Bull. Soc. math. France
134 (1), 2006, p. 83–117

INDICE DU NORMALISATEUR DU CENTRALISATEUR D'UN ÉLÉMENT NILPOTENT DANS UNE ALGÈBRE DE LIE SEMI-SIMPLE

PAR ANNE MOREAU

RÉSUMÉ. —L'indice d'une algèbre de Lie algébrique complexe est la codimension minimale de ses orbites coadjointes. Si $\mathfrak{g}$ est semi-simple, son indice, $\operatorname{ind}\mathfrak{g}$, est égal à son rang, $\operatorname{rg}\mathfrak{g}$. Le but de cet article est d'établir une formule générale pour l'indice de $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e)$ pour e nilpotent, où $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e)$ est le normalisateur dans $\mathfrak{g}$ du centralisateur $\mathfrak{g}^e$ de e. Plus précisément, on obtient le résultat suivant, conjecturé par D. Panyushev :

$$\operatorname{ind}\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e) = \operatorname{rg}\mathfrak{g} - \dim\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e),$$

où $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ est le centre de $\mathfrak{g}^e$. Panyushev obtient l'inégalité $\operatorname{ind}\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e) \geq \operatorname{rg}\mathfrak{g} - \dim\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ dans [8] et on montre que la maximalité du rang d'une certaine matrice à coefficients dans l'algèbre symétrique $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^e)$ implique l'autre inégalité. L'article consiste pour une large part en la preuve de la maximalité du rang de cette matrice.

Texte reçu le 19 juillet 2004, révisé le 4 mars 2005, accepté le 15 juin 2005.

ANNE MOREAU, Université Paris 7, Institut de Mathématiques de Jussieu, Théorie des groupes, Case 7012, 2 Place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05 (France)
E-mail : `moreaua@math.jussieu.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 22-04, 22E46, 22E60, 17B10, 17B20.

Mots clefs. — Indice, représentation, algèbre de Lie, normalisateur, centralisateur, élément nilpotent.

ABSTRACT (*The index of the normaliser of the centraliser of a nilpotent element in a semisimple Lie algebra*)

The index of a complex Lie algebra is the minimal codimension of its coadjoint orbits. Let us suppose $\mathfrak{g}$ semisimple, then its index, $\operatorname{ind}\mathfrak{g}$, is equal to its rank, rk $\mathfrak{g}$. The goal of this paper is to establish a simple general formula for the index of $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e)$, for e nilpotent, where $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e)$ is the normaliser in $\mathfrak{g}$ of the centraliser $\mathfrak{g}^e$ of e. More precisely, we have to show the following result, conjectured by D. Panyushev [8]:

$$\operatorname{ind}\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e) = \operatorname{rk}\,\mathfrak{g} - \dim\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e),$$

where $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ is the centre of $\mathfrak{g}^e$. Panyushev [8] obtained the inequality $\operatorname{ind}\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e) \geq \operatorname{rg}\mathfrak{g} - \dim\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ and we show that the maximality of the rank of a certain matrix with entries in the symmetric algebra $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^e)$ implies the other inequality. The main part of this paper consists of the proof of the maximality of the rank of this matrix.

Introduction

L'indice d'une algèbre de Lie algébrique complexe est la codimension minimale de ses orbites coadjointes. Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie semi-simple complexe, son indice $\operatorname{ind}\mathfrak{g}$ est égal à son rang, $\operatorname{rg}\mathfrak{g}$. Plus généralement, l'indice d'une représentation arbitraire V d'une algèbre de Lie complexe $\mathfrak{q}$ est la codimension minimale de ses orbites sous l'action contragrédiente. On le note $\operatorname{ind}(\mathfrak{q}, V)$.

Dans tout ce qui suit, $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie semi-simple complexe de groupe adjoint G. On identifie $\mathfrak{g}$ à son image par la représentation adjointe. Pour x dans $\mathfrak{g}$, on note $\mathfrak{g}^x$ son centralisateur, $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^x)$ le centre de $\mathfrak{g}^x$ et $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^x)$ le normalisateur dans $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{g}^x$. Le but de cet article est de donner une expression simple de l'indice de $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e)$, pour e un élément nilpotent de $\mathfrak{g}$. L'algèbre $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e)$ agit sur le sous-espace $\mathfrak{g}^e$ par la représentation adjointe et on établit en outre une formule pour l'indice, $\operatorname{ind}(\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e), \mathfrak{g}^e)$, du $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e)$-module $\mathfrak{g}^e$. Plus précisément, on se propose de montrer les deux résultats suivants [8, conjectures 6.1 et 6.2], conjecturés par D. Panyushev :

THÉORÈME 1. — *Soit e un élément nilpotent de $\mathfrak{g}$. Alors*

$$\operatorname{ind}\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e) = \operatorname{rg}\mathfrak{g} - \dim\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e).$$

