Bull. Soc. math. France
134 (3), 2006, p. 395–415

SUR LE GROUPE DES CLASSES D'UN SCHÉMA ARITHMÉTIQUE

PAR BRUNO KAHN

Avec un appendice de Marc Hindry

RÉSUMÉ. — Nous donnons une démonstration du fait que le groupe des classes d'un schéma irréductible de type fini sur Spec $\mathbf{Z}$ est de type fini. Cette preuve ne repose pas sur le théorème de Mordell-Weil-Néron, mais plutôt sur le théorème de Mordell-Weil classique, le théorème de Néron-Severi et les théorèmes de Hironaka et de Jong sur la résolution des singularités. Nous en déduisons quelques corollaires, parmi lesquels le théorème de Mordell-Weil-Néron lui-même.

ABSTRACT (*On the class group of an arithmetic scheme*). — We present a proof that the class group of an irreducible scheme of finite type over Spec $\mathbf{Z}$ is finitely generated. This proof does not rely on the Mordell-Weil-Néron theorem but rather on the classical Mordell-Weil theorem, the Néron-Severi theorem and Hironaka and de Jong's theorems on resolution of singularities. We derive some corollaries, including the Mordell-Weil-Néron theorem itself.

Texte reçu le 15 février 2005, révisé le 20 juillet 2005, accepté le 4 octobre 2005.

BRUNO KAHN, Institut de Mathématiques de Jussieu, 175–179 rue du Chevaleret, 75013 Paris (France). • *E-mail :* `kahn@math.jussieu.fr`

MARC HINDRY, Institut de Mathématiques de Jussieu, 175–179 rue du Chevaleret, 75013 Paris (France). • *E-mail :* `hindry@math.jussieu.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 11G99, 14F22, 14E15, 14G99, 14K99.

Mots clefs. — Géométrie arithmétique, résolution des singularités, variétés abéliennes, groupe des classes, groupe de Brauer.

Introduction

Soit X un schéma noethérien. Rappelons (voir [13, §21], [15, ch. II, §6, p. 131 et 143]) la définition du *groupe des classes* $\mathrm{Cl}(X)$ et du *groupe de Picard* $\mathrm{Pic}(X)$:

– $\mathrm{Cl}(X)$ est le quotient du groupe des cycles de codimension 1 de X par le sous-groupe des cycles principaux.
– $\mathrm{Pic}(X)$ est le groupe des classes d'isomorphisme de fibrés en droite (ou de $\mathcal{O}_X$-modules inversibles) sur X.

On a aussi le groupe quotient $\mathrm{Div}(X)/\mathrm{Div}^p(X)$ des diviseurs de Cartier par les diviseurs de Cartier principaux. La relation entre ces trois groupes est donnée par le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Div}(X)/\mathrm{Div}^p(X) & \longrightarrow & \mathrm{Pic}(X)\\ \big\downarrow & & \\ \mathrm{Cl}(X) & & \end{array}$$

où :

– l'homomorphisme horizontal est injectif, et bijectif si par exemple X est réduit [13, 21.3.4] ou quasi-projectif sur une base affine (*ibid.*, 21.3.5) ;
– l'homomorphisme vertical est injectif si X est normal et bijectif si et seulement si X est localement factoriel, par exemple régulier (*cf.* [13, 21.6.10], [15, p. 142, rem. 6.11.2 et cor. 6.16]).

Si U est un ouvert schématiquement dense de X, on a la suite exacte bien connue :

$$0 \to \Gamma(X,\mathbb{G}_m) \longrightarrow \Gamma(U,\mathbb{G}_m) \longrightarrow \bigoplus \mathbf{Z} \to \mathrm{Cl}(X) \longrightarrow \mathrm{Cl}(U) \to 0 \tag{1}$$

où la somme (finie) porte sur les points de codimension 1 de X qui ne sont pas dans U.

