Bull. Soc. math. France
133 (1), 2005, p. 73–86

EXISTENCE DE FILTRATIONS ADMISSIBLES SUR DES ISOCRISTAUX

par Jean-Marc Fontaine & Michael Rapoport

Résumé. — Soit (D,φ) un isocristal de *vecteur de Newton* $\nu \in (\mathbb{Q}^d)_+$. On associe à une filtration $\mathcal{F}^\bullet$ de D son *vecteur de Hodge* $\mu(\mathcal{F}^\bullet) \in (\mathbb{Z}^d)_+$. Si $\mathcal{F}^\bullet$ est *admissible* (*i.e.* $(D,\varphi,\mathcal{F}^\bullet)$ est faiblement admissible en tant qu'isocristal filtré), alors $\mu(\mathcal{F}^\bullet) \geq \nu$. Réciproquement, on démontre qu'étant donné $\mu \in (\mathbb{Z}^d)_+$ avec $\mu \geq \nu$, il existe une filtration admissible $\mathcal{F}^\bullet$ de D avec $\mu = \mu(\mathcal{F}^\bullet)$. On en déduit, à l'aide d'un théorème de Laffaille, l'existence d'un réseau M dans D de type μ. On donne aussi une variante pour un groupe quasi-déployé quelconque.

Abstract (*Existence of admissible filtrations on isocrystals*). — Let (D,φ) be an F-isocrystal with associated Newton vector ν in $(\mathbb{Q}^d)_+$. To a filtration $\mathcal{F}^\bullet$ of D is associated its Hodge vector $\mu(\mathcal{F}^\bullet) \in (\mathbb{Z}^d)_+$. If $\mathcal{F}^\bullet$ is admissible (*i.e.* $(D,\varphi,\mathcal{F}^\bullet)$ is a weakly admissible filtered isocrystal), then $\mu(\mathcal{F}^\bullet) \geq \nu$. We show that, conversely, for any $\mu \in (\mathbb{Z}^d)_+$ with $\mu \geq \nu$, there exists an admissible filtration $\mathcal{F}^\bullet$ of D with $\mu = \mu(\mathcal{F}^\bullet)$. With the help of a theorem of Laffaille we deduce the existence of a lattice M in D of type μ. We also give a variant for arbitrary quasi-split groups.

Texte reçu le 11 octobre 2002, accepté le 9 mai 2003

Jean-Marc Fontaine, Institut Universitaire de France et UMR 8628 du CNRS, Université de Paris-Sud, Mathématique, Bât. 425, 91405 Orsay Cedex (France)
E-mail : fontaine@math.u-psud.fr • *Url :* www.math.u-psud.fr
Michael Rapoport, Mathematisches Institut der Universität Bonn, Beringstr. 1, 53115 Bonn (Deutschland) • *E-mail :* rapoport@math.uni-bonn.de • *Url :* www.math.uni-bonn.de

Classification mathématique par sujets (2000). — 14F30, 14L05.

Mots clefs. — Isocristaux, vecteur de Newton, filtrations admissibles.

0. Énoncé des résultats

Soit F une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. Soit k un corps parfait de caractéristique p contenant le corps résiduel k_F de F. Notons $W(k)$ (resp. $W(k_F)$) l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k (resp. k_F) et posons $L = F \otimes_{W(k_F)} W(k)$. C'est un corps, extension finie totalement ramifiée du corps des fractions de $W(k)$. Soient q le cardinal de k_F, σ_0 l'automorphisme de $W(k)$ induit par fonctorialité par l'automorphisme $x \mapsto x^q$ sur k et σ l'automorphisme $\mathrm{id} \otimes \sigma_0$ de L. Un *isocristal* (*relativement à* (F,k)) est un espace vectoriel D de dimension finie sur L, muni d'un endomorphisme φ bijectif et σ-linéaire. Soit

$$(\mathbb{Q}^d)_+ = \big\{(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_d) \in \mathbb{Q}^d \, ; \, \nu_1 \geq \nu_2 \geq \dots \geq \nu_d\big\}.$$

On associe à un isocristal (D, φ) de dimension d son vecteur de Newton (= la suite des pentes avec multiplicités égales à la dimension de la composante isotypique correspondante, en ordre *décroissant*), $\nu(D,\varphi) \in (\mathbb{Q}^d)_+$. Soit

$$(\mathbb{Z}^d)_+ = (\mathbb{Q}^d)_+ \cap \mathbb{Z}^d.$$

Soit $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_d) \in (\mathbb{Z}^d)_+$. Soit $\mathcal{F}^\bullet$ une filtration de D par des sous-L-espaces vectoriels, décroissante, exhaustive et séparée, indexée par $\mathbb{Z}$; on dit que $\mathcal{F}^\bullet$ *est de type* μ si

$$\dim \mathrm{gr}_i^{\mathcal{F}^\bullet}(D) = \#\big\{j \, ; \, \mu_j = i\big\}. \tag{0.1}$$

Autrement dit, les sauts de la filtration $\mathcal{F}^\bullet$ sont les μ_j ($j = 1, \dots, d$) et la taille du saut en μ_j est donnée par la multiplicité de μ_j dans μ. Toute filtration $\mathcal{F}^\bullet$ a un type $\mu(\mathcal{F}^\bullet) \in (\mathbb{Z}^d)_+$ bien déterminé.

