Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

ESTIMATIONS DE LA FONCTION MAXIMALE DE HARDY-LITTLEWOOD

Noël Lohoué

Tome 135
Fascicule 3

2007

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 1-

Bull. Soc. math. France
135 (3), 2007, p. 323–

ESTIMATIONS DE LA FONCTION MAXIMALE DE HARDY-LITTLEWOOD

PAR NOËL LOHOUÉ

RÉSUMÉ. — On montre que la fonction maximale de Hardy-Littlewood est de type (p, p) sur certains groupes de Lie et variétés de Cartan-Hadamard.

ABSTRACT (*Estimations of the maximal Hardy-Littlewoord function*)
We prove L^p boundness of Hardy-Littlewood maximal functions on a class of Lie groups and Cartan-Hadamard manifolds.

1. Introduction

On se donne un espace métrique M muni d'une distance δ et d'une mesure $\mathrm{d}\sigma$ qui charge les boules de M de centre arbitraire et de rayon quelconque d'une masse finie. Si $f : M \to \mathbb{C}$ est une fonction $\mathrm{d}\sigma$ mesurable, on s'intéresse à la fonction f^* définie par

$$f^*(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B_x(r)|} \int_{B_x(r)} \big|f(y)\big| \mathrm{d}\sigma(y)$$

où $B_x(r)$ désigne la boule, au sens de δ, de centre x et de rayon r, $|B_x(r)|$ sa mesure.

Texte reçu le 25 octobre 2005, révisé le 19 décembre 2006

NOËL LOHOUÉ, Université de Paris-Sud, Mathématique, bât. 425, UMR 8628 du CNRS, 91405 Orsay Cedex (France) • *E-mail :* `noel.lohoue@math.u-psud.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 22E80 ; 43A90, 60B90.

Mots clefs. — Fonction maximale.

© Société Mathématique de France

On voudrait prouver des estimations du style, pour $1 < p < \infty$, il existe une constante $C(p)$ telle que

$$\|f^*\|_p \leq C(p)\|f\|_p.$$

Ceci est un vieux thème et l'on sait bien que cette inégalité ne peut pas être prouvée en toute généralité pour tout triplet $(M, \delta, \mathrm{d}\sigma)$.

On s'intéresse dans cet article à deux situations particulières où l'on veut utiliser la géométrie de $(M, \delta, \mathrm{d}\sigma)$ pour donner une réponse positive à la question ci-dessous.

a) M est un groupe de Lie non moyennable, la distance δ est la distance de contrôle associée à un système de champs de Hörmander invariants à gauche et $\mathrm{d}\sigma$ est la mesure de Haar sur G, bi-invariante.

b) M est une variété de Cartan Hadamard avec quelques contraintes sur la courbure ; la distance associée sur M est la distance riemannienne et la mesure est induite par cette structure.

Ces deux exemples ont on point commun ; le volume des boules de grand rayon croît exponentiellement, ce qui rend toutes les techniques usuelles inutilisables : on ne peut faire appel au lemme de recouvrement que pour les boules de rayon plus petit qu'un nombre donné. Par contre, si M est à courbure de Ricci positive ou nulle, on sait qu'alors M est un espace de nature homogène et on a droit à tout.

L'énoncé général suivant indique la direction que l'on veut suivre.

PROPOSITION 1. — *Soit $(M;\delta)$ un espace métrique muni d'une mesure* $\mathrm{d}\sigma$ *comme décrit ci-dessus. On suppose qu'il existe une constante $0 < C < \infty$ telle que pour tout couple de point (x, y),*

$$C^{-1} < \frac{|B_x(r)|}{|B_y(r)|} < C \quad \textit{et} \quad \big|B_x(2r)\big| < C\big|B_x(r)\big|,$$

pour $0 < r < 1$. Soit 0 un point distingué de M. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe pour tout $1 < p < \infty$, une constante $C_\varepsilon(p)$ telle que

$$\Big\| \Big(1 + |B_0(\widetilde{\delta})|\Big)^{-\varepsilon} f^* \Big\|_p \leq C_\varepsilon(p)\|f\|_p\,.$$

où $\widetilde{\delta}$ est la fonction $\widetilde{\delta}(x) = \delta(x, 0)$.

Les deux résultats sur lesquels on veut s'attarder sont indiqués ci-dessous.

REMARQUE. — La proposition 1 s'applique si G est un groupe unimodulaire, δ une métrique invariante à gauche sur G et $\mathrm{d}\sigma$ la mesure de Haar. Dans le premier résultat on va essayer d'enlever ε pour un cas particulier. Pour énoncer ce premier résultat que l'on veut démontrer on aura besoin de quelques notations.

Notations. — Soit G un groupe de Lie connexe, unimodulaire, non compact, non moyennable. On note

$$G = H \circledS G_0$$

sa décomposition de Levi. On suppose que la partie résoluble distinguée H de G est unimodulaire, à croissance polynomiale, de dimension D à l'infini (voir [9] pour la notion de dimension à l'infini). On suppose aussi que la partie semi-simple G_0 est de centre fini, connexe, de dimension topologique m_0.

