Bull. Soc. math. France
133 (4), 2005, p. 619–639

SOMMES DE CARRÉS DE FONCTIONS DÉRIVABLES

PAR JEAN-MICHEL BONY

RÉSUMÉ. — On montre que toute fonction positive de classe C^{2m} définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ est somme de deux carrés de fonctions de classe C^m. En dimension 2, toute fonction positive f de classe C^4 est somme d'un nombre fini de carrés de fonctions de classe C^2, pourvu que ses dérivées d'ordre 4 s'annulent aux points où f et $\nabla^2 f$ s'annulent.

ABSTRACT (*Sum of squares of derivable functions*). — We prove that any nonnegative function of class C^{2m} defined in an interval is the sum of two squares of functions of class C^m. In dimension 2, any nonnegative function f of class C^4 is a finite sum of squares of functions of class C^2, provided that $\nabla^4 f$ vanishes at points x satisfying $f(x) = \nabla^2 f(x) = 0$.

1. Introduction

Le résultat principal de cet article est le théorème suivant.

THÉORÈME 1. — *Soit f une fonction positive et de classe C^{2m} définie sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$. Il existe alors g et h appartenant à $C^m(I)$ telles que $f = g^2 + h^2$.*

Texte reçu le 19 février 2004, accepté le 1er octobre 2004.

JEAN-MICHEL BONY, École polytechnique, Centre de Mathématiques, 91128 Palaiseau Cedex (France) • *E-mail :* `bony@math.polytechnique.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 26A24, 26B05.

Mots clefs. — Fonctions positives, fonctions différentiables, sommes de carrés.

La régularité de g et h ne peut pas en général être améliorée : si f est la primitive d'ordre $2m$, plate à l'origine, de $(-\log|x|)^{-1}$, elle ne peut pas être somme de carrés de fonctions de classe C^{m+1}, ni même $C^{m+\alpha}$, ce qui exigerait $f(x) = O(|x|^{2m+2\alpha})$.

Dans le cas où f est positive et de classe C^∞, notre résultat permet pour chaque m d'écrire $f = g_m^2 + h_m^2$ avec g_m et $h_m \in C^m$, mais ces fonctions dépendent de m et il ne s'ensuit pas que f puisse s'écrire comme somme de carrés de fonctions C^∞. Les ouvrages [1] et [4] font état de contre-exemples de P. Cohen et D. Epstein. À notre connaissance, ces contre-exemples n'ont pas été publiés.

En notant $C^{k,1}$ (resp. $C^{k+\alpha}$, $0 < \alpha < 1$) l'espace des fonctions de classe C^k dont les dérivées d'ordre k sont lipschitziennes (resp. höldériennes d'exposant α), on peut démontrer la variante suivante du théorème 1 (voir le n$^{\text{o}}$ 5.1) : sous l'hypothèse $f \in C^{2m+2\alpha}$ [resp. $C^{2m,1}$, $C^{2m+1,1}$], il existe g et h appartenant à $C^{m+\alpha}$ [resp. $C^{m+1/2}$, $C^{m,1}$] avec $f = g^2 + h^2$.

Il est bien connu [6] qu'une fonction f positive n'est pas en général le carré d'une fonction de classe C^2, même si f est de classe C^∞, ne s'annule qu'en un point, et est infiniment plate en ce point.

Le cas $m = 2$ du théorème 1 est très directement relié à l'inégalité de Fefferman-Phong et amène à examiner le même problème en dimension quelconque. Cette inégalité assure qu'un opérateur pseudo-différentiel A est semi-borné inférieurement (i.e. $\operatorname{Re}\int \overline{u(x)} Au(x)\,\mathrm{d}x \geq -C^{\text{te}}\,\|u\|_{L^2}^2$) lorsque son symbole $a(x,\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ est positif et vérifie l'une des deux estimations suivantes

$$\left|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x,\xi)\right| \leq C_{\alpha,\beta}\bigl(1+|\xi|\bigr)^{2-|\alpha|} \qquad \text{pour } \alpha,\beta \in \mathbb{N}^n,$$

ou

$$\left|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x,\xi)\right| \leq C_{\alpha,\beta} \quad \text{pour } \alpha,\beta \in \mathbb{N}^n,\ |\alpha|+|\beta| \geq 4.$$

Ces résultats, démontrés respectivement dans [5] et [2], s'étendent (voir [8, Section 18.6], [2]) aux autres classes de symboles pseudo-différentiels.

