Bull. Soc. math. France
134 (3), 2006, p. 417–445

UNE APPROCHE HILBERTIENNE DE L'HYPOTHÈSE DE RIEMANN GÉNÉRALISÉE

PAR ANNE DE ROTON

RÉSUMÉ. — En généralisant dans [9] le théorème de Beurling et Nyman à la classe de Selberg, nous avons reformulé l'hypothèse de Riemann généralisée en terme d'un problème d'approximation. Nous poursuivons ici ce travail de généralisation par l'étude d'une distance liée à ce problème. Nous donnons une minoration de cette distance, ce qui constitue une extension du travail de Burnol [7] et de celui de Báez-Duarte, Balazard, Landreau et Saias [2], travail qui concernait la fonction ζ de Riemann et que nous étendons aux fonctions de la classe de Selberg.

ABSTRACT (*An hilbertian approach of the generalised Riemann hypothesis*)

In [9], we generalised Beurling and Nyman's criterion to functions in Selberg's class and therefore gave a formulation of the generalised Riemann hypothesis as an approximation problem. We give a lower bound for the distance involved in this problem. This is an extension of the papers [7] and [2], in which the Riemann zeta function was studied whereas we study any function in Selberg's class.

1. Présentation des résultats ; historique

Le théorème de Beurling et Nyman (cf. [4]) reformule l'hypothèse de Riemann pour la fonction ζ en terme d'un problème d'approximation. On pourra consulter [3] pour un nouvel éclairage de ce théorème.

Texte reçu le 4 avril 2005, accepté le 26 octobre 2005.

ANNE DE ROTON, Institut Élie Cartan, UMR 7502, Nancy-Université, BP 239, 54506 Vandœuvre-lès-Nancy (France). • *E-mail :* deroton@iecn.u-nancy.fr

Classification mathématique par sujets (2000). — 11M41.

Mots clefs. — Hypothèse de Riemann généralisée, classe de Selberg, opérateurs, transformée de Mellin, distance hilbertienne.

Les travaux récents de Báez-Duarte, Balazard, Landreau et Saias [2] et Burnol [7] ont permis de poursuivre l'étude de ce problème d'approximation, toujours pour la fonction ζ de Riemann.

Nous avons étendu dans [9] le théorème de Beurling et Nyman aux fonctions de la classe de Selberg. Nous allons dans cet article étendre le résultat de Burnol, qui améliore le résultat de [2], à cette même classe de fonctions.

Pour cela, nous construirons des vecteurs « presque orthogonaux » (nous préciserons plus loin cette notion) indexés par les zéros de la fonction de la classe de Selberg considérée. Afin d'obtenir un résultat analogue à celui de Burnol, nous prendrons en compte la multiplicité des zéros.

Commençons par rappeler la définition de la classe de Selberg S, introduite en 1989 dans [**?**], et qui est conjecturalement l'ensemble des fonctions L de formes automorphes.

Définition 1. — On dira qu'une fonction F *appartient à la classe de Selberg* S si elle vérifie les conditions suivantes :

1) pour $\operatorname{Re} s > 1$, $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ est une série de Dirichlet absolument convergente ;
2) il existe un entier naturel m tel que $(s-1)^m F(s)$ soit une fonction entière d'ordre fini ;
3) la fonction F satisfait une équation fonctionnelle de la forme :
$$\Phi(s) = \omega\,\overline{\Phi(1-\overline{s})} \quad \text{où} \quad \Phi(s) = Q^s \Delta(s) F(s),$$
avec $\Delta(s) = \prod_{j=1}^{r} \Gamma(\lambda_j s + \mu_j)$, $\lambda_j > 0$, $\operatorname{Re}\mu_j \geq 0$, $Q > 0$ et $|\omega| = 1$;
4) pour tout $\varepsilon > 0$, $a_n = O(n^{\varepsilon})$;
5) pour $\operatorname{Re} s$ assez grand, $\log F(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n n^{-s}$ où $b_n = 0$ si n n'est pas une puissance d'un nombre premier et $b_n = O(n^{\theta})$ pour un $\theta < \frac{1}{2}$.

Notations 1. — On notera :

- $d = 2\sum_{j=1}^{r} \lambda_j$ le degré de F,
- $\mu = \sum_{j=1}^{r} (\mu_j - \frac{1}{2})$.
- $\overline{f}$ la fonction $s \mapsto \overline{f(\overline{s})}$.