On note $\mathcal{G}$ l'algèbre de Lie de G, $\mathcal{H}$ celle de H, $\mathcal{G}_0$ celle de G_0 et σ la représentation de $\mathcal{G}_0$ sur $\mathcal{H}$. Alors $\mathcal{H} = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathcal{H}_i$ où $\sigma_{|\mathcal{H}_i} = \sigma_i$ est une sous-représentation irréductible de $\mathcal{G}_0$ et de poids $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{m_{i,1}}$, m_i. On pose

$$\Theta = \sum_{\substack{i=1\\ j=1}}^{m,m_i} m_{ij}\alpha_{ij}$$

Par la suite on va considérer une distance de contrôle associée à un système de Hörmander particulier pour des simples raisons d'exposition. La considération d'un système général alourdirait considérablement le texte sans simplifier la compréhension des idées développées.

Notons $\mathcal{G}_0 = k_0 \oplus p_0$ une décomposition de Cartan de $\mathcal{G}_0$, K_0 le sous-groupe compact maximal associé à k_0. On considère sur p_0 une base orthonormée pour le produit scalaire $\langle X, Y\rangle_0 = -B(X, \Theta_0 Y)$ où B est la forme de Killing, Θ_0 l'involution de Cartan.

Soit $\widetilde{X}_1, \ldots, \widetilde{X}_k$ un système de Hörmander de champs invariants à gauche sur G tels que :

- $X_1, \ldots, X_\ell$ sont dans $\mathcal{H}$ et $\widetilde{X}_1, \ldots, \widetilde{X}_\ell$ est un système de Hörmander sur H ;
- $X_{\ell+1}, \ldots, X_s$ sont dans k_0 et $X_{s+1}, \ldots, X_k$ dans p_0 et les $X_1, \ldots, X_k$ sont linéairement indépendants.

On considère sur p_0 le produit scalaire $\langle ., .\rangle_1$ tel que $\langle X_i, X_j\rangle_1 = \delta_{ij}$ pour $s+1 \le i, j \le k$. On prolonge ce produit scalaire à $\mathcal{G}$ de telle sorte que p_0 et k_0 soient orthogonaux.

On pose

$$\gamma_0 = \sup_{k' \in K_0} \|\operatorname{Ad}(k')\|,$$

où $\|\operatorname{Ad}(k')\|$ est la norme de $\operatorname{Ad}(k')$ agissant sur p_0 muni du produit scalaire $\langle ., .\rangle_1$.

Soient

$$\|\alpha\| = \sup_{i,j} \|\alpha_{ij}\|, \quad \beta = \gamma_0^2 \|\alpha\| .$$

On note δ_0 la distance sur G_0, invariante à gauche dont la restriction au plan tangent à l'origine correspond au produit scalaire $\langle X, Y\rangle_0$.

Soient $\mathcal{A}^+$ une chambre de Weyl positive associée à la décomposition de $\mathcal{G}_0 = k_0 \oplus p_0$ et 2ρ la somme des racines positives comptées avec leurs multiplicités relatives à $\mathcal{A}^+$.

Soit $\mathcal{H}^1_{ij}$ l'espace radiciel de poids $\alpha_{ij} \geq 0$ sur $\mathcal{A}$, si $\mathcal{H}^2_{ij}$ est l'espace radiciel de poids $-\alpha_{ij}$; on suppose que K est transitif sur les sphères de $\mathcal{H}^1_{ij} \oplus \mathcal{H}^2_{ij}$.

Sous ces conditons on a l'énoncé suivant :

Théorème 2. — *On suppose qu'il existe $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ tel que*

$$0 < \frac{D\beta}{\|2\rho + \Theta\|_0 - 2\|\rho\|_0(1-\varepsilon)} < 1.$$

Alors pour tout $p > 1/(1-\varepsilon)$ il existe $C(p)$ telle

$$\|f^*\|_p \leq C(p)\|f\|_p$$

où $\|2\rho + \Theta\|_0$, $2\|\rho\|_0$ est la norme de $2\rho + \Theta$, 2ρ donnée par le produit scalaire $\langle ., . \rangle_0$.

Remarque. — L'exemple type où l'hypothèse du théorème s'applique est $\mathbb{R}^2 \circledS \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Les groupes concernés sont non moyennables et non semi-simples. Ils échappent à un contrôle brutal par Kunze-Stein. On va utiliser de la géométrie pour s'y ramener.

Au cours de la preuve du théorème on montrera aussi l'énoncé suivant :

Proposition 3. — *Soit δ une métrique comme ci- dessus. Soit χ_r la fonction caractéristique de la boule de rayon r, notée B_r ; on considère $\beta_r = \chi_r/|B_r|$ où $|B_r|$ est le volume de B_r. Si $1/(1-\varepsilon) < p < 1/\varepsilon$, il existe $\alpha(p) > 0$ telle que*

$$\|\beta_r\|_{p\to p} \leq C_1 \,\mathrm{e}^{-\alpha(p)r} \quad \text{où } C_1 \text{ est une constante}$$

La proposition 3 est un cas particulier d'une conjecture de [8].

Théorème 4. — *M est une variété de Cartan-Hadamard et les L^p que l'on considère sont relatifs à la mesure riemannienne. On fait sur M les hypothèses suivantes :*

a) *La courbure de Ricci de M est minorée par $-b^2$ où $b \in \mathbb{R}^*$.*

b) *Pour tout x fixé, on note $\Theta_x(s,\omega)$ la densité de volume en coordonnées polaires exponentielles au point x de M et $H_x(r,\omega)$ la courbure moyenne de la sphère de centre x et de rayon r évaluée au point $\exp_x r\omega$, et l'on suppose que*

$$\sigma_0 = \inf_{x,r,\omega} H_x(r,\omega) > 0$$