Bull. Soc. math. France
134 (3), 2006, p. 357–381

BAS DU SPECTRE ET DELTA-HYPERBOLICITÉ EN GÉOMÉTRIE DE HILBERT PLANE

PAR BRUNO COLBOIS & CONSTANTIN VERNICOS

RÉSUMÉ. — On montre l'équivalence entre l'hyperbolicité au sens de Gromov de la géométrie de Hilbert d'un domaine convexe du plan et la non nullité du bas du spectre de ce domaine.

ABSTRACT (*Bottom of the spectrum and delta hyperbolicity in Hilbert plane geometry*)
We prove that the Hilbert geometry of a convex domain in the plane is Gromov hyperbolic, if, and only if, the bottom of its spectrum is not zero.

Introduction

Le but de ce travail est de montrer l'équivalence entre l'hyperbolicité au sens de Gromov de la géométrie de Hilbert d'un domaine convexe $\mathcal{C}$ du plan et la non nullité du bas du spectre $\lambda_1(\mathcal{C})$ de ce domaine.

Il existe des relations très fortes en géométrie riemannienne entre le bas du spectre du laplacien d'une variété complète de volume infini et la géométrie de cette variété. Par exemple, on sait que le bas du spectre d'une variété de

Texte reçu le 4 novembre 2004, accepté le 14 mars 2005.

BRUNO COLBOIS, Institut de mathématique, Université de Neuchâtel, rue Émile Argand 11, Case Postale 158, 2009 Neuchâtel (Suisse) • *E-mail :* `Bruno.Colbois@unine.ch`
CONSTANTIN VERNICOS, Institut de mathématique, Université de Neuchâtel, rue Émile Argand 11, Case Postale 158, 2009 Neuchâtel (Suisse)
E-mail : `Constantin.Vernicos@unine.ch`

Classification mathématique par sujets (2000). — Géométrie différentielle, géométrie métrique.

Mots clefs. — Géométrie de Hilbert, hyperbolicité, bas du spectre.

© Société Mathématique de France

Cartan-Hadamard à courbure sectionnelle $K \leq C < 0$ est strictement positif. Récemment, J. Cao [5] a étudié le cas des variétés riemanniennes hyperboliques au sens de Gromov possédant un quasi-pôle, et montré que leur constante de Cheeger (donc le bas de leur spectre) était strictement positif. Dans cet article, nous abordons ce type de questions dans le contexte des géométries de Hilbert.

Avant d'énoncer les résultats précis, rappelons qu'une géométrie de Hilbert $(\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}})$ est la donnée d'un ouvert convexe et borné $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^n$ muni de la distance de Hilbert $d_{\mathcal{C}}$ définie de la manière suivante : pour toute paire de points distincts p et q dans $\mathcal{C}$, la droite passant par p et q rencontre le bord $\partial\mathcal{C}$ de $\mathcal{C}$ en deux points distincts a et b tels que la droite passe par a, p, q et b dans cet ordre.

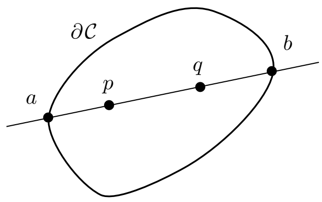

FIGURE 1. Distance de Hilbert

On définit alors
$$d_{\mathcal{C}}(p,q) = \frac{1}{2}\ln[a,p,q,b]$$
où $[a,p,q,b]$ est le birapport de (a,p,q,b) :
$$[a,p,q,b] = \frac{\|q-a\|_e}{\|p-a\|_e} \times \frac{\|p-b\|_e}{\|q-b\|_e}$$
où $\|.\|_e$ désigne la norme euclidienne. On pose également $d_{\mathcal{C}}(p,p) = 0$.

Sur $\mathcal{C}$, on peut mettre une norme de Finsler C^0, notée $\|.\|_{\mathcal{C}}$, en procédant comme suit : si $p \in \mathcal{C}$ et $u_p \in T_p\mathcal{C} = \mathbb{R}^n$, la droite passant par p et dirigée par u_p coupe $\partial\mathcal{C}$ en deux points p^+ et p^-. On pose alors
$$\|u_p\|_{\mathcal{C}} = \frac{1}{2}\|u_p\|_e\Big(\frac{1}{\|p-p^+\|_e} + \frac{1}{\|p-p^-\|_e}\Big)$$
où $\|u_p\|_e$ désigne la norme euclidienne de u_p.

Notons que la distance de longueur induite sur $\mathcal{C}$ par la norme $\|.\|_{\mathcal{C}}$ coïncide avec $d_{\mathcal{C}}$, mais nous n'utiliserons pas ce fait dans la suite.

À cette norme de Finsler est associée une norme duale : si ℓ_p est une forme linéaire sur $T_p\mathcal{C}$, on pose
$$\|\ell_p\|^*_{\mathcal{C}} = \sup\Big\{\ell_p(u_p) : u_p \in T_p\mathcal{C},\ \|u_p\|_{\mathcal{C}} = 1\Big\}.$$

Grâce à la norme de Finsler, on construit une forme volume et une mesure sur $\mathcal{C}$ (qui correspond en fait à la mesure de Hausdorff, voir [4], exemple 5.5.13).

