \frac{1}{2}e-t-1. \end{cases}$$

Rappelons l'argument original de J. Le Potier pour son théorème cité en début d'introduction. Considérons, dans la situation de ce théorème, la grassmannienne relative $G(k, E^*)$ des sous-espaces vectoriels de E^* de dimension k. Cette variété est fibrée sur X, d'une part, et admet d'autre part un fibré en droites naturel que je noterai $\mathcal{O}(1)$, qui peut se définir comme le dual du fibré déterminant du fibré tautologique. L'hypothèse d'amplitude de E sur X implique l'amplitude de $\mathcal{O}(1)$ sur $G(k, E^*)$ et, par le théorème de Kodaira-Nakano, l'annulation des groupes de cohomologie $H^{P,Q}(G(k, E^*), \mathcal{O}(1))$ pour $P+Q > \dim G(k, E^*)$. Or, on peut aussi calculer ces groupes au moyen de la suite spectrale dite de Borel Le-Potier, dont les termes d'ordre 1 sont ${}^P E_1^{i,q} = H^{P,q}(X, \wedge^k E)$ si $i = P$ et sont nuls sinon. Cette suite spectrale est donc dégénérée et on en déduit le résultat.

Dans le cas qui m'intéresse, de façon à réduire la borne obtenue, je considère une fibration en grassmanniennes *isotropes*. Pour déterminer les termes de cette suite spectrale, il s'agit de déterminer la cohomologie de Dolbeault des fibrés en droite homogènes sur une telle grassmannienne.

Une première partie étudie donc la cohomologie de ces grassmanniennes, sujet présentant un intérêt indépendant des théorèmes d'annulation. Le cas des grassmanniennes dites *lagrangiennes*, d'espaces linéaires de dimension maximale, traité par Snow [15], est fondamentalement plus simple, car on a affaire à des espaces hermitiens symétriques. Dans le cas général, le fibré tangent n'est pas complètement réductible comme fibré homogène, et donc le calcul de la cohomologie fait intervenir des suites spectrales, dont on peut théoriquement déterminer les termes, mais dont je ne vois pas comment déterminer les morphismes. Je n'ai en fait pu établir dans le cas général que le résultat partiel suivant : les composantes de la cohomologie de $\mathcal{O}(1)$ sur une grassmannienne isotrope sont des représentations fondamentales. Par contre, on peut mener à bien le calcul de la cohomologie de $\mathcal{O}(1)$ et $\mathcal{O}(2)$ sur les grassmanniennes lagrangiennes, et en déduire nos théorèmes d'annulation.

Je remercie Laurent Manivel de m'avoir proposé ce sujet, et de son soutien régulier.

1. Cohomologie des grassmanniennes isotropes

1.1. Notations concernant les représentations. — Les notations concernant les systèmes de racines de $\mathrm{SL}(n), \mathrm{Sp}(2n)$ et $\mathrm{SO}(n)$ sont celles de [2, p. 185 et suivantes].

Lorsque λ est une partition, je note S_λ le foncteur de Schur qui lui est associé, $|\lambda|$ son poids et $\ell(\lambda)$ sa longueur (le nombre de parts non nulles) [5]. Je note aussi λ^* la partition duale de λ. Le rang d'une partition λ sera noté $r(\lambda)$; c'est le plus grand entier r tel que $\lambda_r \geq r$. On peut coder une partition λ par deux partitions λ^d et λ^b de longueur $r(\lambda)$ telles que λ^d_i (resp. λ^b_i) soit égal à $\lambda_i - i$ (resp. $\lambda^*_i - i$). Remarquons que $\lambda \mapsto (\lambda^d, \lambda^b)$ est une bijection de l'ensemble des partitions dans l'ensemble des couples de partitions strictement décroissantes. Notons $(\mu \,|\, \nu)$ la partition λ telle que $\lambda^d = \mu$ et $\lambda^b = \nu$. Par exemple, $(6, 4, 2) = ((6, 3) \,|\, (3, 2))$. Notons aussi $\lambda + 1$ la partition de même longueur que λ dont la i-ième part vaut $\lambda_i + 1$. Soit alors λ^+ la partition $(\lambda \,|\, \lambda + 1)$ et $\lambda^- = (\lambda + 1 \,|\, \lambda)$ [11].

