Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

NOMBRE DE POINTS VISITÉS SUR UN AMAS DE PERCOLATION

Clément Rau

Tome 135
Fascicule 1

2007

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

pages 1-

Bull. Soc. math. France
135 (1), 2007, p. 135–

SUR LE NOMBRE DE POINTS VISITÉS PAR UNE MARCHE ALÉATOIRE SUR UN AMAS INFINI DE PERCOLATION

PAR CLÉMENT RAU

RÉSUMÉ. — On s'intéresse à une marche aléatoire simple sur un amas infini issu d'un processus de percolation surcritique sur les arêtes de $\mathbb{Z}^d$ $(d \geq 2)$ de loi Q. On montre que la transformée de Laplace du nombre de points visités au temps n, noté N_n, a un comportement similaire au cas où la marche évolue dans $\mathbb{Z}^d$. Plus précisément, on établit que pour tout $0 < \alpha < 1$, il existe des constantes C_i, $C_s > 0$ telles que pour presque toute réalisation de la percolation telle que l'origine appartienne à l'amas infini et pour n assez grand,

$$\mathrm{e}^{-C_i n^{d/(d+2)}} \leq \mathbb{E}_0^\omega(\alpha^{N_n}) \leq \mathrm{e}^{-C_s n^{d/(d+2)}}.$$

Le point principal du travail réside dans l'obtention de la borne supérieure. Notre approche consiste dans un premier temps, à trouver une inégalité isopérimétrique sur l'amas infini, et dans un deuxième temps à la remonter sur un produit en couronne, ce qui nous permet alors d'obtenir une majoration de la probabilité de retour d'une certaine marche sur ce produit en couronne. L'introduction d'un produit en couronne est justement motivée par le fait que la probabilité de retour sur un tel graphe s'interprète comme l'espérance de la transformée de Laplace du nombre de points visités.

Texte reçu le 24 avril 2006, révisé le 12 septembre 2006

CLÉMENT RAU, Laboratoire d'Analyse, de Topologie et de Probabilités, Centre de Mathématiques et d'Informatique, 39, rue F. Joliot Curie, 13453 Marseille Cedex 13 (France)
E-mail : `rau@cmi.univ-mrs.fr` • *Url :* `http://www.cmi.univ-mrs.fr/~rau/`

Classification mathématique par sujets (2000). — 60J10, 60K35.

Mots clefs. — Inégalité isopérimétrique, nombre de points visités, percolation, produit en couronne.

ABSTRACT (*On the number of distinct visited sites by a random walk on the infinite cluster of the percolation model*)

We consider random walk on the infinite cluster of the percolation model on the edges of $\mathbb{Z}^d$ ($d \geq 2$) with law Q, in the surcritical case. We prove that the Laplace transformation of the number of visited sites up to time n, called N_n, has the same behaviour as the random walk on $\mathbb{Z}^d$. More precisely, we show for all $0 < \alpha < 1$, there exists some constants C_i, $C_s > 0$ such that for almost all realisations of the percolation such that the origin belongs to the infinite cluster and for large enough n,

$$\mathrm{e}^{-C_i n^{d/(d+2)}} \leq \mathbb{E}_0^\omega(\alpha^{N_n}) \leq \mathrm{e}^{-C_s n^{d/(d+2)}}.$$

The main work is to get the upper bound. Our approach is based, first on finding an isoperimetric inequality on the infinite cluster and secondly to lift it on a wreath product, which enables us to get an upper bound of the return probability of a particular random walk. The introduction of a wreath product is motivated by the fact that the return probability on such graph is linked to the Laplace transform of distinct visited sites.

1. Introduction et résultats

Soit $d \geq 2$. On appelle *percolation de Bernoulli de paramètre* p le sous-graphe aléatoire de la grille de dimension d obtenu en supprimant (resp. gardant) une arête avec probabilité p (resp. $1-p$) de façon indépendante pour les différentes arêtes. On notera ω une réalisation typique de la percolation. On appelle alors amas infini une composante connexe infinie du graphe ω. On montre qu'une telle composante connexe infinie existe et est presque sûrement unique si le paramètre p est choisi au-dessus d'une certaine valeur critique p_c. Une construction plus formelle de la percolation est donnée plus loin dans cette introduction.