L'idée essentielle de C. Fefferman et D.H. Phong est d'écrire localement le symbole sous la forme $a = b^2 + a_1$, en faisant apparaître la somme d'un carré et d'une fonction positive dépendant d'une variable de moins, les dérivées d'ordre 2 de b et celles d'ordre 4 de a_1 s'estimant à l'aide des dérivées d'ordre 4 de a. Cette même idée a conduit au résultat suivant (voir [7], [10]) : si f est une fonction positive de classe $C^{3,1}$ dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on peut l'écrire comme somme d'un nombre fini (bornable en fonction de n) de carrés de fonctions de classe $C^{1,1}$.

Il n'est pas vrai en toute dimension qu'une fonction positive de classe C^4, ou même C^∞, soit somme de carrés de fonctions de classe C^2. Des contre-exemples (voir [3]) existent à partir de la dimension 4 et proviennent d'obstructions algébriques à la décomposition en somme de carrés des polynômes positifs. En dimension 2, nous avons le résultat suivant.

THÉORÈME 2. — *Soit f une fonction positive et de classe C^4 définie dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ et vérifiant*

$$\big\{f(x) = \nabla^2 f(x) = 0\big\} \implies \nabla^4 f(x) = 0. \tag{1}$$

Il existe alors un nombre fini ($N = 78$ convient) de fonctions $g_j \in C^2(\Omega)$ telles que $f = \sum_1^N g_j^2$.

La section 2 ramène la démonstration du théorème 1 au cas où, dans un intervalle, la fonction f et ses dérivées jusqu'à l'ordre $2m$ ne s'annulent pas simultanément. C'est dans la section 4 qu'apparaissent les idées essentielles de la démonstration. Il faut distinguer, au voisinage de chaque point x_0, les cas où une des dérivées paires $f^{2p}(x_0)$ est strictement positive et domine les autres, et celui où $f(x_0)$ n'est « pas trop petit ». Dans ce dernier cas, f pourra s'écrire directement comme un carré. Dans les autres, on construira un polynôme P de degré $p-1$ tel que la fonction $f-P^2$ soit positive et possède p zéros doubles ξ_j au voisinage de x_0. On pourra alors écrire $f-P^2 = \prod(x-\xi_j)^2\theta(x)$ et c'est cette fois-ci la décomposition $f = P^2 + h^2$, avec $h = \prod(x-\xi_j)\sqrt{\theta}$ qui conviendra localement.

On pourra remarquer que, pour p grand, les fonctions P et h changent de signe plusieurs fois au voisinage de x_0. Dans le cas $p = 1$, le polynôme se réduit à une constante dont le carré est la valeur de f en son minimum local, et notre décomposition est exactement celle de Fefferman et Phong.

À elle seule, la décomposition locale ci-dessus permettrait d'obtenir facilement une expression de f en somme de quatre carrés. Pour descendre à deux carrés, il nous faut dans la section 5 montrer l'existence d'une suite d'intervalles nettement séparés dans lesquels on doit écrire f comme somme de deux carrés, et telle qu'entre deux intervalles consécutifs, f soit un carré.

La section 6 reprend la première étape de la récurrence classique de [5] (mais avec une perte d'information qui ne permet pas de poursuivre en dimension supérieure) pour déduire le théorème 2 du théorème 1.

