Bull. Soc. math. France
134 (2), 2006, p. 173–200

SUR CERTAINES SINGULARITÉS NON ISOLÉES D'HYPERSURFACES I

PAR DANIEL BARLET

RÉSUMÉ. — L'objectif de cet article est de mettre en place, dans le cadre de fonctions à lieu singulier de dimension 1, avec des hypothèses assez restrictives mais donnant accès à beaucoup d'exemples non triviaux, l'analogue de la théorie de E. Brieskorn pour une fonction à singularité isolée. Les principaux résultats sont le théorème de finitude pour le (a, b)-module associé à l'origine, qui est obtenu via le théorème de constructibilité de M. Kashiwara, et les résultats de non torsion pour une courbe plane (non nécessairement réduite) et pour la suspension d'un tel cas sans torsion avec une singularité isolée.

ABSTRACT (*On some non isolated hypersurface singularities I*). — The aim of this first part is to introduce, for a rather large class of hypersurface singularities with 1-dimensional locus, the analog of the Brieskorn lattice at zero (the singular point of the singular locus). The main results are the finitness theorem for the corresponding (a, b)-module obtained via Kashiwara's constructibility theorem, and non torsion results for a plane curve singularity (not nessarily reduced) and for the suspension of such non torsion cases with an isolated singularity.

Texte reçu le 26 février 2004, révisé le 9 mai 2005 et accepté le 26 octobre 2005.

DANIEL BARLET, Université Henri Poincaré, Nancy I et Institut Universitaire de France, Institut É. Cartan UHP/CNRS/INRIA, UMR 7502, Faculté des Sciences et Techniques, BP 54506 Vandœuvre-les-Nancy Cedex (France). • *E-mail :* `barlet@iecn.u-nancy.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 32S05, 32S25, 32S40.

Mots clefs. — Singularité d'hypersurface, lieu singulier de dimension 1, module de Brieskorn, (a, b)-module, opérateurs microlocaux formels.

1. Introduction

L'objectif de cet article est de mettre en place, dans le cadre de fonctions à lieu singulier de dimension 1, avec des hypothèses assez restrictives mais donnant accès à beaucoup d'exemples non triviaux, l'analogue de la théorie de E. Brieskorn pour une fonction à singularité isolée (voir [11]).

Ce premier volet est centré sur la construction de l'analogue du module de Brieskorn associé à l'origine (qui est le point singulier du lieu singulier de $f = 0$) et les principaux résultats obtenus sont

1) le théorème de finitude 3.1.1 ;
2) le théorème de non torsion pour les courbes planes non nécessairement réduites 4.2.2 ;
3) la stabilité de l'absence de torsion par suspension avec une fonction à singularité isolée (proposition 4.3.3.)

Le théorème de finitude nous permet d'attacher à une fonction vérifiant notre hypothèse (HI) un (a, b)-module à l'origine. Malheureusement, le calcul du rang de ce (a, b)-module, qui donne la dimension du n-ième groupe de cohomologie de la fibre de Milnor de f à l'origine, fait intervenir la torsion éventuellement présente. Quand cette torsion est nulle, on obtient une jolie formule généralisant celle de J. Milnor pour le cas d'une singularité isolée.

Nous donnons alors des conditions simples pour assurer l'annulation de cette torsion. D'où l'intérêt des résultats 2) et 3) de non torsion.

Le second volet (voir [7]) s'attaquera à une version filtrée du phénomène d'interaction de strates consécutives étudié dans [2]. Ceci nécessitera au préalable la généralisation au cas de la valeur propre 1 les résultats de *loc. cit.*

Cette généralisation est décrite dans [5], mais nécessite l'étude d'une situation à trois strates ; on consultera l'introduction de [6] pour des commentaires plus détaillés sur les interactions de strates.

2. Pré-(a, b)-Modules

2.1. Généralités

DÉFINITION 2.1.1. — Soit E un espace vectoriel complexe muni d'endomorphismes a et b. On pose

$$B(E) = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \operatorname{Ker} b^m \quad \text{et} \quad A(E) = \{x \in E\,;\ \mathbb{C}[b]\cdot x \subset \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \operatorname{Ker} a^m\}.$$

On dira que E est un *pré-(a, b)-module* lorsque les conditions suivantes sont vérifiées :

i) $a \cdot b - b \cdot a = b^2$;
ii) pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $b - \lambda$ est bijectif dans E ;
iii) il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $a^N \cdot A(E) = 0$;

iv) $B(E) \subset A(E)$;
v) $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} b^m(E) \subset A(E)$;
vi) le noyau et le conoyau de b sont de dimensions finies sur $\mathbb{C}$.

On dira que E est *sans torsion* (en fait sans b-torsion) si on a de plus $\operatorname{Ker} b = 0$ ce qui équivaut à $B(E) = 0$. Dans ce cas, la condition $B(E) \subset A(E)$ devient triviale. Mais il résultera du lemme 2.1.2 que dans ce cas on a également $A(E) = 0$.