La percolation est un modèle important de la mécanique statistique des milieux desordonnés, un « concept unificateur » pour reprendre l'expression de P.-G. De Gennes [5], qui intervient aussi dans de nombreuses applications, par exemple dans les problèmes de diffusion dans un environnement non homogène que l'on rencontre dans la recherche pétrolière. Depuis son introduction en 1956 par J.M. Hammersley, la percolation a également donné lieu à une jolie théorie mathématique qui recèle encore bien des défis. Nous renvoyons aux livres de Kesten et Grimmett (voir [10] et [9]) pour une introduction aux outils mathématiques de la percolation. On y trouvera en particulier de nombreux résultats sur la géométrie des amas infinis.

Depuis quelques années, différents auteurs se sont attachés à développer la théorie du potentiel des amas infinis ou, en d'autres termes, à décrire le comportement d'une marche aléatoire évoluant sur un amas infini (la « fourmi dans un labyrinthe » pour reprendre une autre expression de P.-G. De Gennes). Les premières bornes sur le noyau de la chaleur sur un amas infini ont été demontrées par P. Mathieu et E. Rémy [13] à l'aide d'estimées du profil isopérimétrique d'un amas infini. Puis, M. Barlow [2] a obtenu des estimées de type gaussien. Ces premiers résultats ont ensuite permis de prouver la convergence de la marche aléatoire vers un mouvement brownien sous la forme d'un principe d'invariance valable pour presque toute réalisation de ω, voir [17, 3, 12].

L'objet du travail présenté ici est de compléter ce panorama en donnant des estimées précises sur le nombre de points visités par la marche aléatoire simple symétrique évoluant sur un amas infini.

Le processus de percolation est défini de la manière suivante. Pour $d \geq 2$, notons E^d l'ensemble des arêtes de $\mathbb{Z}^d$ défini par,

$$E^d = \Big\{(x,y)\ ;\ \sum_{i=1}^{d} |x_i - y_i| = 1\Big\},$$

où $x = (x_1, \dots, x_d)$ et $y = (y_1, \dots, y_d)$. Pour $p \in \,]0,1]$, soit ω le sous-graphe aléatoire de $\mathcal{L}^d := (\mathbb{Z}^d, E^d)$ obtenu en gardant (resp. effaçant) une arête avec probabilité p (resp. $1-p$) de manière indépendante pour les différentes arêtes de E^d. On identifie ce sous-graphe de $\mathbb{Z}^d$ avec l'application $\omega : E^d \to \{0,1\}$ telle que $\omega(x,y) = 1$ si l'arête (x,y) est présente dans ω (on dira qu'une telle arête est *ouverte*) et $\omega(x,y) = 0$ sinon. On munit $\{0,1\}^{E^d}$ de la mesure de probabilité Q sous laquelle les variables aléatoires $(\omega(e), e \in \mathbb{E}^d)$ sont indépendantes et suivent des lois de Bernoulli(p). Soit $\mathcal{C}$ la composante connexe de ω contenant l'origine, $|\mathcal{C}|$ son cardinal et p_c la probabilité critique,

$$p_c = \sup\big\{p\ ;\ Q(|\mathcal{C}| = +\infty) = 0\big\}.$$

On sait que $0 < p_c < 1$ (voir [9]) et on suppose désormais que $p > p_c$. On se place sur l'évènement $\{|\mathcal{C}| = +\infty\}$; $\mathcal{C}$ est alors l'unique amas infini. On considère alors sur $\mathcal{C}$ la marche aléatoire suivante : $X_0 = x$ et X_{n+1} est choisi uniformément parmi les voisins de X_n dans $\mathcal{C}$, *i.e.*

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_n = x) = \frac{\omega(x,y)}{\sum_{z;(x,z)\in E^d} \ \omega(x,z)}.$$

Le but de cet article est d'estimer le nombre de points visités par la marche X. Plus précisément, posons :

- $N_n = |\{X_0, X_1, \dots, X_n\}|$,
- $\mathbb{P}_x^\omega$ la loi de la marche issue de x,
- $\mathbb{E}_x^\omega$ son espérance.