THÉORÈME 2. — *Soit e un élément nilpotent de $\mathfrak{g}$. Alors*

$$\operatorname{ind}\big(\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e), \mathfrak{g}^e\big) = \operatorname{rg}\mathfrak{g} - \dim\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e).$$

Notons que les deux relations précédentes sont indépendantes du choix d'un représentant dans l'orbite de e sous l'action du groupe adjoint. Dans [8], D. Panyushev dresse une liste de cas où ces deux égalités sont satisfaites. Remarquons à ce propos qu'il obtient seulement les relations $\operatorname{ind}\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e) = \operatorname{ind}\mathfrak{g}^e - \dim\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ et $\operatorname{ind}(\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e), \mathfrak{g}^e) = \operatorname{ind}\mathfrak{g}^e - \dim\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$. La relation $\operatorname{ind}\mathfrak{g}^e = \operatorname{rg}\mathfrak{g}$ n'est en effet énoncée dans [8] que sous forme de conjecture (conjecture 3.2 d'Elashvili).

Cette égalité est démontrée depuis en [3, théorème 5.5]. Dans tous ses exemples, D. Panyushev obtient ces relations en montrant que le groupe $N_{\mathfrak{g}}(e)$ a une orbite ouverte dans $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)^*$, où $N_{\mathfrak{g}}(e)$ désigne le sous-groupe connexe de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e)$. Cette condition est, comme on aura l'occasion de le voir, suffisante mais ne permet pas de traiter tous les cas.

La première partie regroupe un certain nombre de résultats autour du normalisateur du centralisateur d'un élément nilpotent. On introduit en outre dans cette partie une propriété (P) qui interviendra dans la suite. On montre dans la deuxième partie que le théorème 1 est en fait une conséquence du théorème 2 et qu'obtenir l'identité du théorème 2 équivaut à montrer qu'une certaine matrice à coefficients dans l'algèbre symétrique $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^e)$ est de rang maximal. On consacre les deux parties qui suivent à la démonstration de ce dernier point dans deux cas particuliers : lorsque $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie simple classique (partie 3) et lorsque l'élément e vérifie la propriété (P) (partie 4). La troisième partie utilise des propriétes géométriques des algèbres de Lie classiques tandis que la quatrième partie repose pour une large part sur des résultats exposés dans [3] par J.-Y. Charbonnel. On étudie dans la dernière partie la propriété (P) pour achever la démonstration des théorèmes 1 et 2 dans le cas exceptionnel. La fin de la démonstration s'appuie sur des calculs explicites effectués à l'aide du logiciel GAP4. On trouve les détails de ces calculs dans [7]. Le cas de E_6, relativement simple, est tout de même présenté dans cette dernière partie.

1. Résultats préliminaires

Soit e un élément nilpotent de $\mathfrak{g}$. Puisque e est nilpotent, le théorème de Jacobson-Morosov assure l'existence de deux éléments h et f dans $\mathfrak{g}$ pour lesquels e, h, f satisfont les relations de $\mathfrak{sl}_2$-triplet :

$$[h, e] = 2e, \quad [e, f] = h, \quad [h, f] = -2f.$$

Le normalisateur $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e)$ du centralisateur $\mathfrak{g}^e$ de e est, par définition, l'ensemble des y de $\mathfrak{g}$ tels qu'on ait l'inclusion : $[y, \mathfrak{g}^e] \subset \mathfrak{g}^e$. C'est aussi le normalisateur du centre $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ de $\mathfrak{g}^e$, comme on le vérifie facilement. Le centre et le normalisateur du centralisateur d'un élément nilpotent sont étudiés dans [1] et [9]. La proposition suivante rassemble un certain nombre de propriétés du normalisateur. On en trouve une preuve dans [1], lemme 10.2, corollaire 11 et théorème 18, ou dans [9], proposition 35.4.

Proposition 1.1. — *On a les relations suivantes :*

1) $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e) = \big\{y \in \mathfrak{g} \mid [y, e] \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)\big\}$,
2) $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e) = \mathfrak{g}^e \oplus [f, \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)]$.

En particulier, $\dim \mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e) = \dim \mathfrak{g}^e + \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ *et on a* $[\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e), e] = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$.

Si $\mathfrak{u}$ est un sous-espace de $\mathfrak{g}$, on note $\mathfrak{u}^\perp$ l'orthogonal de $\mathfrak{u}$ pour la forme de Killing $\langle .,. \rangle$ de $\mathfrak{g}$. On va décrire l'orthogonal de certains sous-espaces. On a la proposition bien connue suivante dont la démonstration est rappelée en [3], lemme 5.6 :

Proposition 1.2. — *L'orthogonal de $\mathfrak{g}^e$ est le sous-espace $[e,\mathfrak{g}]$ et on a la décomposition $\mathfrak{g}^e \oplus [f,\mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$.*

Puisque ${\mathfrak{g}^f}^\perp = [f,\mathfrak{g}]$, la deuxième relation permet d'identifier le dual de $\mathfrak{g}^e$ à $\mathfrak{g}^f$ via la forme de Killing.