Finalement, si X est de dimension d on a aussi le groupe $\mathrm{CH}_{d-1}(X)$ des cycles de dimension $d-1$ sur X modulo l'équivalence rationnelle [9, ch. 2], qui coïncide avec $\mathrm{Cl}(X)$ si X est irréductible.

Le but de ce travail est de présenter une démonstration des énoncés suivants :

Théorème 1. — *Supposons X de type fini sur* $\mathrm{Spec}\,\mathbf{Z}$.

a) *Si X est réduit, le groupe $\Gamma(X,\mathbb{G}_m)$ est de type fini.*

b) *Si X est irréductible, le groupe $\mathrm{Cl}(X)$ est de type fini.*

Corollaire 1. — *Si X est normal et de type fini sur* $\mathrm{Spec}\,\mathbf{Z}$, $\mathrm{Pic}(X)$ *est de type fini.* □

Corollaire 2 (*cf.* Guralnick et al. [14, prop. 6.1]). — *Le groupe* $\mathrm{Cl}(X)$ (*resp.* $\mathrm{Pic}(X)$) *est de type fini si X est irréductible* (*resp. normal*) *et de type fini sur* $\mathrm{Spec}\,k$*, où k est un corps de type fini sur son sous-corps premier.*

En effet, on peut choisir un modèle U de k, irréductible et de type fini sur $\operatorname{Spec} \mathbf{Z}$, et (quitte à rétrécir U) épaissir X en $\mathcal{X}$ irréductible (resp. normal) et de type fini sur U. Alors $\mathcal{X}$ est de type fini sur $\operatorname{Spec} \mathbf{Z}$ et $\mathrm{Cl}(\mathcal{X}) \to \mathrm{Cl}(X)$ est surjectif. □

Corollaire 3 (Néron [29]). — *Soit k un corps de type fini sur son sous-corps premier, et soit A une variété abélienne sur k. Alors le groupe $A(k)$ est de type fini.*

Démonstration. — On applique le corollaire 2 à la variété abélienne duale $A^\vee$ de A, en notant que $\mathrm{Pic}^0(A^\vee) = A(k)$. □

Ainsi, pour obtenir le corollaire 3, il n'est pas nécessaire d'utiliser la théorie de la K/k-trace, ni de faire une deuxième fois (géométrique) la démonstration (arithmétique) du théorème de Mordell-Weil. Malheureusement je ne sais pas déduire du théorème 1 le théorème général de Lang-Néron [20] :

Théorème 2. — *Si K/k est une extension régulière de type fini et si A est une K-variété abélienne, alors le groupe $A(K)/A_0(k)$ est de type fini, où A_0 est la K/k-trace de A.*

On trouvera dans l'appendice A des rappels sur la K/k-trace et dans l'appendice B une démonstration de ce théorème (et même d'un énoncé un peu plus général), rédigée par Marc Hindry dans le langage des schémas.

Voici également deux énoncés liés aux précédents : le premier étend le théorème de Néron-Severi rappelé ci-dessous (théorème 5).

Théorème 3. — *Soient k un corps algébriquement clos et X une k-variété de dimension $\leq d$. Alors le groupe $A_{d-1}(X)$ des cycles de dimension $d-1$ sur X modulo l'équivalence algébrique est de type fini.*

Théorème 4. — *Soient k un corps, K un corps de type fini sur k et L/K une extension de type fini, avec K algébriquement fermé dans L. Soit p l'exposant caractéristique de k. Faisons l'une des hypothèses suivantes :*

(i) *k est un corps de nombres.*

(ii) *$H^1(k, A)$ est fini pour tout module galoisien A fini d'ordre premier à p. Exemples : k algébriquement clos, fini, local, corps de séries formelles itérées sur un tel corps, ...*

Alors la partie première à p de $\operatorname{Ker}(\mathrm{Br}(K) \to \mathrm{Br}(L))$ *est finie, où* Br *désigne le groupe de Brauer.*

Remarques 1

1) Dans le cas affine, le théorème 1, a) est dû à Samuel [32, th. 1] (et la démonstration que nous donnons est essentiellement la sienne).

