Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

SUR DES FACES DU CÔNE DE LITTLEWOOD-RICHARDSON GÉNÉRALISÉ

Pierre-Louis Montagard & Nicolas Ressayre

Tome 135
Fascicule 3

2007

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

pages 1-

Bull. Soc. math. France
135 (3), 2007, p. 343–

SUR DES FACES DU CÔNE DE LITTLEWOOD-RICHARDSON GÉNÉRALISÉ

PAR PIERRE-LOUIS MONTAGARD & NICOLAS RESSAYRE

RÉSUMÉ. — Soient $G \subset \hat{G}$ deux groupes réductifs connexes définis sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Notons $\mathcal{D}$ (resp. $\hat{\mathcal{D}}$) l'ensemble des classes d'isomorphisme des représentations irréductibles de G (resp. de $\hat{G}$). Nous nous intéressons à l'ensemble $\mathcal{C}$ des couples $(\mu, \hat{\nu})$ dans $\mathcal{D} \times \hat{\mathcal{D}}$ pour lesquels un $\hat{G}$-module de classe $\hat{\nu}$ contient un sous-G-module de classe μ. Il est bien connu que $\mathcal{C}$ engendre un cône polyédral dans l'espace vectoriel rationnel engendré par le produit du groupe des caractères de G avec le groupe des caractères de $\hat{G}$. Par des méthodes de théorie géométrique des invariants nous étudions sous quelles conditions une inégalité linéaire définissant $\mathcal{D}$ induit une face de codimension un du cône engendré par $\mathcal{C}$. Nous appliquons ces résultats à des exemples classiques de problèmes de décompositions de représentations (produit tensoriel et pléthysme).

Texte recu le 30 octobre 2006, révisé le 31 mai 2007

PIERRE-LOUIS MONTAGARD, Département de Mathématiques, UMR 5149 CNRS, CC 051, Université Montpellier II, Place Eugène Bataillon, 34 095 Montpellier cedex 5, France
E-mail : `montagar@math.univ-montp2.fr`
NICOLAS RESSAYRE, Département de Mathématiques, UMR 5149 CNRS, CC 051, Université Montpellier II, Place Eugène Bataillon, 34 095 Montpellier cedex 5, France • *E-mail :* `ressayre@math.univ-montp2.fr` • *Url :* `http://www.math.univ-montp2.fr/~ressayre`

Classification mathématique par sujets (2000). — 20G05.

Mots clefs. — Représentations, décomposition de représentations, cône de Littlewood-Richarson, produit tensoriel, pléthysme.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037-9484/2007/343/$ 5.00

Abstract (*About some faces of the generalized Littlewood-Richardson cone*)

Let $\hat{G}$ be a connected reductive algebraic group and G be a reductive closed and connected subgroup of $\hat{G}$ both defined over an algebraically closed field of characteristic zero. Let $\mathcal{D}$ (resp. $\hat{\mathcal{D}}$) the set of isomorphism classes of irreducible representations of G (resp. $\hat{G}$). We consider the set of elements $(\mu, \hat{\nu}) \in (\mathcal{D}, \hat{\mathcal{D}})$ such that an irreducible G-module of class μ is a submodule of a $\hat{G}$-module of class $\hat{\nu}$. This set generate a polyhedral cone $\mathcal{C}$ in the rational vector space generated by the product of characters of G and $\hat{G}$. By Geometric Invariant Theory methods we give, in particular, a sufficient condition for a linear inequality defining $\mathcal{D}$ to induce a face of codimension one of $\mathcal{C}$. We apply our results to several classical example in representation theory (tensor products and plethysm).

1. Introduction

1.1. — Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Soient $G \subset \hat{G}$ deux groupes algébriques réductifs connexes définis sur k. Soit $\hat{V}$ une représentation rationnelle de dimension finie de $\hat{G}$. Le problème général que l'on aborde ici est de décomposer $\hat{V}$ en somme de G-modules irréductibles. Remarquons que ce contexte recouvre de nombreux problèmes de décomposition de représentations. Citons en deux :

- si $\hat{G} = G \times G$ et si G est la diagonale de $\hat{G}$, il s'agit de décomposer le produit tensoriel de deux représentations irréductibles de G ;
- soit G un groupe réductif quelconque et $\rho : G \to \mathrm{Gl}(V)$ une représentation irréductible de G, on peut alors poser $\hat{G} := \mathrm{Gl}(V)$ et considérer l'inclusion $\rho(G) \subset \hat{G}$, le problème est alors de décomposer des représentations de G telles que la puissance symétrique n-ième $S^n V$ de V, la puissance extérieure k-ième $\Lambda^k V$ de V, ou plus généralement de décomposer les puissances de Schur $S_\pi V$.

Dans ce contexte très général, on ne cherche pas à donner des formules combinatoires explicites de décomposition comme la célèbre règle de Littlewood-Richardson concernant la décomposition du produit tensoriel pour le groupe linéaire. Notre approche est plus qualitative à travers le cône de Littlewood-Richardson généralisé que nous allons définir, après avoir introduit quelques notations supplémentaires.