Remarques

1) Un (a, b)-module, c'est-à-dire un $\mathbb{C}[[b]]$-module libre de type fini muni d'un endomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire a vérifiant la relation i) de commutation, est un pré-(a, b)-module. En effet l'injectivité de b donne la nullité de $B(E)$; donc la condition iv) est triviale. La b-complétion, qui implique la b-séparation, donne la condition v) et la condition ii). La condition vi) est également évidente. Il reste à montrer la condition iii).

Montrons directement que l'on a $A(E) = 0$ dans ce cas.

Soit $x \in A(E)$ vérifiant $a \cdot x = 0$. Alors on doit avoir $a^n \cdot bx = 0$ pour $n \in \mathbb{N}$ assez grand. Mais si on a $a \cdot x = 0$ et $a^n \cdot bx = 0$, on en déduit que $a^{n-1} \cdot (ba + b^2) \cdot x = 0$ d'où $a^{n-1} \cdot b^2 x = 0$ puis $a^{n-p} \cdot b^p x = 0$ pour $p = 1, \ldots, n$. On a donc $b^n \cdot x = 0$ d'où $x = 0$ puisque b est injective. Comme par définition a est nilpotente sur $A(E)$, on en conclut que $A(E) = 0$ pour un (a, b)-module. La condition iii) est donc trivialement vérifiée dans ce cas.

2) Grâce à la condition ii), un pré-(a, b)-module est un module sur le localisé $\mathbb{C}[b]_0$ de l'anneau $\mathbb{C}[b]$ par rapport à l'idéal maximal engendré par b.

3) On remarquera que, par définition, $A(E)$ est stable par b et que $x \in A(E)$ si et seulement si pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a^n \cdot b^p \cdot x = 0$. On en déduit que $A(E)$ est stable par a car si on a $a^N \cdot b^p \cdot x = a^N \cdot b^{p+1} \cdot x = 0$ alors

$$a^N \cdot b^p \cdot ax = a^N \cdot (a \cdot b^p - p \cdot b^{p+1}) \cdot x = 0.$$

Lemme 2.1.2. — *Si E est un pré-(a, b)-module, alors $A(E)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. De plus on a l'égalité $B(E) = A(E)$.*

Démonstration. — Comme $A(E)$ est stable par a et b, l'égalité $a^N \cdot A(E) = 0$ donne $b^{2N} \cdot A(E) = 0$. En effet la relation de commutation i) implique la formule

$$N!\, b^{2N} = \sum_{j=0}^{N} (-1)^j \binom{j}{N} \cdot b^j a^N b^{N-j}.$$

Elle est établie dans [4, p. 24].

L'égalité $B(E) = A(E)$ s'en déduit en constatant que dans le quotient $A(E)/B(E)$ l'endomorphisme b est à la fois injectif, puisque $bx \in B(E)$ implique $x \in B(E)$, et nilpotent, puisque $b^{2N} \cdot A(E) = 0$.

Montrons que l'espace vectoriel $B(E) = A(E)$ est de dimension finie. On a pour chaque $\nu \in \mathbb{N}$ la suite exacte de $\mathbb{C}-$espaces vectoriels

$$0 \to \operatorname{Ker} b \longrightarrow \operatorname{Ker} b^{\nu+1} \xrightarrow{b} \operatorname{Ker} b^{\nu};$$

qui donne par récurrence, grâce à la finitude de $\operatorname{Ker} b$, la finitude de la dimension de $\operatorname{Ker} b^{\nu}$ pour tout $\nu \in \mathbb{N}$. Mais on a $A(E) \subset \operatorname{Ker} b^{2N}$. $\square$

Remarques

1) La preuve des assertions $b^{2N} A(E) = 0$ et $B(E) = A(E)$ dans le lemme 2.1.2 n'utilise pas la condition de finitude vi) pour E.

2) Le lemme précédent donne également la b-séparation sans utiliser la condition vi) pour E, c'est-à-dire la nullité de $\bigcap_{m \geq 0} b^m(E)$. En effet, si x appartient à $\bigcap_{m \geq 0} b^m(E)$, on peut trouver $y \in E$ vérifiant $b^{2N} \cdot y = x$. Mais comme x est dans $B(E)$, on a également $y \in B(E) = A(E)$ et donc $b^{2N} \cdot y = x = 0$. Les propriétés i) à v) seules, suffisent donc à assurer la b-séparation de E et donc son injection dans son complété b-adique, sans avoir à quotienter par $A(E) = B(E)$, c'est à dire par la b-torsion. Ceci s'applique, en particulier, à la situation de la proposition 2.3.1, ce qui couvre tous les cas issus de singularités d'une fonction holomorphe (arbitraire) que nous considèrerons.