2) Lorsque X est normal, le théorème 1, b) est en principe dû à Roquette [30] (voir la note en bas de page). Roquette procède par récurrence sur la dimension

de X et utilise la thèse de Néron généralisant le théorème de Mordell-Weil (corollaire 3 ci-dessus), ainsi que la génération finie du groupe de Néron-Severi (théorème 5 ci-dessous)[(1)].

3) Le théorème 1, a) est faux si on ne suppose pas X réduit. Exemple bien connu : $X = \operatorname{Spec} A$, avec $A = A_0[\epsilon]/\epsilon^2$ où $A_0 = \mathbf{Z}[t]$ ou $\mathbf{F}_p[t]$.

4) Le théorème 1, b) est faux si on ne suppose pas X irréductible. En effet, si $X = Z_1 \cup Z_2$, où Z_1 et Z_2 sont deux sous-schémas fermés dont les supports sont différents du support de X, on a une suite exacte “de Mayer-Vietoris”[(2)]

$$
\begin{aligned}
(2) \qquad 0 \to \Gamma(X, \mathbb{G}_m) \longrightarrow \Gamma(Z_1, \mathbb{G}_m) \oplus \Gamma(Z_2, \mathbb{G}_m) \\
\longrightarrow \Gamma(Z_1 \cap Z_2, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{\partial} \operatorname{Cl}(X).
\end{aligned}
$$

Choisissons $X = \operatorname{Spec} B$, avec $B = A_0[x,y]/x(y^2 - x)$ où A_0 est comme en a), et Z_1, Z_2 donnés respectivement par les équations $x = 0$ et $y^2 = x$, de sorte que $Z_1 \cap Z_2 = \operatorname{Spec} A$ où A est comme dans la remarque précédente. Alors $\Gamma(Z_1, \mathbb{G}_m)$ et $\Gamma(Z_2, \mathbb{G}_m)$ sont finis. D'autre part, $\Gamma(Z_1 \cap Z_2, \mathbb{G}_m)$ n'est pas de type fini comme vu dans la remarque précédente, et donc $\operatorname{Cl}(X)$ non plus.

Par contre, on déduit facilement du théorème 1, b) que $\mathrm{CH}_{d-1}(X)$ est de type fini pour X quelconque, grâce aux suites exactes du type

$$\mathrm{CH}_{d-1}(Z_1) \oplus \mathrm{CH}_{d-1}(Z_2) \longrightarrow \mathrm{CH}_{d-1}(X) \to 0$$

si X est réunion de deux fermés Z_1 et Z_2.

5) Le rapporteur m'a fait remarquer que le théorème 1 se généralise au cas d'un X-tore T en se ramenant à ce théorème : pour la génération finie de $H^1(X,T)$ il faut supposer X normal. Dans ce cas, on utilise le fait que T est déployé par un morphisme fini étale (surjectif) d'après [7, ch. X, cor. 5.14]. Le rapporteur observe par contre que la version torique du corollaire 2 est fausse en général, déjà avec $X = \operatorname{Spec} \mathbf{Q}$ et $T = R^1_{\mathbf{Q}(\sqrt{-1})/\mathbf{Q}} \mathbb{G}_m$. (Elle est vraie pour les tores flasques au moins sur les corps de type fini d'après Colliot-Thélène & Sansuc, [5, p. 192, th. 1] ; leur démonstration repose d'ailleurs sur le théorème 1 !)

(1) La démonstration de Roquette offre toutefois une difficulté en caractéristique p : si L/K est une extension de type fini de degré de transcendance 1, où K et L sont de type fini sur $\mathbf{F}_p$ et K est algébriquement fermé dans L, il n'est pas vrai en général que la K-courbe projective régulière de corps des fonctions L soit lisse sur K. Sa variété de Picard n'est donc pas en général une variété abélienne et le théorème de Néron ne peut pas être invoqué tel quel, *cf.* exemple 1. L'approche du présent article contourne cet écueil. Il serait intéressant de trouver une démonstration du théorème de Roquette qui en caractéristique p évite le recours au théorème de de Jong.