Parmi les zéros d'une fonction F de la classe de Selberg, on distinguera :

• les zéros de la forme $-(n+\mu_j)/\lambda_j$, $n \in \mathbb{N}$, $j \in [1, r]$, que l'on appelera *zéros triviaux* de F ;

• les zéros de F de partie réelle égale à $\frac{1}{2}$ sont appelés *zéros critiques* de F ;

• la droite d'équation $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ sera appelée *droite critique*.

• la partie du plan constituée des points de partie réelle comprise entre 0 et 1 sera appelée *bande critique*.

Conjecture 1. — *Les zéros non triviaux de F sont de partie réelle égale à $\frac{1}{2}$.*

C'est ce que l'on appelle *hypothèse de Riemann généralisée* pour la fonction F et nous la noterons désormais (HRG).

Notons qu'en utilisant la symétrie induite par l'équation fonctionnelle, cette conjecture est équivalente à la non-annulation de la fonction F dans le demi-plan $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$.

Afin de caractériser l'hypothèse de Riemann généralisée pour une fonction F de la classe de Selberg, nous avons introduit dans [9] la fonction complémentaire associée à F.

DÉFINITION 2. — Soit F une fonction de la classe de Selberg. On définit la *fonction complémentaire* associée à F par

$$\Psi_F : \mathbb{R}^+ \longmapsto \mathbb{C}, \quad x \longmapsto \operatorname{Res}\Big(\frac{x^s}{s} F(s), 1\Big) - \sum_{n \le x} a_n.$$

On définit également la fonction $\Psi_F^{(1)}$ par

$$\Psi_F^{(1)}(x) = \Psi_F\Big(\frac{1}{x}\Big).$$

Nous avons démontré dans [9] que l'hypothèse de Riemann généralisée pour une fonction F de la classe de Selberg était équivalente à la densité d'un sous-espace de fonctions dans $L^2(0,1)$. Plus précisément, pour $\lambda > 0$, on définit le sous-espace de fonctions

$$\mathcal{B}_F^\lambda = \Big\{ f : t \mapsto \sum_{k=1}^{n} c_k \Psi_F\Big(\frac{\alpha_k}{t}\Big),\ n \in \mathbb{N}, \forall k \in [1,n],\ c_k \in \mathbb{C},\ \lambda \le \alpha_k \le 1 \Big\}.$$

Dans le cas où $\Psi_F^{(1)} \in L^2(0,+\infty)$, on définit la quantité $D(\lambda)$ comme la distance dans $L^2(0,+\infty)$ entre la fonction χ indicatrice de l'intervalle $[0,1]$ et le sous-espace $\mathcal{B}_F^\lambda$.

Le théorème que nous avons obtenu est le suivant :

THÉORÈME 1. — *Soit F une fonction de la classe de Selberg S. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1) *la fonction F vérifie l'hypothèse de Riemann généralisée ;*
2) *on a $\Psi_F^{(1)} \in L^2(0,+\infty)$ et $\lim_{\lambda\to 0} D(\lambda) = 0$.*

REMARQUE 1. — Nous avons démontré que la condition $\Psi_F^{(1)} \in L^2(0,+\infty)$ était vérifiée pour les fonctions de la classe de Selberg de degré strictement inférieur à 4 (cf. [10]).

Nous nous intéressons dans cet article à la fonction distance $D(\lambda)$ dans le cas où $\Psi_F^{(1)} \in L^2(0,+\infty)$. Le théorème que nous démontrons permet de majorer la vitesse de convergence de la fonction distance $D(\lambda)$. Plus précisément, nous obtenons le théorème suivant :

THÉORÈME 2. — *Soit F une fonction de la classe de Selberg telle que $\Psi_F^{(1)}$ appartient à $L^2(0,+\infty)$. Alors on a*

$$\lim_{\lambda\to 0} D(\lambda)\sqrt{\log\left(\frac{1}{\lambda}\right)} \geq \sqrt{\sum_\rho \frac{m_\rho^2}{|\rho|^2}}\,,$$

où la somme porte sur les zéros ρ de F dans la bande critique et m_ρ désigne la multiplicité du zéro ρ de F.

REMARQUE 2. — La majoration, donnée dans [**?**], du nombre $N(T)$ de zéros ρ d'une fonction de la classe de Selberg vérifiant $|\operatorname{Im}\rho| < T$ assure la convergence de la somme $\sum_\rho m_\rho^2/|\rho|^2$.

Ce résultat est l'analogue de celui de Burnol [7] pour la fonction ζ. Le résultat des auteurs de [2] ne faisait pas intervenir la multiplicité des zéros de la fonction ζ et était donc moins précis. Il est d'autre part notable que seuls les zéros critiques interviennent dans ce résultat alors que la démonstration du théorème de Beurling et Nyman était basée sur la question de l'existence des zéros de partie réelle supérieure à $\frac{1}{2}$.