Soient $p \in \mathcal{C}$ et $TB_{\mathcal{C}}(p) = \{u_p \in T_p\mathcal{C} = \mathbb{R}^n : \|u_p\|_{\mathcal{C}} < 1\}$ la boule unité de $T_p\mathcal{C}$. Soit ω_n le volume de la boule unité de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ et considérons la fonction $h\colon \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ donnée par $h(p) = \omega_n / \operatorname{vol}_e(TB_{\mathcal{C}}(p))$ où vol_e est le volume euclidien usuel.

Alors la mesure $\mu_{\mathcal{C}}$ (que nous nommerons *mesure de Hilbert* de $\mathcal{C}$; elle est également connue sous le nom de mesure de Busemann) associée à $\|.\|_{\mathcal{C}}$ est définie ainsi : si $A \subset \mathcal{C}$ est un borélien, on pose

$$\mu_{\mathcal{C}}(A) = \int_A h(p) \mathrm{dvol}_e(p)$$

où $\mathrm{dvol}_e(p)$ est la mesure de Lebesgue.

Enfin, si Ω est un domaine avec $\overline{\Omega} \subset \mathcal{C}$, l'intégrale sur Ω par rapport à $\mu_{\mathcal{C}}$ d'une fonction f définie sur Ω sera notée $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu_{\mathcal{C}}$.

Remarque. — Les résultats de cet article restent inchangés si on considère une mesure équivalente. En particulier, la mesure dite de Holmes-Thompson, qui est équivalente par les inégalités de Santalo et Bourgain-Milman à la mesure de Hilbert, donne les mêmes résultats.

Lorsque $\mathcal{C}$ est une ellipse, $(\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}})$ est le modèle projectif (ou modèle de Klein) de la géométrie hyperbolique, et on peut penser aux géométries de Hilbert $(\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}})$ comme à une généralisation naturelle de l'espace hyperbolique. Une question communes à de nombreux travaux récents (voir [13], [14], [1], [8], [7], [11] et leurs références) est de déterminer les propriétés de l'espace hyperbolique dont ces géométries héritent et de trouver des caractérisations de l'espace hyperbolique parmi les géométries de Hilbert. En particulier, Y. Benoist [1] obtient en toute dimension une caractérisation des convexes dont la géométrie de Hilbert associée est hyperbolique au sens de Gromov (voir [3] pour une discussion de ce concept). Cette caractérisation est donnée en fonction de la régularité du bord des convexes considérés.

Dans cet article, nous allons caractériser en dimension 2 l'hyperbolicité au sens de Gromov d'un point de vue spectral : nous montrons qu'en dimension 2 avoir un bas du spectre strictement positif est équivalent à être hyperbolique au sens de Gromov.

On définit le bas du spectre de $\mathcal{C}$, que l'on note $\lambda_1(\mathcal{C})$, par analogie avec ce qui se fait dans le cas des variétés riemanniennes de volume infini. On pose

$$\lambda_1(\mathcal{C}) = \inf \frac{\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \|\mathrm{d}f_p\|_{\mathcal{C}}^{*2} \mathrm{d}\mu_{\mathcal{C}}(p)}{\displaystyle\int_{\mathcal{C}} f^2(p) \mathrm{d}\mu_{\mathcal{C}}(p)} \tag{1}$$

où l'infimum est pris sur toutes les fonctions lipschitziennes, non nulles, à support compact dans $\mathcal{C}$ et où $\mu_{\mathcal{C}}$ est la mesure de Hilbert associée à $\mathcal{C}$. L'expression ci-dessus est appelée le *quotient de Rayleigh* de f.

Le bas du spectre $\lambda_1(\mathcal{C})$ est un nombre réel positif ou nul. On sait que lorsque $\mathcal{C}$ est une ellipse, c'est-à-dire que l'on se trouve dans le modèle hyperbolique, il vaut $\frac{1}{4}$. On verra un peu plus loin que dans le cas où $\mathcal{C}$ est un triangle, le bas du spectre est nul.

Notre résultat principal est :

THÉORÈME 0.1. — *Soit* $(\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}})$ *un convexe du plan muni de sa métrique de Hilbert. Alors son bas du spectre est non nul, i.e.,* $\lambda_1(\mathcal{C}) \neq 0$*, si et seulement s'il existe* $\delta > 0$ *tel que* $(\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}})$ *est* δ*-hyperbolique.*

Pour un domaine ouvert, borné (relativement à $d_{\mathcal{C}}$) Ω à bord lipschitzien de $\mathcal{C}$, on appellera *bas du spectre de Dirichlet* le nombre

$$\lambda_1^{\mathcal{C}}(\Omega) = \inf \frac{\displaystyle\int_\Omega \|\mathrm{d} f_p\|_{\mathcal{C}}^{*\,2} \mathrm{d}\mu_{\mathcal{C}}(p)}{\displaystyle\int_\Omega f^2(p) \mathrm{d}\mu_{\mathcal{C}}(p)}, \tag{2}$$

où l'infimum est pris sur toutes les fonctions lipschitziennes, non nulles, à support dans Ω.