Si V est un espace vectoriel muni d'une forme quadratique non dégénérée (respectivement symplectique), alors $\mathrm{SL}(V)$ contient le sous-groupe $\mathrm{SO}(V)$ (respectivement $\mathrm{Sp}(V)$). Les représentations irréductibles de $\mathrm{SL}(V)$ sont des représentations de ce sous-groupe, par contre elles ne restent pas toujours irréductibles. Pour l'un des groupes $\mathrm{SL}(V), \mathrm{SO}(V)$ et $\mathrm{Sp}(V)$, nous avons choisi comme tore maximal le sous-groupe des matrices diagonales ; un poids (c'est-à-dire un caractère de ce tore) de $\mathrm{SL}(V)$ se restreint donc en un poids de $\mathrm{SO}(V)$ ou un poids de $\mathrm{Sp}(V)$. Je note alors $S_{\langle\lambda\rangle}V$ la représentation de ce sous-groupe qui a comme plus haut poids la restriction du plus haut poids de la représentation $S_\lambda V$. De même, je note $S^{\langle k\rangle}V$ et $\wedge^{\langle k\rangle}V$ les représentations $S_{\langle(k)\rangle}V$ et $S_{\langle(1,\ldots,1)\rangle}V$.

1.2. Étude du fibré tangent des grassmanniennes isotropes

Lorsque V est un espace vectoriel de dimension finie et r un entier, je note $G(r,V)$ la grassmannienne paramétrant les sous-espaces linéaires de dimension r de V. Sur cette grassmannienne, le fibré tautologique, de rang r, et le fibré quotient, de rang $\dim V - r$, seront respectivement notés T et Q.

Si V, de dimension paire $2e$, est muni d'une forme symplectique ω, alors la grassmannienne isotrope $G_\omega(r,V)$ est, par définition, la sous-variété de $G(r,V)$ constituée des r-plans isotropes pour ω. C'est aussi, dans le plongement de Plücker $\mathbb{P}\wedge^r V$, l'intersection de $G(r,V)$ avec la représentation irréductible $\mathbb{P}\wedge^{\langle r\rangle}V$. Par restriction de T et Q, on obtient des fibrés sur les sous-grassmanniennes isotropes encore notés T et Q. Remarquons que la restriction de Q n'est plus irréductible, puisqu'elle contient le sous-fibré $T^\perp/T$ que nous noterons U.

Soit $v_1,\ldots,v_{2e}$ une base de V dans laquelle la forme ω est donnée par la matrice $\Omega := \left(\begin{smallmatrix} 0 & J \\ -J & 0\end{smallmatrix}\right)$, où J est la matrice ayant des 1 sur la deuxième diagonale ($J_{i,e+1-i} = 1$) et des 0 ailleurs. Soit aussi

$$\mathcal{P} = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix} \cap \mathrm{Sp}(V) \right\}$$

le stabilisateur dans $\mathrm{Sp}(V)$ de l'espace isotrope L engendré par les vecteurs $v_{2e-r+1},\ldots,v_{2e}$. Rappelons qu'en général il existe une équivalence entre les fibrés homogènes sur un espace homogène projectif G/P et les représentations du groupe parabolique P [1]. Nous allons utiliser le théorème de Bott pour calculer les groupes de cohomologie $H^{p,q}[G_\omega(r,V),\mathcal{O}(\ell)]$, et nous avons donc besoin de comprendre la représentation correspondant au fibré tangent $TG_\omega(r,V)$. On pourrait déterminer cette représentation en utilisant le fait qu'elle est donnée par l'action adjointe de $\mathcal{P}$ sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ (si $\mathfrak{p}$ désigne l'algèbre de Lie de $\mathcal{P}$).