2. Premières réductions

Toutes les fonctions considérées seront à valeurs réelles. On notera $D = \mathrm{d}/\mathrm{d}x$ et, pour $a \in \mathbb{R}$, $[a]^+ = \max(a, 0)$ et $[a]^- = \max(-a, 0)$.

Tous les intervalles ouverts non vides de $\mathbb{R}$ étant difféomorphes, on peut supposer que f est définie sur $]0, 1[$. Nous allons d'abord nous ramener au cas d'une fonction appartenant à $C^{2m}(\mathbb{R})$ et à support dans $[0, 1]$ à l'aide du lemme élémentaire suivant.

LEMME 2.1. — *Soit p une fonction continue > 0 définie sur un ouvert borné U de $\mathbb{R}^d$. Il existe alors une fonction $\widetilde{p} \in C^\infty(U)$, strictement positive et telle que, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, la fonction $(D^\alpha \widetilde{p})/p$ tende vers 0 à la frontière de U.*

En notant $\delta(x)$ la distance de x au complémentaire de U, il suffit de poser, pour $x \in U$,

$$p_1(x) = \inf_{|x-y|\leq\frac{1}{2}\delta(x)} p(y)\,, \quad \widetilde{p}(x) = \int p_1(z)\,\chi\Big(\frac{x-z}{\delta(z)}\Big)\,\mathrm{e}^{-1/\delta(z)}\,\mathrm{d}z,$$

où χ est de classe C^∞, positive et à support dans la boule de centre 0 et de rayon $\frac{1}{3}$. Le domaine d'intégration étant contenu dans la boule de centre x et de rayon $\frac{1}{2}\delta(x)$, l'expression des dérivées de $\widetilde{p}$ ne fait apparaître que des valeurs de $p_1(z)$ en des points où $p_1(z) \leq p(x)$ et l'estimation résulte facilement du fait que $\delta(z)^{-k}\mathrm{e}^{-1/\delta(z)}$ tend vers 0 à la frontière.

En revenant à la fonction $f \in C^{2m}(]0,1[)$ et en définissant p par

$$\frac{1}{p(x)} = 1 + \sum_{0\leq k\leq 2m} \big|D^k f(x)\big|\,,$$

on voit que la fonction $\widetilde{f} = \widetilde{p}^2 f$ se prolonge par 0 en une fonction de $C^{2m}(\mathbb{R})$. Une décomposition $\widetilde{f} = \widetilde{g}^2 + \widetilde{h}^2$ permettra d'écrire $f = (\widetilde{g}/\widetilde{p})^2 + (\widetilde{h}/\widetilde{p})^2$.

Réduction au cas d'un intervalle où f n'est jamais plate. — On suppose donc f à support compact dans $[0,1]$; on pose

$$F = \big\{x \,\big|\, f(x)=f'(x) = \cdots = D^{2m}f(x) = 0\big\}\,, \quad U = \complement F = \bigcup_\nu\,]a_\nu, b_\nu[,$$

en écrivant U comme réunion dénombrable d'intervalles disjoints dont les extrémités appartiennent à F.

Soit ω un module de continuité uniforme de $D^{2m}f$. Il est bien connu que l'on peut supposer la fonction ω croissante, concave et de classe C^∞ sur $]0,\infty[$, avec

$$\big|D^k\omega(t)\big| \leq C_k t^{-k}\omega(t).$$

On peut également régulariser la fonction $d(x)$ égale à la distance de x à F : il existe une fonction $\overline{d}$ de classe C^∞ dans U vérifiant

$$\big(d(x)/\overline{d}(x)\big)^{\pm 1} \leq 2 \quad \text{et} \quad \big|D^k\overline{d}(x)\big| \leq C'_k\overline{d}(x)^{1-k}.$$

En posant $\Omega(x) = \omega(\overline{d}(x))$ pour $x \in U$, on en déduit que l'on a, avec des constantes convenables,

$$(2) \quad \big|D^k\big(\Omega(x)^{-1}\big)\big| \leq C''_k\,\Omega(x)^{-1}d(x)^{-k}, \quad \big|D^k\big(\Omega(x)^{\frac{1}{2}}\big)\big| \leq C''_k\,\Omega(x)^{\frac{1}{2}}d(x)^{-k}.$$