Soit $\widetilde{\mathfrak{g}}$ un sous-espace de $\mathfrak{g}^e$ stable par $\operatorname{ad} h$. Les sous-espaces $\mathfrak{g}^e$ et $[f,\widetilde{\mathfrak{g}}]$ ont une intersection nulle d'après la proposition 1.2 et on s'intéresse au sous-espace $\mathfrak{g}^e \oplus [f,\widetilde{\mathfrak{g}}]$ de $\mathfrak{g}$. Son orthogonal est décrit par la proposition suivante :

Proposition 1.3. — *Soit $\widetilde{\mathfrak{g}}$ un sous-espace de $\mathfrak{g}^e$ stable par $\operatorname{ad} h$, alors on a*

$$\big(\mathfrak{g}^e \oplus [f,\widetilde{\mathfrak{g}}]\big)^\perp = [e,\widetilde{\mathfrak{g}}^\perp].$$

Démonstration. — Il est clair que $\mathfrak{g}^e$ est contenu dans l'orthogonal de $[e,\widetilde{\mathfrak{g}}^\perp]$. Soit u dans $\widetilde{\mathfrak{g}}$, alors on a

$$\big\langle [f,u],[e,\widetilde{\mathfrak{g}}^\perp]\big\rangle = \big\langle \big[[f,u],e\big],\widetilde{\mathfrak{g}}^\perp\big\rangle = \big\langle -[h,u],\widetilde{\mathfrak{g}}^\perp\big\rangle = \{0\},$$

car $[h,u]$ appartient à $\widetilde{\mathfrak{g}}$, puisque $\widetilde{\mathfrak{g}}$ est stable par $\operatorname{ad} h$. On a ainsi montré que le sous-espace $\mathfrak{g}^e \oplus [f,\widetilde{\mathfrak{g}}]$ est contenu dans l'orthogonal de $[e,\widetilde{\mathfrak{g}}^\perp]$. Calculons les dimensions des deux sous-espaces :

$$\begin{aligned}
\dim\big(\mathfrak{g}^e \oplus [f,\widetilde{\mathfrak{g}}]\big)^\perp &= \dim\mathfrak{g} - \big(\dim\mathfrak{g}^e + \dim[f,\widetilde{\mathfrak{g}}]\big)\\
&= \dim\mathfrak{g} - \big(\dim\mathfrak{g}^e + \big(\dim\widetilde{\mathfrak{g}} - \dim(\widetilde{\mathfrak{g}}\cap\mathfrak{g}^f)\big)\big)\\
&= \dim\widetilde{\mathfrak{g}}^\perp - \big(\dim\mathfrak{g}^e - \dim(\widetilde{\mathfrak{g}}\cap\mathfrak{g}^f)\big),\\
\dim([e,\widetilde{\mathfrak{g}}^\perp]) &= \dim\widetilde{\mathfrak{g}}^\perp - \dim(\widetilde{\mathfrak{g}}^\perp\cap\mathfrak{g}^e).
\end{aligned}$$

Il résulte de la démonstration du lemme 5.6 de [3] que l'on a la décomposition $\widetilde{\mathfrak{g}} = \widetilde{\mathfrak{g}}\cap{\mathfrak{g}^e}^\perp \oplus \widetilde{\mathfrak{g}}\cap\mathfrak{g}^f$. De plus, on a :

$$\begin{aligned}
\dim(\widetilde{\mathfrak{g}}\cap{\mathfrak{g}^e}^\perp) &= \dim\mathfrak{g} - \dim(\widetilde{\mathfrak{g}}^\perp + \mathfrak{g}^e)\\
&= \dim\mathfrak{g} - \big(\dim\widetilde{\mathfrak{g}}^\perp + \dim\mathfrak{g}^e - \dim(\widetilde{\mathfrak{g}}^\perp\cap\mathfrak{g}^e)\big)\\
&= \dim\widetilde{\mathfrak{g}} - \dim\mathfrak{g}^e + \dim(\widetilde{\mathfrak{g}}^\perp\cap\mathfrak{g}^e)\cdot
\end{aligned}$$