Une filtration $\mathcal{F}^\bullet$ de l'isocristal (D,φ) de dimension d est dite *admissible* si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(i) en notant $|\nu| = \sum_{i=1}^d \nu_i$, pour $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_d) \in \mathbb{Q}^d$, on a

$$\big|\mu(\mathcal{F}^\bullet)\big| = \big|\nu(D,\varphi)\big| \, ;$$

(ii) soit (D', φ') un sous-isocristal de (D,φ) et soit $\mathcal{F}'^\bullet$ la filtration induite par $\mathcal{F}^\bullet$ sur D' ; on a

$$\big|\mu(\mathcal{F}'^\bullet)\big| \leq \big|\nu(D', \varphi')\big|.$$

Remarques. — 1) Pour tout $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d) \in (\mathbb{Q}^d)_+$, notons $P(\lambda)$ le *polygone associé à* λ, *i.e.* le polygone convexe (autrement dit, à pentes croissantes) du plan réel d'origine $(0,0)$ dont les pentes sont les λ_j, la longueur de la projection du segment de pente λ_j sur l'axe des x étant égale à la multiplicité de λ_j dans λ. Le nombre rationnel $|\nu(D,\varphi)|$, noté $t_N(D)$ dans [3], est toujours un entier ; les points de coordonnées $(0,0)$ et $(d, |\nu(D,\varphi)|)$ sont les extrémités du polygone $P(\nu(D,\varphi))$ (parfois appelé *polygone de Newton* de l'isocristal (D,φ)). De même, $|\mu(\mathcal{F}^\bullet)|$ est noté $t_H(\mathcal{F}^\bullet)$ dans [3] ; les points de coordonnées

$(0,0)$ et $(d,|\mu(\mathcal{F}^\bullet)|)$ sont les extrémités du polygone $P(\mu(\mathcal{F}^\bullet))$ (parfois appelé *polygone de Hodge* de la filtration).

2) Dans le cas où $F=\mathbb{Q}_p$, dire qu'une filtration est admissible signifie qu'elle est *faiblement admissible* au sens de [3]. Le résultat principal de [1] signifie qu'elle est alors également admissible au sens de [3]. Si $\overline{L}$ désigne une clôture algébrique de L, on dispose donc (*loc.cit.)* d'une équivalence naturelle entre la catégorie des isocristaux (relativement à $(\mathbb{Q}_p,k)$) munis d'une filtration admissible, et la catégorie des représentations p-adiques cristallines de $\mathrm{Gal}(\overline{L}/L)$.

3) Ce résultat s'étend au cas où F est une extension finie arbitraire de $\mathbb{Q}_p$. Soit C_p le complété de $\overline{L}$ pour la topologie p-adique. Appelons *F-représentation de* $\mathrm{Gal}(\overline{L}/L)$ la donnée d'un F-espace vectoriel de dimension finie V muni d'une action linéaire et continue de $\mathrm{Gal}(\overline{L}/L)$. Pour une telle représentation, notons $V_{C_p,F}$ le noyau de l'application C_p-linéaire naturelle de $C_p\otimes_{\mathbb{Q}_p}V$ dans $C_p\otimes_F V$. On dispose alors d'une équivalence naturelle entre la catégorie des isocristaux (relativement à (F,k)) munis d'une filtration admissible et la sous-catégorie pleine de la catégorie des F-représentations de $\mathrm{Gal}(\overline{L}/L)$ dont les objets sont les V qui sont cristallines en tant que représentations p-adiques et vérifient la condition

$$(*)\qquad \begin{cases}\text{le } C_p\text{-espace vectoriel } V_{C_p,F} \text{ est engendré}\\ \text{par les éléments fixes par } \mathrm{Gal}(\overline{L}/L).\end{cases}$$