3) La a-torsion de E, qui est le sous-espace vectoriel $\tilde{A}(E) := \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \operatorname{Ker} a^m$, peut être strictement plus gros que $A(E)$ et ne pas être stable par b même dans le cas d'un (a, b)-module. Prendre par exemple le (a, b)-module $\mathbb{C}[[b]]$-libre de rang 1 et de générateur noté e dont l'application a est définie par $a \cdot e = 0$ (on a alors $ab^n \cdot e = n \cdot b^{n+1} \cdot e$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

4) À titre d'exercice, le lecteur pourra montrer que pour un pré-(a, b)-module régulier (voir 2.2.1) l'espace vectoriel $\tilde{A}(E)$ est toujours de dimension finie (il suffit en fait de traiter le cas d'un (a, b)-module à pôle simple).

5) Nous montrerons au lemme 2.3.2 que pour les pré-(a, b)-modules associés aux systèmes de Gauss-Manin d'un germe de fonction holomorphe, on a toujours $\tilde{A}(E) = A(E)$ grâce au théorème de positivité de B. Malgrange [15].

Proposition 2.1.3. — *Soit E un pré-(a, b)-module. Le complété b-adique $\mathcal{L}(E)$ du quotient $E/A(E)$ est un (a, b)-module (voir plus haut ou bien* [3], [4], [9]). *L'application (a, b)-linéaire naturelle*

$$E \longrightarrow \mathcal{L}(E)$$

a pour noyau $B(E) = A(E)$; elle est continue et d'image dense pour la topologie b-adique.

Démonstration. — D'après ce qui précède, b est injective sur $E/A(E)$ qui est séparé pour la filtration b-adique d'après la condition v). Pour conclure il suffit de voir que le conoyau de b agissant sur $E/A(E)$ est de dimension finie sur $\mathbb{C}$. Ceci est clair puisque c'est un quotient de $E/b \cdot E$. $\square$

Définition 2.1.4. — Nous appellerons *rang* du pré-(a,b)-module E, noté $\mathrm{rg}(E)$, le rang (comme $\mathbb{C}[[b]]$-module libre) du (a,b)-module $\mathcal{L}(E)$ qui lui est associé.

On remarquera que si $\delta := \dim \operatorname{Ker} b$, on a

$$\mathrm{rg}(E) = \dim E/b \cdot E - \delta$$

puisque $B(E)$ est de dimension finie.

2.2. Régularité et produit tensoriel

Définition 2.2.1. — Nous dirons qu'un pré-(a,b)-module E est *local* (resp. *à pôle simple*, *régulier*) quand il vérifie :

- *local* : il existe $\ell \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^\ell \cdot E \subset b.E$;
- *à pôle simple* : on a $\ell = 1$ dans la condition précédente, c'est-à-dire $a \cdot E \subset b \cdot E$;
- *régulier* : il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^k \cdot E \subset \sum_{j\in[0,k-1]} b^{k-j} \cdot a^j \cdot E$.

Remarques

- On a, bien sûr, « pôle simple » $\Rightarrow$ « régulier » $\Rightarrow$ « local ».
- Il est équivalent de demander que E soit local (resp. régulier), ou bien que $E/B(E)$ soit local (resp. régulier), ou encore que $\mathcal{L}(E)$ le soit.

Définition 2.2.2. — Soient E et F deux pré-(a,b)-modules ; alors le produit tensoriel $E \otimes_{\mathbb{C}[b]_0} F$ muni de l'application $\mathbb{C}$-linéaire

$$a := (a_E \otimes 1_F + 1_E \otimes a_F)$$

sera appelé *produit tensoriel* de E et F et noté simplement $E \otimes_{a,b} F$ ou plus simplement $E \otimes F$ quand il n'y a pas d'ambiguité.

Proposition 2.2.3. — *Soient E et F deux pré-(a,b)-modules locaux; alors $E \otimes_{a,b} F$ est également un pré-(a,b)-module local. Si de plus E et F sont réguliers (resp. à pôles simples), alors $E \otimes_{a,b} F$ est régulier (resp. à pôle simple).*

Démonstration. — La condition i) se vérifie facilement et la condition ii) est immédiate. Pour montrer la condition iv), commençons par prouver que l'on a

$$B(E \otimes F) = B(E) \otimes F + E \otimes B(F).$$

L'inclusion $B(E) \otimes F + E \otimes B(F) \subset B(E \otimes F)$ est claire. Montrons l'inclusion opposée. Soit $z \in B(E \otimes F)$. Posons $z = \sum_{i\in I} x_i \otimes y_i$ où I est fini et notons par E_1 et F_1 les sous-$\mathbb{C}[b]_0$-modules engendrés par les $(x_i)_{i\in I}$ et les $(y_i)_{i\in I}$ respectivement. Comme, par définition, E_1 et F_1 sont des $\mathbb{C}[b]_0$-modules de type fini, ils sont somme directe de leur torsion et d'un module libre de type fini. On en conclut aisément que l'on a

$$B(E_1 \otimes F_1) \simeq \big(B(E_1) \otimes F_1\big) + \big(E_1 \otimes B(F_1)\big),$$