Posons $\overline{f}(x) = f(x)\Omega(x)^{-1}$ pour $x \in U$. Cette fonction de classe C^{2m} vérifie

$$(3) \qquad \big|D^k\overline{f}(x)\big| \leq Md(x)^{2m-k}\,, \quad x \in U\,,\ 0 \leq k \leq 2m,$$

pour une certaine constante M. Si nous parvenons à écrire $\overline{f}(x) = \overline{g}(x)^2 + \overline{h}(x)^2$ dans U, avec $\overline{g}$ et $\overline{h} \in C^m(U)$ et

$$\left|D^k \overline{g}(x)\right| + \left|D^k \overline{h}(x)\right| \leq M' d(x)^{m-k},$$

le théorème 1 en résulte immédiatement : la fonction g égale à $\overline{g}\,\Omega^{\frac{1}{2}}$ dans U et à 0 dans F est de classe C^m et, en définissant h de façon analogue, on a $f = g^2 + h^2$.

La construction de $\overline{g}$ et $\overline{h}$ peut se faire indépendamment, à condition que les constantes soient uniformes, dans chacun des intervalles constituant U. En divisant $\overline{f}$ par M, nous sommes donc ramenés au théorème suivant dont la démonstration est l'objet de la section 5.

THÉORÈME 2.2. — *Soit f une fonction positive de classe C^{2m}, définie dans un intervalle $]a,b[\subset [0,1]$, vérifiant*

$$\sum_{j=0}^{2m} \left|D^j f(x)\right| > 0 \quad \textit{et} \quad \forall k \in \{0,\dots,2m\}\,,\ \left|D^k f(x)\right| \leq d(x)^{2m-k},$$

en posant $d(x) = \min(x-a, b-x)$. Il existe une constante $C(m)$ ne dépendant que de m, et deux fonctions g et $h \in C^m(]a,b[)$ vérifiant

$$\left|D^k g(x)\right| + \left|D^k h(x)\right| \leq C(m) d(x)^{m-k}, \quad 0 \leq k \leq m,$$

telles que $f = g^2 + h^2$.

REMARQUE 2.3. — En dépit du caractère uniforme des estimations du théorème ci-dessus, notre méthode ne permet pas d'affirmer que, pour f parcourant un ensemble borné de $C^{2m}(I)$, on puisse choisir les fonctions g et h du théorème 1 dans un ensemble borné de $C^m(I)$. Nous avons seulement le résultat suivant

COROLLAIRE 2.4. — *Soit (f_j) une famille bornée dans $C^{2m}(I)$ de fonctions positives, telle que la famille des fonctions $D^{2m} f_j$ soit équicontinue en tout point de I. Il existe alors un ensemble borné $\mathcal{B} \subset C^m(I)$ et, pour tout j, des fonctions g_j et $h_j \in \mathcal{B}$ telles que $f_j = g_j^2 + h_j^2$.*

On reprend les diverses étapes ci-dessus. On se ramène d'abord au cas $I =]0,1[$, les hypothèses étant invariantes par difféomorphisme. Dire que la famille (f_j) est bornée équivaut à l'existence d'une fonction $H > 0$ définie sur $]0,1[$ telle que

$$\forall j, \quad 1 + \sum_{0 \leq k \leq 2m} \left|D^k f_j(x)\right| \leq H(x). \tag{4}$$

On pose alors $p = 1/H$, on lui associe $\widetilde{p}$ comme ci-dessus et on pose $\widetilde{f}_j = \widetilde{p}^2 f_j$. Ces fonctions sont à support dans $[0,1]$ et forment un ensemble borné de $C^{2m}([0,1])$. En outre, les $D^{2m}\widetilde{f}_j$ forment une famille équicontinue en