Il est clair que $\lambda_1^{\mathcal{C}}(\Omega) \geq \lambda_1(\mathcal{C})$ et que $\lambda_1^{\mathcal{C}}$ est une fonction décroissante suivant l'inclusion des ensembles : en effet, si $\Omega_1 \subset \Omega_2$, toute fonction à support dans Ω_1 s'étend naturellement par 0 en une fonction à support dans Ω_2.

L'idée de la preuve du théorème 0.1 est la suivante.

À la section 1, on montrera que la non nullité du bas du spectre entraîne l'hyperbolicité au sens de Gromov en nous appuyant principalement sur un résultat de Y. Benoist qui donne une condition suffisante pour qu'une famille de convexes munis de leur métrique de Hilbert soit δ-hyperbolique (proposition 1.2 ci-dessous). On montrera que tous les convexes dont le bas du spectre est supérieur ou égal à une constante positive λ donnée sont δ-hyperboliques, δ dépendant de λ.

À la section 2, on montrera la réciproque en utilisant une inégalité isopérimétrique que vérifie les espaces δ-hyperboliques et sur une estimation du volume des boules, intéressante pour elle-même, valable en toute dimension, donnée à la section 2.1. En particulier, le volume d'une boule de rayon fixé est uniformément majoré sur toutes les géométries de Hilbert de dimension n. Dans le cas riemannien, cela est impliqué par la donnée d'un minorant sur la courbure de Ricci, mais on sait qu'une hypothèse de ce type n'est pas vérifiée par les géométries de Hilbert qui ne sont pas, en général, des espaces d'Alexandroff. Pour conclure, nous aurons besoin d'une inégalité du type Cheeger reliant les constantes isopérimétriques et le bas du spectre. Pour l'essentiel, on peut adapter ce qui se fait dans la cas riemannien en faisant un détour par le cas finslérien, mais cela pose quelques problèmes techniques. D'une part, les convexes que l'on considère possèdent une métrique de Finsler seulement C^0, ce qui ne permet pas sans autre d'adapter l'inégalité de Cheeger riemannienne, d'autre part, il y a différentes façons d'induire une mesure sur les hypersurfaces selon que l'on s'intéresse à l'inégalité isopérimétrique ou à la formule de la co-aire (comme souvent ces notions coïncident dès que l'on se trouve dans un contexte riemannien). Aussi avons nous traité ce problème d'un point du vue général des variétés de Finsler aux sections 3 (pour la formule de la co-aire) et 4 (pour l'inégalité de Cheeger). Ces deux sections sont intéressantes pour elles-mêmes, mais peuvent également être admises pour la preuve du théorème 0.1

1. La non nullité du bas du spectre implique la δ-hyperbolicité

THÉORÈME 1.1. — *Un convexe $(\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}})$ du plan, muni de sa métrique de Hilbert et dont le bas du spectre est non nul est Gromov hyperbolique. Plus précisément :*

$$\forall \lambda > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall \mathcal{C},\ \lambda_1(\mathcal{C}) \geq \lambda \implies (\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}}) \text{ est } \delta\text{-hyperbolique.}$$

Soient $G_n := \mathrm{PGL}(\mathbb{R}^{n+1})$ et $\mathbb{P}^n := \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ l'espace projectif de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Une partie *proprement convexe* $\mathcal{C}$ de $\mathbb{P}^n$ est une partie convexe dont l'adhérence est incluse dans le complémentaire d'un hyperplan projectif. Ainsi on peut lui associer un convexe borné de $\mathbb{R}^n$ et, inversement, à un convexe borné de $\mathbb{R}^n$ on peut associer une partie proprement convexe de $\mathbb{P}^n$. Dans la suite, on désignera par X_n l'ensemble des ouverts proprement convexes et par X_n^δ l'ensemble des ouverts proprement convexes et δ-hyperboliques de $\mathbb{P}^n$, munis de leur métrique de Hilbert.

Nous munissons X_n de la distance de Hausdorff entre les ensembles, comme définie dans [1], p. 2.

On peut alors énoncer :

PROPOSITION 1.2 (cf. [1, prop. 2.11]). — *Soit F un sous ensemble fermé de X_n, G_n-invariant, dont tous les éléments sont strictement convexes (c'est-à-dire que l'intérieur du segment reliant deux points du bord de $\mathcal{C}$ est dans $\mathcal{C}$). Alors il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que $F \subset X_n^\delta$.*

En sorte que le théorème 1.1 se déduit aisément de la proposition 1.2 grâce à la proposition suivante.

PROPOSITION 1.3. — *Soit $\lambda > 0$ et $F_\lambda \subset X_n$ l'ensemble des convexes de X_n dont le bas du spectre est supérieur ou égal à λ. Alors F_λ est une partie fermée et G_n-invariante de X_n, et si $n = 2$, tous ses éléments sont strictement convexes.*