Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

COHOMOLOGIE DES FIBRÉS EN DROITES

Alexis Tchoudjem

Tome 135
Fascicule 2

2007

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

pages 1-

Bull. Soc. math. France
135 (2), 2007, p. 171–

COHOMOLOGIE DES FIBRÉS EN DROITES SUR LES VARIÉTÉS MAGNIFIQUES DE RANG MINIMAL

PAR ALEXIS TCHOUDJEM

RÉSUMÉ. — Le théorème de Borel-Weil-Bott décrit la cohomologie des fibrés en droites sur les variétés de drapeaux. On généralise ici ce théorème à une plus grande classe de variétés projectives : les variétés magnifiques de rang minimal.

ABSTRACT (*Cohomology of line bundles over wonderful varieties of minimal rank*)
The Borel-Weil-Bott theorem describes the cohomology of line bundles over flag varieties. Here, one generalizes this theorem to a wider class of projective varieties : the wonderful varieties of minimal rank.

Introduction

On se place sur un corps $\boldsymbol{k}$ algébriquement clos de caractéristique nulle et on considère un groupe linéaire G semi-simple et connexe sur $\boldsymbol{k}$.

Texte reçu le 30 novembre 2005, révisé le 6 mars 2007

ALEXIS TCHOUDJEM, Institut Camille Jordan, Université Claude Bernard Lyon I, Boulevard du Onze Novembre 1918, 69622 Villeurbanne (France)
E-mail : `Alexis.Tchoudjem@math.univ-lyon1.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 14F10, 14F17, 14L40, 14M15, 17B10.

Mots clefs. — Théorème de Borel-Weil-Bott, cohomologie à support, variétés sphériques, variétés magnifiques, variétés de drapeaux, complexe de Grothendieck-Cousin, cohomologie des fibrés en droites, modules de Verma.

On se donne une variété projective X munie d'une action de G et un fibré en droites [(1)] $\pi : L \to X$. On suppose que π est G-linéarisé, *i.e.* G agit sur L, π est G-équivariant et l'action de G est linéaire dans les fibres de π.

La suite des groupes de cohomologie $H^d(X, L)$ ($d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) forme alors une suite de représentations de dimension finie du groupe G.

Quelles sont ces représentations du groupe G ?

En degré $d = 0$, c'est-à-dire pour l'espace des sections globales, on trouve dans [5] une description complète pour le cas où la variété X est *sphérique* (*i.e.* normale et avec une orbite ouverte d'un sous-groupe de Borel de G). Mais, en degré d quelconque, il n'y a pas de réponse dans un cadre aussi vaste.

Néanmoins, lorsque X est homogène, autrement dit une variété de drapeaux, il y a le théorème de Borel-Weil-Bott qui décrit très simplement les groupes de cohomologie $H^d(X, L)$: ils sont tous nuls sauf au plus en un degré, où l'on obtient une représentation irréductible de G.

On a aussi une description explicite dans le cas des compactifications de groupes (*i.e.* des compactifications de l'espace homogène $K \times K/K$ pour un groupe semi-simple K), *cf.* [18] et [29].

Le but de cet article est de généraliser le théorème de Borel-Weil-Bott à la classe des *variétés magnifiques de rang minimal*. Celles-ci ont été introduites dans [14] et [22] ; d'après [22], elles sont toutes sphériques. Les variétés magnifiques de rang minimal sont particulièrement étudiées dans [24]. Cette classe de variétés, dont nous rappellerons la définition, comprend notamment les variétés de drapeaux et les compactifications magnifiques au sens de [14] des espaces homogènes $K \times K/K$ (K est un groupe adjoint), $\mathrm{PGL}_{2n} / \mathrm{PSp}_{2n}$, E_6/F_4.

Afin d'obtenir la description des groupes de cohomologie des fibrés en droites sur une variété X magnifique et de rang minimal, on utilise une décomposition de X en cellules de Bialynicki-Birula. On fait ensuite intervenir un complexe de Grothendieck-Cousin qui met en jeu des groupes de cohomologie à support. Si on note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G, ces groupes de cohomologie à support sont naturellement des $\mathfrak{g}$-modules. L'étude de ces $\mathfrak{g}$-modules et de la décomposition cellulaire de la variété X se trouve simplifiée quand on se place dans le cadre des variétés magnifiques de rang minimal. Et cela suffit pour arriver au résultat.

Cette méthode est celle utilisée dans [18] et [29] pour obtenir, pour chaque groupe adjoint K, la cohomologie des fibrés en droites sur la compactification de l'espace homogène $K \times K/K$. On ajoute ici l'étude de certaines courbes irréductibles sur la variété X (*cf.* les sections 9 et 10) et cela permet de traiter ensemble les cas de toutes les variétés magnifiques de rang minimal.

Avant d'énoncer le théorème principal (le théorème 3.1) de cet article, on va introduire quelques notations et rappeler quelques définitions.

(1) En fait, on raisonnera plutôt avec des faisceaux inversibles.