La démonstration de notre résultat est basée sur la construction de vecteurs indexés par les zéros critiques de la fonction F de la classe de Selberg à laquelle on s'intéresse, vecteurs qui seront orthogonaux à un espace proche de $\mathcal{B}_F^\lambda$. Un calcul de transformée de Mellin permet de fournir des candidats naturels pour ces vecteurs. Cependant, ces candidats n'étant pas des vecteurs de $L^2(0,+\infty)$, nous serons amenés à les modifier de manière à conserver leur propriété d'orthogonalité tout en rendant nos calculs formels licites. Une telle modification se fera par l'application d'opérateurs de $L^2(0,+\infty)$.

Nous établirons dans le second paragraphe quelques estimations liées à l'utilisation de la formule de Stirling complexe. Nous rappelerons ensuite quelques propriétés des fonctions de Bessel, puis des opérateurs. Le cinquième paragraphe sera consacrée à l'étude de l'action d'un opérateur dit « de phase » associé à la fonction $\Psi_F^{(1)}$.

Nous construirons dans le sixième paragraphe des vecteurs indexés par les zéros de la fonction F et vérifierons leurs propriétés d'orthogonalité.

Nous démontrerons le théorème 2 dans la dernière partie. Pour cela, nous minorerons la distance $D(\lambda)$ par la norme de la projection orthogonale d'un vecteur proche de χ sur le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs que l'on viendra de construire.

Nous supposons désormais que F est une fonction de la classe de Selberg telle que $\Psi_F^{(1)} \in L^2(0,+\infty)$.

2. Quelques conséquences de la formule de Stirling complexe

Par soucis de clarté, nous regroupons dans ce paragraphe quelques estimations techniques qui proviennent de la formule de Stirling complexe. Nous utiliserons la proposition suivante dont on trouvera une démonstration dans [5] (formule (19), (VII.2.3)).

PROPOSITION 2.1. — *Il existe des constantes $c_\nu = c_\nu(a)$ telles que, pour tout $M \in \mathbb{N}$,*

$$(1)\quad \log\Gamma(s+a) = \Big(s+a-\frac{1}{2}\Big)\log s - s + \frac{1}{2}\log 2\pi + \sum_{\nu=1}^{M} c_\nu s^{-\nu} + O\Big(\frac{1}{|s|^{M+1}}\Big)$$

uniformément pour $|\arg(s)| \le \pi-\varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$ fixé et a dans un compact de $\mathbb{C}$, $|s|$ tendant vers l'infini.

2.1. Étude d'une fonction liée à l'équation fonctionnelle de *F*

NOTATIONS 2. — Si ω, Q et $\Delta(s) = \prod_{j=1}^{r}\Gamma(\lambda_j s+\mu_j)$ sont les données de F apparaissant dans l'équation fonctionnelle qu'elle vérifie, on pose

$$(2)\qquad U_F(s) = \overline{\omega}\, Q^{2s-1}\frac{\Delta(s)}{\overline{\Delta}(1-s)}\cdot\frac{s}{1-s}\cdot$$

NOTATIONS 3. — Pour $a > 0$ et $\nu \ge 0$, on pose

$$f_{a,\nu}(s) = \frac{1}{2}\Big(\frac{2}{a}\Big)^{s-\nu}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}s)}{\Gamma(\nu-\frac{1}{2}s+1)}\cdot$$

Nous allons relier la fonction U_F à la fonction $f_{a,\nu}$.

PROPOSITION 2.2. — *Si on pose pour $k=0$ ou $k=1$*

$$(3)\qquad \nu_k = 2\operatorname{Re}\mu + \frac{d}{2} + k,\ \ \beta_k = 2k-1+2\mu,\quad a = d\Big(Q^{-2}\prod_{j=1}^{r}\lambda_j^{-2\lambda_j}\Big)^{1/d},$$

alors il existe des constantes $c_{1,k}$ et $c_{2,k}$, dépendant uniquement des données de F et de k telles que, lorsque $|s|$ tend vers l'infini, on ait uniformément par rapport à s tel que $\varepsilon < |\arg s| < \pi-\varepsilon$,

$$\frac{U_F(s)}{s^{2-k}} = c_{1,k} f_{a,\nu_k}(ds+\beta_k) + c_{2,k}s^{-1} f_{a,\nu_k}(ds+\beta_k) + O\big(|f_{a,\nu_k}(ds+\beta_k)|\cdot|s|^{-2}\big).$$

Démonstration. — Dans toute la démonstration, les constantes k_i seront des constantes convenables qui ne dépendront que des données de F.