Lorsque V provient d'un groupe formel Φ, cette dernière condition signifie que Φ est un O_F-module formel (*cf.* par exemple, [2]). Par exemple, soit π une uniformisante de F et soit $(D,\varphi)=(L,\pi\sigma)$; la seule filtration admissible est celle pour laquelle $\mathrm{gr}_1^{\mathcal{F}^\bullet}(D)\neq 0$. La F-représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{L}/L)$ associée est de dimension 1 et c'est la duale de la restriction à $\mathrm{Gal}(\overline{L}/L)$ de celle que fournit un groupe formel de Lubin-Tate pour F correspondant à π. Soit η : $\mathrm{Gal}(\overline{L}/L)\to F^\times$ le caractère qui définit l'action du groupe de Galois. Si τ est un $\mathbb{Q}_p$-automorphisme non trivial de F, la F-représentation de dimension 1 définie par $\tau\eta$ est encore cristalline mais elle ne vérifie pas (*).

Les remarques 2) et 3) ne seront pas utilisées dans la suite.

Sur $(\mathbb{Q}^d)_+$, on dispose de l'ordre partiel pour lequel $\lambda\le\lambda'$ si

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_r\le\lambda'_1+\lambda'_2+\cdots+\lambda'_r,\ \text{ pour } r=1,2,\ldots,d-1,$$

et $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_d=\lambda'_1+\lambda'_2+\cdots+\lambda'_d$.

Dire que $\lambda\le\lambda'$ équivaut à dire que $P(\lambda)$ est au-dessus de $P(\lambda')$ et que ces deux polygones ont mêmes extrémités.

THÉORÈME 1. — *Supposons k algébriquement clos. Soit (D,φ) un isocristal de dimension d. Soit $\mu\in(\mathbb{Z}^d)_+$. Pour qu'il existe une filtration faiblement admissible de type μ sur D, il faut et il suffit que $\mu\ge\nu(D,\varphi)$.*

Soit O_L l'anneau des entiers de L, et soit $\pi \in O_F$ une uniformisante qui est donc aussi une uniformisante de l'anneau de valuation discrète O_L. Soit (D,φ) un isocristal de dimension d. Un O_L-réseau M de D est dit de type $\mu \in (\mathbb{Z}^d)_+$ s'il existe une base $e_1,\ldots,e_d$ de M tel que $\pi^{\mu_1}e_1,\ldots,\pi^{\mu_d}e_d$ soit une base de $\varphi(M)$. Tout O_L-réseau M a un type bien déterminé que l'on note $\mu(M)$.

Théorème 2. — *Supposons k algébriquement clos. Soit (D,φ) un isocristal de dimension d. Soit $\mu \in (\mathbb{Z}^d)_+$. Alors il existe un O_L-réseau de type μ dans D si et seulement si $\mu \geq \nu(D,\varphi)$.*

D'après [3, prop. 4.3.3], la condition d'admissibilité équivaut à demander que $P(\mu(\mathcal{F}^\bullet))$ et $P(\nu(D,\varphi))$ ont mêmes extrémités et que, pour tout sous-isocristal (D',φ') de (D,φ), si $\mathcal{F}'^\bullet$ est la filtration induite par $\mathcal{F}^\bullet$, alors $P(\mu(\mathcal{F}'^\bullet))$ est en dessous de $P(\nu(D',\varphi'))$. L'implication directe du théorème 1 en résulte.

L'implication directe du théorème 2 est l'inégalité de Mazur (*cf.* [5, th. 1.4.1]). Le contenu de ces deux théorèmes est donc la réciproque à ces inégalités. Le lien entre eux est donné par un résultat de Laffaille [10], comme on va le voir au § 1.

Le théorème 2 est aussi obtenu, avec une preuve différente, dans [9]. En fait, on a une version de l'inégalité de Mazur pour un groupe réductif quasi-déployé dans F et déployé dans une extension non ramifiée de F (*cf.* [12]). On peut conjecturer que la réciproque à cette inégalité est vraie, dans ce contexte (existence de certains sous-groupes parahoriques hyperspéciaux), et on peut la démontrer dans certains cas (*cf.* [11], [9]). En ce qui concerne la généralisation du théorème 1 dans cette direction, on a le résultat suivant :

Soit G un groupe réductif connexe *quasi-déployé* sur F. Soit A un tore déployé maximal. Soit T le tore maximal contenant A. Fixons un sous-groupe de Borel B contenant T. Soit $\overline{C}$ la chambre de Weyl fermée dans $X_*(T)\otimes\mathbb{R}$ correspondante. Si $\overline{F}$ est une clôture algébrique de F, le groupe $\Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ agit sur $\overline{C}$. Soient $\mathfrak{A} = X_*(A)\otimes\mathbb{Q}$ et $\mathfrak{A}_+ = \mathfrak{A}\cap\overline{C} = \overline{C}^\Gamma \cap \big(X_*(T)\otimes\mathbb{Q}\big)$.