Le principal résultat est :

Théorème 1.1. — *Pour tout $\alpha \in \,]0,1[$, il existe deux constantes $C_i, C_s > 0$ telles que Q p.s. sur l'évènement $|\mathcal{C}| = +\infty$, et pour n assez grand,*

$$\mathrm{e}^{-C_i n^{d/(d+2)}} \leq \mathbb{E}_0^\omega(\alpha^{N_n}) \leq \mathrm{e}^{-C_s n^{d/(d+2)}}.$$

Remarque 1.2. — Ce résultat est également valide pour la marche aléatoire à temps continu qui attend un temps exponentiel entre chaque saut.

Dans le cas où $\omega = \mathcal{L}^d$ cette expression a déjà été étudiée par M.D. Donsker et S.R.S Varadhan [6]. Ils prouvent, en particulier pour la marche aléatoire simple sur la grille $\mathbb{Z}^d$, le théorème suivant :

Théorème 1.3 (voir [6]). — *Il existe une constante* $c(d,\alpha) > 0$ *telle que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{d/(d+2)}} \log \mathbb{E}_0^{\mathbb{Z}^d}(\alpha^{N_n}) = -c(d,\alpha)$$

Ce résultat est prouvé par double inégalité. La stratégie adoptée dans la preuve de M.D. Donsker et S.R.S Varadhan, pour obtenir une majoration de l'expression $\lim_{n\to\infty} n^{-d/(d+2)} \log \mathbb{E}_0^{\mathbb{Z}^d}(\alpha^{N_n})$, ne semble pas se généraliser dans un amas infini de percolation pour plusieurs raisons. Par exemple, la symétrie de $\mathbb{Z}^d$ est un point crucial dans leur preuve, qui n'est évidemment pas satisfait dans un amas. En particulier, la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$ satisfait une propriété de martingale qui n'est plus vraie pour la marche aléatoire sur l'amas de percolation.

La méthode developpée ici repose sur le fait suivant : $\mathbb{E}_0^{\omega}(\alpha^{N_n})$ peut s'écrire comme une probabilité de retour à l'origine d'une marche Z construite à partir de X dans un graphe plus « gros » que $\mathcal{C}$, qui sera un produit en couronne. Trouver une borne supérieure de $\mathbb{E}_0^{\omega}(\alpha^{N_n})$ revient donc à trouver une borne supérieure de la probabilité de retour de la marche Z. On sait que les inégalités isopérimétriques sont un outil important pour prouver des inégalités fonctionnelles comme celles de Poincaré ou de Nash, qui elles mêmes, permettent d'obtenir des bornes supérieures du noyaux d'une marche simple (voir [4]). On étudie donc le profil isopérimétrique sur ce produit en couronne. Grâce aux récents travaux d'A. Erschler, on sait contrôler l'isopérimétrie du produit en couronne de deux graphes à partir de l'isopérimétrie de chacun d'entre eux. Ici, un des deux graphes étant le graphe ayant comme ensemble de points $\mathcal{C}$, on est finalement ramené à étudier de manière assez fine la géométrie d'un amas et ses propriétés isopérimétriques. Notons $\mathcal{B}_n = [-n;n]^d$ et $\mathcal{C}_n$ la composante connexe de $\mathcal{C} \cap \mathcal{B}_n$ contenant l'origine. Avec des techniques similaires à celles de [13], on prouve la propriété suivante.

Proposition 1.4. — *Soient* $\gamma > 0$ *et* $p > p_c$. *Il existe* $\beta > 0$ *tel que pour tout* $c > 0$, Q *p.s. sur* $\#\mathcal{C} = +\infty$, *pour* n *assez grand, on ait,*

$$\frac{|\partial_{\mathcal{C}^g} A|}{f_c(|A|)} \geq \beta \text{ pour tout sous-ensemble } A \text{ connexe de } \mathcal{C}_n, \tag{1}$$