Je propose plutôt de remarquer que ce fibré est un sous-fibré de la restriction du fibré tangent à $G(r,V)$. Celui-ci est $T^*\otimes Q$; comme l'inclusion des fibrés est $\mathrm{Sp}(V)$-équivariante, le fibré tangent de $G_\omega(r,V)$ correspond à une sous-représentation de la représentation $L^*\otimes(V/L)$. En « décomposant » le fibré $T^*\otimes Q$, on constate que cette sous-représentation est l'ensemble des applications $L\to V/L$ telles que la composée $L\to V/L \xrightarrow{\omega} L^*$ soit une application symétrique. Autrement dit, on a une suite exacte de fibrés

$$0\to T^*\otimes U \longrightarrow TG_\omega(r,V)\longrightarrow S^2T^*\to 0. \tag{1}$$

Soit de façon similaire V un espace vectoriel muni d'une forme quadratique non dégénérée q ; on définit la grassmannienne isotrope $G_q(r,V)$ comme la sous-variété de $G(r,V)$ constituée des r-plans isotropes pour q.

En termes de groupes algébriques, cette variété est un quotient de $\mathrm{SO}(V)$, mais nous la verrons plutôt comme quotient de son revêtement universel, $\mathrm{Spin}(V)$. En effet, ce groupe simplement connexe présente l'avantage que toute représentation de son algèbre de Lie est la différentielle d'une représentation. Par exemple, si $n=2m$, ou si $n=2m+1$, nous réaliserons $G_q(m,V)$ dans la représentation spinorielle de plus haut poids $\frac{1}{2}(1,\ldots,1)$, dans la base (ϵ_i) : il n'existe une telle représentation que pour $\mathrm{Spin}(V)$. La sous-variété de la grassmannienne $G(m,V)\subset\mathbb{P}\wedge^m V$ constituée des espaces isotropes est donc l'image par l'application de Veronese de degré deux de la grassmannienne $G_q(m,V)$ ainsi réalisée.

Comme dans le cas symplectique, il existe une suite exacte de fibrés vectoriels

$$0\to T^*\otimes U\longrightarrow TG_q(r,V)\longrightarrow\wedge^2T^*\to 0. \tag{2}$$

1.3. Cohomologie de $\mathcal{O}(1)$ sur une grassmannienne isotrope. — Notons $\mathcal{O}(1)$ le générateur ample du groupe de Picard de $G_\omega(r,V)$. L'objet de ce paragraphe est l'étude des groupes de cohomologie de Dolbeault de ce fibré.

La suite exacte (1) montre que le fibré des p-formes peut être filtré par les $\wedge^iS^2T\wedge\Omega^{p-i}G_\omega(r,V)$, $0\le i\le p$ et que les quotients associés sont les $\wedge^iS^2T\otimes\wedge^{p-i}(T\otimes U^*)$.

La remarque 2.15, p. 25, l'exemple 6, p. 138, et les formules (4.3′), p. 65, et (9.2), p. 143, dans [11] montrent que

$$\wedge^j(V\otimes W)=\bigoplus_{|\lambda|=j}S_\lambda V\otimes S_{\lambda^*}W,\quad \wedge^iS^2V=\bigoplus_{|\lambda|=i}S_{\lambda^+}V\quad\text{et}$$
$$S_\lambda V\otimes S_\mu V=\bigoplus_\nu c^\nu_{\lambda,\mu}S_\nu V,$$

où les coefficients de Littlewood-Richardson $c^\nu_{\lambda,\mu}$ sont définis dans [11, p. 143]. Il vient donc que $\Omega^pG(r,V)$ admet une filtration dont les quotients valent

$$\bigoplus_{\substack{|u|=i\\|v|=p-i,w}}c^w_{u^+,v}S_wT\otimes S_{v^*}U.$$

Remarquons que la représentation de $\mathcal{P}$ correspondant à T factorise par la projection $\mathcal{P}\to\mathrm{GL}(r)$. Ainsi, chaque fibré S_wT correspond à une représentation irréductible de $\mathrm{GL}(r)$, donc de $\mathcal{P}$; c'est donc un fibré homogène irréductible. Par contre, puisque si L est un espace linéaire isotrope, la forme ω induit une forme symplectique sur $L^\perp/L=U_L$, $\mathcal{P}$ ne se projette que sur $\mathrm{Sp}(U)$ (et non $\mathrm{GL}(U)$). Ainsi, la $\mathcal{P}$-représentation correspondant au fibré $S_{v^*}U$ n'est en général pas irréductible. Écrivons donc $S_{v^*}U$ comme somme de fibrés irréductibles