Bull. Soc. math. France
134 (4), 2006, p. 475–485

APPROXIMATION FAIBLE AUX PLACES DE BONNE RÉDUCTION SUR LES SURFACES CUBIQUES SUR LES CORPS DE FONCTIONS

PAR DAVID A. MADORE

RÉSUMÉ. — On démontre que les surfaces cubiques lisses sur les corps de fonctions d'une courbe sur un corps algébriquement clos de caractéristique 0 vérifient l'approximation faible aux places de bonne réduction. La méthode utilisée imite celle employée par Swinnerton-Dyer [10] dans le cas des corps de nombres.

ABSTRACT (*Weak approximation at places of good reduction on cubic surfaces over function fields*)

We prove that a smooth cubic surface over the field of functions of a curve on an algebraically closed field of characteristic 0 satisfies weak approximation at places of good reduction. The method used imitates that employed by Swinnerton-Dyer [10] in the case of number fields.

Introduction

Si X est une variété lisse et géométriquement connexe sur le corps de fonctions $K = k(\Gamma)$ d'une courbe sur un corps algébriquement clos k de caractéristique 0 et S un ensemble fini de places de K (identifiées à des points de Γ, supposée propre et lisse), on dit que X vérifie l'approximation faible aux places de S lorsque l'image de la flèche diagonale naturelle $X(K) \to \prod_{v\in S} X(\widehat{K}_v)$

Texte reçu le 26 août 2004, accepté le 1^er février 2005.

DAVID A. MADORE, École Normale Supérieure, 45 rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 05 (France).
E-mail : david.madore@ens.fr

Classification mathématique par sujets (2000). — 14J26, 14G05, 14H05, 11D25.

Mots clefs. — Géométrie arithmétique, surfaces cubiques, R-équivalence, approximation faible.

est dense, où $\widehat{K}_v$ est le complété de K en la place v et $X(\widehat{K}_v)$ est muni de la topologie v-adique ; si ce résultat vaut pour tout ensemble S fini de places de K, on dira tout simplement que X vérifie l'approximation faible. On renvoie à [1] pour une discussion générale de l'approximation faible sur les corps de fonctions d'une courbe.

Il est tentant de conjecturer que l'approximation faible vaut pour toute variété projective lisse et géométriquement rationnellement connexe sur K (voir [6] pour une définition du terme « rationnellement connexe » ; rappelons que les surfaces géométriquement rationnellement connexes sont les surfaces géométriquement rationnelles). Le meilleur résultat connu(1) dans cette direction est dû à Kollár, Miyaoka et Mori (cf. [6], IV.6.10), mais il ne donne qu'une version affaiblie de l'approximation (essentiellement la surjectivité sur la fibre spéciale, c'est-à-dire l'approximation à l'ordre zéro) et seulement aux places de bonne réduction. Il est également à mettre en perspective avec un résultat plus récent de Graber, Harris et Starr [2], assurant que X a toujours un K-point. Par ailleurs, on peut également remarquer que l'approximation faible vaut lorsque X est constante, c'est-à-dire provient d'une variété rationnellement connexe définie sur k (cf. [5, (4.1.2.4)]).

En des termes plus géométriques, la question revient à s'intéresser à un morphisme propre $p\colon X \to \Gamma$, dont la fibre générale est lisse et rationnellement connexe : le théorème de Graber, Harris et Starr assure que p a automatiquement une section, et celui de Kollár, Miyaoka et Mori permet alors de trouver, étant donnés un nombre fini de points dans des « bonnes » fibres (lisses et rationnellement connexes), une section passant par ces points. L'approximation faible demande à pouvoir prescrire en outre le comportement infinitésimal de la section aux points considérés.

Parmi les cas où l'on sait que l'approximation faible vaut (y compris aux places de mauvaise réduction ; cf. [1] pour une démonstration de ces différents résultats), on peut citer les surfaces lisses fibrées en coniques sur une conique, ou encore les intersections complètes lisses de deux quadriques dans $\mathbb{P}^4$, c'est-à-dire les surfaces de Del Pezzo de degré 4. (Rappelons, cf. [6, III.2.1], que toute surface projective lisse, géométriquement connexe et géométriquement rationnelle est birationnelle soit à une surface fibrée en coniques sur une conique soit à une surface de Del Pezzo de degré d, $1 \leq d \leq 9$.) Le cas des surfaces de Del Pezzo de degré $d \geq 5$ étant trivial (car elles sont K-rationnelles dès qu'elles ont un K-point, cf. [6, III.3]), le cas $d = 3$, c'est-à-dire des surfaces cubiques, apparaît comme le premier cas intéressant.