De cette égalité et de la décompostion précédente, on déduit la relation

$$\dim\widetilde{\mathfrak{g}} = \big(\dim\widetilde{\mathfrak{g}} - \dim\mathfrak{g}^e + \dim(\widetilde{\mathfrak{g}}^\perp\cap\mathfrak{g}^e)\big) + \dim(\widetilde{\mathfrak{g}}\cap\mathfrak{g}^f),$$

ce qui donne $\dim(\widetilde{\mathfrak{g}}^\perp\cap\mathfrak{g}^e) = \dim\mathfrak{g}^e - \dim(\widetilde{\mathfrak{g}}\cap\mathfrak{g}^f)$. Par suite les deux sous-espaces $\mathfrak{g}^e \oplus [f,\widetilde{\mathfrak{g}}]$ et $[e,\widetilde{\mathfrak{g}}^\perp]$ sont de même dimension et la proposition s'ensuit. □

À l'aide de la proposition précédente, on retrouve l'orthogonal de sous-espaces connus. Lorsque le sous-espace $\widetilde{\mathfrak{g}}$ est nul, on retrouve l'orthogonal de $\mathfrak{g}^e$. D'après [8, théorème 2.4], on dispose de la décomposition $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e) \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^f] = \mathfrak{g}$. On en déduit que l'orthogonal de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ est le sous-espace $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^e]$. La proposition précédente appliquée à $\widetilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^\xi)$ permet alors de décrire l'orthogonal de $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e)$:

$$\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e)^\perp = \big(\mathfrak{g}^e \oplus \big[f, \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)\big]\big)^\perp = \big[e, [\mathfrak{g}^e, \mathfrak{g}]\big].$$

On a utilisé la proposition 1.1 pour la première égalité. Enfin, la proposition 1.2 et la proposition précédente, appliquées à $\widetilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}^e$, donnent l'orthogonal du sous-espace $\mathfrak{g}^e \oplus [f, \mathfrak{g}^e]$. Ce dernier sous-espace interviendra à plusieurs reprises dans la suite. On a

$$\big(\mathfrak{g}^e \oplus [f, \mathfrak{g}^e]\big)^\perp = \big[e, [e, \mathfrak{g}]\big].$$

On termine cette partie par l'introduction d'une propriété (P) :

Définition 1.4. — On note $\mathfrak{z}_{\max}$ le sous-espace propre de la restriction de $\operatorname{ad} h$ à $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ relativement à sa plus grande valeur propre. On dira que *e vérifie la propriété (P)* si, pour tout élément non nul v de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$, le sous-espace $\mathfrak{z}_{\max}$ est contenu dans le sous-espace $[[f, \mathfrak{g}^e], v]$.

Il est clair que si e vérifie la propriété (P), il en est de même de tous les éléments de l'orbite de e sous l'action du groupe adjoint. On dira qu'une orbite nilpotente de $\mathfrak{g}$ *vérifie la propriété* (P) si l'un de ses représentants la vérifie.

2. Rappels sur l'indice d'une algèbre de Lie et premières réductions

Soit $\mathfrak{q}$ une algèbre de Lie complexe et ϕ une forme linéaire sur $\mathfrak{q}$. On désigne par $\mathfrak{q}_\phi$ l'ensemble des s de $\mathfrak{q}$ tels que $\phi([\mathfrak{q}, s]) = 0$. Autrement dit,

$$\mathfrak{q}_\phi = \big\{s \in \mathfrak{q} \mid (\operatorname{ad}^* s) \cdot \phi = 0\big\},$$

où $\operatorname{ad}^* : \mathfrak{q} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{q}^*)$ est la représentation coadjointe de $\mathfrak{q}$. On rappelle que l'*indice de* $\mathfrak{q}$, noté $\operatorname{ind} \mathfrak{q}$, est défini par

$$\operatorname{ind} \mathfrak{q} = \min_{\phi \in \mathfrak{q}^*} \dim \mathfrak{q}_\phi.$$

L'indice d'une algèbre de Lie $\mathfrak{q}$ ainsi défini est un entier lié à la représentation adjointe de $\mathfrak{q}$. Une méthode similaire, appliquée à une représentation de $\mathfrak{q}$ arbitraire, permet de définir l'*indice d'une représentation.* Soit $\rho : \mathfrak{q} \to \mathfrak{gl}(V)$ une représentation de $\mathfrak{q}$. On note, de manière abusive, $s \cdot v$ à la place de $\rho(s)v$, pour s dans $\mathfrak{q}$ et v dans V. De même, pour ϕ dans le dual V^* de V et pour s dans $\mathfrak{q}$, on note $s \cdot \phi$ au lieu de $\rho^*(s)\phi$ où ρ^* est la représentation contragrédiente à ρ. L'entier

$$\dim V - \max_{\phi \in V^*} (\dim \mathfrak{q} \cdot \phi)$$

est appelé l'*indice de V* ou *l'indice du $\mathfrak{q}$-module V*. On le note $\operatorname{ind}(\rho, V)$ ou $\operatorname{ind}(\mathfrak{q}, V)$ et il est clair que $\operatorname{ind}(\operatorname{ad}, \mathfrak{q}) = \operatorname{ind} \mathfrak{q}$ au sens précédent.