Soient L' une extension finie de L et $\mu : \mathbb{G}_m \to G$ un morphisme défini sur L'. On note μ_0 l'unique conjugué de μ qui appartient à $\overline{C}\cap X_*(T)$. On pose

$$\bar{\mu} = \frac{1}{(\Gamma:\Gamma_{\mu_0})}\sum_{\tau\in\Gamma/\Gamma_{\mu_0}} \tau\mu_0 \in \mathfrak{A}_+. \tag{0.2}$$

C'est un élément de $\mathfrak{A}_+$ qui ne dépend que de la classe de conjugaison $\{\mu\}$ de μ.

Soit $b \in G(L)$. On note $\bar{\nu}_b \in \mathfrak{A}_+$ son point de Newton (*cf.* [8], introduction et § 3.2). Rappelons comment on peut le définir : soit $\mathbb{D}$ le groupe diagonalisable sur F de groupe des caractères $\mathbb{Q}$; on a $\mathrm{Hom}(\mathbb{D},T) = \mathfrak{A}$. À toute représentation rationnelle (V,ϱ) de G est associée un isocristal (D,φ), avec $D = V\otimes_F L$

et $\varphi = \varrho(b) \cdot (\mathrm{id}_V \otimes \sigma)$. La décomposition par les pentes

$$D = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Q}} D_\alpha$$

peut être considérée comme un morphisme $\nu_\varrho : \mathbb{D} \to \mathrm{GL}(V)$ défini sur L. Il existe un unique morphisme $\nu_b : \mathbb{D} \to G$ tel que $\nu_\varrho = \varrho \circ \nu_b$ pour tout ρ. Alors $\bar{\nu}_b$ est l'unique conjugué de ν_b sous l'action de $G(L)$ qui est dans $\mathfrak{A}_+$. Il ne dépend que de la classe de σ-conjugaison de b (voir [8]).

On a par ailleurs sur $\mathfrak{A}_+$ l'ordre partiel usuel, pour lequel $\lambda \leq \lambda'$ si et seulement si $\lambda' - \lambda$ est combinaison linéaire à coefficients ≥ 0 des coracines simples relatives à $\overline{C}$.

Une paire (b, μ) formée d'un élément $b \in G(L)$ et d'un homomorphisme $\mu : \mathbb{G}_m \to G$ défini sur une extension finie L' de L est dite *admissible* (appelée *faiblement admissible* dans [13, déf. 1.18]) si, pour toute représentation rationnelle (V, ϱ) de G, l'isocristal associé (D, φ), muni de la filtration $\mathcal{F}^\bullet$ sur $D \otimes_L L'$ induite par $\varrho \circ \mu$, est admissible. Il suffit pour vérifier cette propriété de la tester sur une représentation fidèle.

Théorème 3. — *Supposons k algébriquement clos. Soit G un groupe réductif connexe quasi-déployé sur F. Soient $b \in G(L)$, L' une extension finie de L et $\mu : \mathbb{G}_m \to G$ un morphisme défini sur L'. Pour qu'il existe $\mu' \in \{\mu\}$ défini sur L' et tel que la paire (b, μ') soit admissible il faut et il suffit que $\bar{\mu} \geq \bar{\nu}_b$.*

Explicitons ce théorème lorsque $G = T$ est un tore. Dans ce cas, $\{\mu\}$ correspond à un seul élément $\mu \in X_*(T)$ et $\bar{\mu}$ est la moyenne sur l'orbite $\Gamma \cdot \mu$; l'ordre partiel est trivial et l'énoncé signifie que

$$(b, \mu) \text{ est admissible } \iff \bar{\mu} = \bar{\nu}_b. \tag{0.3}$$

Ceci est exactement l'équivalence entre (i) et (iii) de la proposition 1.21 de [13]. Le théorème 3 est donc à la fois une généralisation de cette proposition, qui est le cas d'un tore, et du théorème 1, qui est le cas de GL_d.

Remarque. — Dans le théorème 3, soit $E \subset L'$ le corps de définition de la classe de conjugaison $\{\mu\}$ de μ. Alors E est une extension finie de F et L' contient EL. Inversement, étant données une classe de conjugaison $\{\mu\}$ définie sur E et une extension L' de EL, il existe $\mu \in \{\mu\}$ défini sur L', *cf.* [6, § 1.4.3].

Nous remercions G. Laumon pour des discussions utiles.

Durant la préparation de ce travail, le deuxième auteur a bénéficié du soutien financier du Ministère de la Recherche et de la Fondation A. von Humboldt (prix Gay-Lussac/Humboldt) et aussi de l'hospitalité des Universités de Paris (Jussieu et Orsay).