(1) Depuis, B. Hassett et Yu. Tschinkel ont obtenu le résultat général de l'approximation faible aux places de bonne réduction pour toutes les variétés (projectives, lisses) rationnellement connexes : « Weak approximation over function fields », Invent. Math., **163** (2006), pp. 171–190.

La question de savoir si l'approximation faible vaut pour une surface cubique lisse sur K, au moins aux places de bonne réduction, a été posée par J. Kollár dans son exposé au congrès européen à Budapest en juillet 1996. Le but de cet article est de répondre positivement à cette question, en prouvant le résultat suivant :

Théorème 1. — *Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique 0 et K le corps de fonctions d'une courbe Γ sur k. Soient X une surface cubique lisse sur K et $S \subset \Gamma$ un ensemble fini de places de bonne réduction (en une surface cubique lisse) de X. Alors, en notant $\widehat{K}_v$ le complété de K en un $v \in S$, l'image de la flèche naturelle $X(K) \hookrightarrow \prod_{v\in S} X(\widehat{K}_v)$ est dense (où l'image est munie du produit des topologies v-adiques).*

Dans une première partie, on démontre le résultat dans le cas où l'ensemble S est réduit à une seule place v avec l'amélioration consistant à prouver la densité v-adique de n'importe quelle classe de R-équivalence (proposition 7) ; pour cela, on commence par obtenir un résultat de surjectivité sur la fibre spéciale (proposition 4) avant d'améliorer l'approximation à n'importe quel ordre. Dans une deuxième partie, on montre comment ce résultat en une seule place permet d'obtenir l'approximation faible en n'importe quel ensemble fini de places de bonne réduction.

Les arguments utilisés ici (et notamment celui de la deuxième partie) sont inspirés de ceux employés précédemment par Swinnerton-Dyer [10] pour prouver un résultat comparable dans le cas, techniquement plus difficile, des surfaces cubiques sur les corps de nombres.

On renvoie à [9] pour les propriétés générales des surfaces cubiques.

1. Approximation en une seule place de bonne réduction

Notations et hypothèses pour la section. — Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique 0, Γ une courbe intègre sur k, qu'on peut toujours supposer propre et lisse, et $K = k(\Gamma)$ son corps des fonctions. Soit $v \in \Gamma$ une place de K, identifiée à la valuation normalisée correspondante sur K. Soient $A = \{f \in K : v(f) \geq 0\}$ l'anneau des entiers correspondant, anneau de valuation discrète dont on note $\mathfrak{m} = \{f \in K : v(f) \geq 1\}$ l'idéal maximal et π une uniformisante ($\mathfrak{m} = \pi A$) ; le corps résiduel $A/\pi A$ est canoniquement isomorphe à k. Soient $\widehat{A}$ le complété de A pour sa valuation v et $\widehat{K} = \mathrm{Frac}(\widehat{A})$ le corps des fractions de $\widehat{A}$.

Soient $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^3_A$ une surface cubique sur A dont on note $X = \mathcal{X} \times_{\mathrm{Spec}\,A} \mathrm{Spec}\,K$ la fibre générique et $Y = \mathcal{X} \times_{\mathrm{Spec}\,A} \mathrm{Spec}\,k$ la fibre spéciale. On suppose que X est lisse.

On dispose sur $\mathbb{P}^3(\widehat{K}) = \mathbb{P}^3(\widehat{A})$ de la topologique v-adique, pour laquelle un système fondamental de voisinages de $(T_0 : T_1 : T_2)$ est formé par les ensembles des $(T_0' : T_1' : T_2')$ vérifiant $v(T_i' - T_i) \geq m$ (pour $i = 0, 1, 2$) avec $m \in \mathbb{N}$. Cette topologie détermine une topologie v-adique sur $X(\widehat{K}) = \mathcal{X}(\widehat{A})$.

On se propose d'étudier la question de savoir si l'image de la flèche naturelle $X(K) \hookrightarrow X(\widehat{K})$ est dense. On aura également besoin de considérer la flèche naturelle, de spécialisation, $X(\widehat{K}) \to Y(k)$ (déduite de celle de $\mathbb{P}^3(\widehat{K}) \to \mathbb{P}^3(k)$).