(2) Sans établir cette suite exacte, décrivons l'homomorphisme ∂. Soit u une unité sur $Z_1 \cap Z_2$. Relevons u en deux “fonctions méromorphes” f_1 et f_2 sur Z_1 et Z_2. Les cycles associés à f_1 et f_2 se recollent en un cycle sur X, d'où $\partial(u) \in \operatorname{Cl}(X)$.

6) Le corollaire 1 est faux si on retire l'hypothèse "normal". Par exemple, si X est la courbe projective intègre donnée par l'équation $y^2z = x^3$ sur un anneau de base A_0 comme en a), alors $\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Cl}(X) = \mathbf{Z}$ est surjectif de noyau A_0, *cf.* [9, ex. 2.1.2].

7) Dans le corollaire 2, $\Gamma(X, \mathbb{G}_m)$ n'est bien sûr pas de type fini (à moins que k ne soit fini), mais le groupe $\Gamma(X, \mathbb{G}_m)/k^*$ l'est si X est géométriquement intègre, par la méthode du §2.1 ci-dessous.

8) Dans le théorème 4, l'hypothèse "algébriquement fermé" est nécessaire : l'énoncé est faux en général pour une extension finie, par exemple pour $\mathbf{Q}(\sqrt{-1})/\mathbf{Q}\ldots$ En fait, pour une extension finie non triviale L/K de corps globaux, $\mathrm{Ker}(\mathrm{Br}(K) \to \mathrm{Br}(L))$ est *toujours infini* par un théorème de Fein, Kantor et Schacher [8]. Il y a de nombreux autres exemples.

9) Le théorème 4, (ii) est nettement plus élémentaire que le théorème 1 : il ne fait intervenir que le théorème de Mordell-Weil faible.

10) Dans le théorème 4, (ii) j'ignore ce qu'il advient de la p-torsion quand (par exemple) k est algébriquement clos de caractéristique p. D'autre part, supprimant toute hypothèse sur k, je ne suis pas parvenu à trouver d'exemple d'extension de type fini L/K (disons, en caractéristique zéro) avec K algébriquement fermé dans L et telle que $\mathrm{Ker}(\mathrm{Br}(K) \to \mathrm{Br}(L))$ soit infini.

Exemple 1. — Sur $k = \mathbf{F}_p(t)$, soit X la courbe projective d'équation $x^2z^{p-2} = y^p - tz^p$. Alors X est régulière sans être lisse sur k. D'après le corollaire 2, $\mathrm{Pic}(X)$ est de type fini bien que la variété de Picard de X contienne un sous-groupe unipotent non trivial.

Les ingrédients de la démonstration du théorème 1 sont les suivants :

1) Le fait, rappelé ci-dessous, que le groupe de Néron-Severi d'une variété projective lisse sur un corps algébriquement clos est de type fini.

2) L'existence de la variété de Picard d'une variété projective lisse X sur un corps k, définie sur k, "représentant" le groupe $\mathrm{Cl}^0(X) = \mathrm{Pic}^0(X)$ des classes de diviseurs algébriquement équivalents à 0.

3) Le théorème de Mordell-Weil : le groupe des points rationnels d'une variété abélienne sur un corps de nombres est de type fini.

4) Les théorèmes classiques de finitude en théorie algébrique des nombres : finitude du groupe des classes et théorème des unités de Dirichlet.

5) Des résultats de désingularisation : théorème de de Jong [17, th. 4.1] en caractéristique p et résolution des singularités de Hironaka [16] en caractéristique 0. (En caractéristique 0 on pourrait se contenter du théorème de de Jong, plus élémentaire.)

Le résultat 2) est dû à de nombreux auteurs : Matsusaka [22], Chow [4], Weil (reproduit dans Lang [18, ch. VI]) et a bien sûr été complètement réécrit par Grothendieck et ses successeurs [11] (voir aussi [2, ch. 8 et 9]) : nous n'aurons