1. Notations concernant le groupe

Soit G un groupe algébrique linéaire semi-simple connexe et simplement connexe sur $\boldsymbol{k}$, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On choisit B un de ses sous-groupes de Borel et T un tore maximal de B ; on appelle B^- le sous-groupe de Borel opposé à B, relativement à T (*i.e.* tel que $B^- \cap B = T$). Soient Φ et W le système de racines et le groupe de Weyl de (G, T). Pour toute racine $\alpha \in \Phi$, on note $\alpha^\vee : \boldsymbol{k}^* \to T$ la coracine correspondante. On notera Φ^+ l'ensemble des racines positives relativement à B, ρ la demi-somme des racines positives, et, si $w \in W$, on pose

$$w * \lambda := w(\lambda + \rho) - \rho$$

pour tout caractère λ de T. Soient Δ la base de Φ définie par B et ℓ la fonction longueur correspondante sur W.

Soit $\mathfrak{X}$ le réseau des caractères de T. Étant donnés un caractère λ de T et un sous-groupe à un paramètre $\nu : \boldsymbol{k}^* \to T$, on notera $\langle \lambda, \nu \rangle$ l'unique entier tel que

$$\forall s \in \boldsymbol{k}^*, \quad \lambda\big(\nu(s)\big) = s^{\langle \lambda, \nu \rangle}.$$

On dira qu'un caractère λ de T est *dominant* si $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \geq 0$ pour toute racine positive $\alpha \in \Phi^+$, et qu'il est *régulier* si $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \neq 0$ pour toute racine positive $\alpha \in \Phi^+$.

Soit $(\omega_\delta)_{\delta \in \Delta}$ la base des poids fondamentaux ; elle est formée des caractères de T qui vérifient

$$\forall \delta, \epsilon \in \Delta, \quad \langle \omega_\delta, \epsilon^\vee \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } \delta = \epsilon, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Lorsque λ est un caractère de T tel que $\lambda + \rho$ est régulier, il existe un unique $w_\lambda \in W$ tel que $w_\lambda * \lambda$ est un caractère dominant. Dans ce cas,

- on note $\lambda^+ := w_\lambda * \lambda$ ce poids dominant et
- on pose $\ell(\lambda) := \ell(w_\lambda)$.

Pour tout caractère dominant λ de T, on note $L(\lambda)$ le G-module irréductible de plus haut poids λ.

Enfin, on note $(.,.)$ un produit scalaire W-invariant sur $\mathfrak{X} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

2. Variétés magnifiques

Suivant [22], une variété algébrique X munie d'une action du groupe G est appelée *magnifique* si :

1) X est lisse et complète ;

2) G possède une orbite dense X_G^0 dans X dont le bord $X \backslash X_G^0$ est une réunion de diviseurs premiers D_i, $i \in \{1, \dots, r\}$, lisses, à croisements normaux et d'intersection non vide ;
3) pour tous points $x, x' \in X$, si $\{i : x \in D_i\} = \{i : x' \in D_i\}$, alors on a $G \cdot x = G \cdot x'$.

En fait, la G-variété X est entièrement déterminée par son orbite ouverte X_G^0. On dit aussi que X est la *compactification magnifique* de l'espace homogène X_G^0.

Dans le point 2) de la définition, les D_i sont les *diviseurs limitrophes* de X et l'entier r est le *rang* de la variété magnifique X. La variété magnifique X a exactement 2^r orbites de G dont une seule est fermée. Nous noterons F cette orbite.

Par exemple, les variétés magnifiques de rang 0 sont les variétés de drapeaux G/P où P est un sous-groupe parabolique de G. Une autre famille de variétés magnifiques est formée par les compactifications magnifiques de groupes adjoints construites dans [14, § 3.4]. Dans ce cas le rang r est le rang du groupe.

Les variétés de drapeaux et les compactifications de groupes font partie d'une classe commune de variétés magnifiques : les *variétés magnifiques de rang minimal.* Nous rappelons leur définition ci-dessous.

2.1. Variétés magnifiques de rang minimal. — Soit X une G-variété magnifique. L'orbite ouverte de G dans X est isomorphe à l'espace homogène G/H où H est un sous-groupe fermé de G. Le rang de X vérifie toujours

$$r \geq \operatorname{rang}(G) - \operatorname{rang}(H)$$

(où le rang d'un groupe est la dimension de ses tores maximaux)

Définition 1. — On dit que X est une *variété magnifique de rang minimal* lorsque $r = \operatorname{rang}(G) - \operatorname{rang}(H)$.

Il résulte de la classification de N. Ressayre [24] que toutes les variétés magnifiques de rang minimal s'obtiennent par produit, par recouvrement fini ou par induction parabolique (*cf.* [23, § 3.4] ou la définition 7) à partir des variétés de drapeaux et des compactifications magnifiques des espaces homogènes

- $K \times K/K$ pour un groupe K adjoint ;
- $\mathrm{PGL}_{2n} / \mathrm{PSp}_{2n}$, $n \geq 2$;
- E_6/F_4 ;
- $\mathrm{PSO}_{2n} / \mathrm{PSO}_{2n-1}$;
- SO_7 / G_2.

(Pour se ramener au cas simplement connexe, les compactifications de ces espaces homogènes sont munies de l'action du revêtement universel de G.)