Nous supposons Y lisse (i.e. v est une place de bonne réduction).

Définitions générales. — Lorsque $P \in X(K)$ est un K-point de X, de spécialisation $\widetilde{P} \in Y(k)$, on appellera $\mathcal{C}(P)$ l'intersection de $\mathcal{X}$ avec son plan tangent en P (vu comme point de $\mathcal{X}(A)$), dont la fibre générale (intersection de X avec son plan tangent en P) sera notée $C(P)$ et la fibre spéciale $\widetilde{C}(\widetilde{P})$ (intersection de Y avec son plan tangent en $\widetilde{P}$). Lorsque P (resp. $\widetilde{P}$) n'est situé sur aucune droite de X (resp. Y), la courbe cubique $C(P)$ (resp. $\widetilde{C}(\widetilde{P})$) est irréductible et a P (resp. $\widetilde{P}$) comme seul point singulier, qui est soit un point double ordinaire soit un point de rebroussement ; dans le cas contraire, $C(P)$ (resp. $\widetilde{C}(\widetilde{P})$) est, réductible, formée soit de la réunion de trois droites (éventuellement concourantes en P (resp. $\widetilde{P}$), qu'on appelle alors un « point d'Eckardt ») soit de la réunion d'une droite et d'une conique lisse.

Toujours considérant $P \in X(K)$, on peut identifier sans perte de généralité à $\mathbb{P}^2_A$ le plan tangent à $\mathcal{X}$ en P, dont on notera $(T_0 : T_1 : T_2)$ les coordonnées homogènes, et on peut supposer que P a (sur A) les coordonnées $(1 : 0 : 0)$. L'équation de $\mathcal{C}(P)$ s'écrit alors $T_0\, q(T_1, T_2) + c(T_1, T_2) = 0$, où $q \in A[T_1, T_2]$ est une forme quadratique et $c \in A[T_1, T_2]$ une forme cubique, dont on note $\widetilde{q} \in k[T_1, T_2]$ et $\widetilde{c} \in k[T_1, T_2]$ les réductions respectives. L'hypothèse selon laquelle P (resp. $\widetilde{P}$) n'est pas situé sur une droite de X (resp. Y) se traduit en le fait que q et c (resp. $\widetilde{q}$ et $\widetilde{c}$) sont non nulles et sans zéro commun.

On définit une application rationnelle explicite de $\mathbb{P}^1_A$ vers $\mathcal{C}(P)$, qui dans certaines conditions favorables (que nous précisons ci-dessous) est un paramétrage, de la façon suivante :

$$F_P \colon \mathbb{P}^1_A \dashrightarrow \mathcal{C}(P) \subset \mathbb{P}^2_A, \quad (\lambda : \mu) \mapsto \big(-c(\lambda, \mu) : \lambda q(\lambda, \mu) : \mu q(\lambda, \mu)\big).$$

Lorsque P n'est pas situé sur une droite de X (droite géométrique, c'est-à-dire définie sur la clôture algébrique de K), ce qui assure que $\mathcal{C}(P)$ est géométriquement irréductible, on a une flèche rationnelle dans l'autre direction :

$$G_P \colon \mathbb{P}^2_A \supset \mathcal{C}(P) \dashrightarrow \mathbb{P}^1_A, \quad (T_0 : T_1 : T_2) \mapsto (T_1 : T_2).$$

Pour éviter toute ambiguïté, on notera f_P et g_P (resp. $\widetilde{f}_P$ et $\widetilde{g}_P$) les restrictions de F_P et G_P à la fibre générique (resp. à la fibre spéciale).

On se permettra par ailleurs d'utiliser encore les notations ci-dessus lorsque P sera un point défini sur une extension finie K' de K ou sur $\widehat{K}$: il faudra alors bien entendu comprendre que les objets définis le seront sur K' ou $\widehat{K}$, sur la fermeture intégrale A' de A dans K' ou la complétion $\widehat{A}$, ou sur k.

On appellera $X_{\mathrm{bon}} \subseteq X$ l'ouvert de Zariski de X formé du complémentaire des droites tracées (au sens géométrique) sur X et des points P de X pour lesquels $C(P)$ a en P un point de rebroussement : autrement dit, pour $P \in X_{\mathrm{bon}}(\bar{K})$, la courbe $C(P)$ est une cubique ayant un seul point singulier, P, qui est un point double ordinaire. On appellera Y_{bon} l'ouvert correspondant pour la fibre spéciale : Y_{bon} est l'ouvert de Y dont les points $\widetilde{P} \in Y_{\mathrm{bon}}(k)$ sont ceux pour lesquels $\widetilde{C}(\widetilde{P})$ est une cubique ayant un seul point singulier $\widetilde{P}$, qui est un point double ordinaire. Un point $P \in X$ dont la spécialisation $\widetilde{P}$ est dans Y_{bon} est lui-même dans X_{bon} (en fait, $X_{\mathrm{bon}} \cup Y_{\mathrm{bon}}$ est ouvert dans $\mathcal{X}$).

Il nous faut remarquer que X_{bon} n'est pas vide (au sens géométrique) : cela peut se justifier, par exemple, en prenant un pinceau de Lefschetz de sections de X (cf. [4], théorème 2.5). Ce raisonnement (géométrique) montre aussi bien que Y_{bon} n'est pas vide, naturellement.

Le corps $K = k(\Gamma)$ est un corps C_1 au sens de Lang, ce qui implique notamment qu'il existe un point K-rationnel sur X : on peut donc choisir $P \in X(K)$. Notre but ultime est de construire un P arbitrairement proche d'un $P^* \in X(\widehat{K})$ donné (et même, vérifiant certaines conditions techniques supplémentaires qui seront explicitées plus loin), mais dans un premier temps, cherchons à montrer qu'il existe des $P \in X(K)$ se spécialisant en n'importe quel $\widetilde{P} \in Y(k)$ donné.

On sait au moins que les points K-rationnels de X sont denses au sens de Zariski, car une surface cubique est K-unirationnelle dès qu'elle possède un point K-rationnel (voir [7] ; ici, on peut aussi appliquer [9], II.12.11 et IV.30.1). À présent, prouvons le lemme suivant, qui permet de remplacer un point $P \in X_{\mathrm{bon}}(K)$ par un point dont la spécialisation est moins insalubre :

Lemme 2. — *Soit U un ouvert de Zariski non vide de X et $P \in (U \cap X_{\mathrm{bon}})(K)$. Alors pour tout point $\widetilde{Q}$* lisse *sur $\widetilde{C}(\widetilde{P})$, il existe un $Q \in (C(P) \cap U \cap X_{\mathrm{bon}})(K)$ qui se spécialise en $\widetilde{Q}$.*

Démonstration. — Soit donc $P \in (U \cap X_{\mathrm{bon}})(K)$. Alors $f_P \colon \mathbb{P}^1_K \to C(P)$, définie plus haut, est un paramétrage rationnel de $C(P)$. Soit $\widetilde{Q}$ un point lisse sur $\widetilde{C}(\widetilde{P})$ (ce qui implique notamment que $\widetilde{Q}$ est différent de $\widetilde{P}$) ; et soit $Q^* \in (C(P) \cap U \cap X_{\mathrm{bon}})(\widehat{K})$ un point qui se spécialise en $\widetilde{Q}$: un tel point existe d'après le lemme de Hensel (il n'est pas difficile de s'assurer qu'on peut le choisir dans $U \cap X_{\mathrm{bon}}$ puisqu'il ne faut pour cela éviter qu'un nombre fini de points sur $C(P)$). On pose alors $\delta^* = g_P(Q^*) \in \mathbb{P}^1(\widehat{K})$ (notons que $g_P(Q^*)$ est bien défini car Q^* est différent de P puisque déjà sa spécialisation $\widetilde{Q}$ diffère de $\widetilde{P}$). On peut choisir une suite $(\delta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{P}^1(K)$ tels que $\delta_i \to \delta^*$ (au sens de la topologie v-adique). Puisque $f_P(\delta^*) = Q^*$ (ce qui vaut car P n'est pas situé sur une droite de X), on voit qu'en posant $Q_i = f_P(\delta_i)$ (ce qui a certainement un sens pour i assez grand) on a $Q_i \to Q^*$ au sens v-adique. On peut en conclure que, pour i assez grand, la spécialisation $\widetilde{Q}_i$ de Q_i coïncide