Nous noterons $\mathcal{D}$ (resp. $\hat{\mathcal{D}}$) l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations irréductibles de G (resp. $\hat{G}$). Pour $\nu \in \mathcal{D}$ (resp. $\hat{\nu} \in \hat{\mathcal{D}}$) nous noterons V_ν (resp. $V_{\hat{\nu}}$) une représentation irréductible de G (resp. $\hat{G}$) dans la classe ν (resp. $\hat{\nu}$). Si V est une représentation de G nous noterons (V_ν, V) la multiplicité de V_ν dans V, c'est-à-dire la dimension de l'espace des homomorphismes G-équivariants de V_ν vers V. Nous nous intéressons à l'ensemble :

$$\mathcal{C} := \{(\mu, \hat{\nu}) \in \mathcal{D} \times \hat{\mathcal{D}} \,|\, (V_\mu, V_{\hat{\nu}}) \neq 0\}.$$

Les ensembles $\mathcal{D}$ et $\hat{\mathcal{D}}$ ont une structure naturelle de semi-groupes. De plus, M. Brion et F. Knop ont montré (voir [5]) que $\mathcal{C}$ est un sous-semigroupe de type fini de $\mathcal{D} \times \hat{\mathcal{D}}$. Dans le cas du produit tensoriel pour le groupe linéaire ce semi-groupe a été appelé semi-groupe de Littlewood-Richardson (voir [17]). Comme $\mathcal{D}$ (resp. $\hat{\mathcal{D}}$) est en bijection avec les points entiers d'un cône d'un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel que nous appellerons provisoirement E (resp. $\hat{E}$), $\mathcal{C}$ engendre un cône polyédral $\tilde{\mathcal{C}}$ dans $E \times \hat{E}$. Nous appelons ce dernier *cône de Littlewood-Richardson généralisé*, ou plus brièvement *LR-cône généralisé*. Comme $\tilde{\mathcal{C}}$ est polyédral, il peut être défini par un nombre fini d'inégalités linéaires. La description de ces inégalités est un sujet classique spécialement dans le cas du produit tensoriel pour le groupe linéaire. Ce cas particulier qui a de multiples interprétations, voir par exemple [6], a été abordé dès 1912, avec un point de vue différent, par Hermann Weyl qui explicite dans [16] quelques inégalités satisfaites par le cône $\tilde{\mathcal{C}}$. Toujours dans ce cas particulier, la première liste complète d'inégalités a été obtenue par Klyachko dans [9].

Dans le cas général, une description complète de $\tilde{\mathcal{C}}$ a été donné par Berenstein et Sjamaar dans [2]. Récemment, Belkale et Kumar dans [1] ont considèrablement réduit la liste de ces inégalités dans le cas du produit tensoriel pour un groupe réductif quelconque.

Etant donné une liste complète d'inégalités, il est naturel de se demander si cette liste est minimale. Plus précisèment, étant donné une inéquation satisfaite par $\tilde{\mathcal{C}}$, on se demande si le cas d'égalité détermine une face de codimension un de $\tilde{\mathcal{C}}$; de telles faces seront appelées essentielles. Déterminer quelles sont les faces essentielles est une question souvent posée, voir [1], [2] ou [9], mais plus rarement abordée. On connaît cependant la liste complète des faces essentielles dans le cas du produit tensoriel de deux représentations irrréductibles du groupe linéaire (Knutson, Tao et Woodward [10]) et du groupe Spin(8) (Kapovich, Kumar et Millson [8]).

Dans le cas du produit tensoriel de s représentations d'un groupe simple G, nos résultats montrent que les inégalités définissant les poids dominants donnent des faces essentielles de $\tilde{\mathcal{C}}$ Nous généralisons ainsi le théorème 4 de [10], obtenu pour $G = \mathrm{Sl}(n)$ et $s = 2$.

1.2. — Pour décrire plus précisément nos résultats, nous introduisons maintenant quelques notations. Pour une partie $\mathcal{E}$ d'un espace vectoriel nous appellerons dimension de $\mathcal{E}$ et noterons $\dim \mathcal{E}$ la dimension de l'espace vectoriel engendré par $\mathcal{E}$. Soit $\mathcal{F}$ l'espace vectoriel engendré par une face du cône engendré par $\mathcal{D}$. Il induit naturellement une « face » $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{C}$ définie par : $\mathcal{C}_{\mathcal{F}} := \mathcal{C} \cap (\mathcal{F} \times \hat{E})$. Le but de cet article est d'étudier la dimension de $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ et notamment de savoir si elle engendre une face essentielle de $\tilde{\mathcal{C}}$.

Des considérations élémentaires (voir le lemme 1) permettent de montrer que la codimension de $\mathcal{C}_\mathcal{F}$ dans $\mathcal{C}$ est supérieure ou égale à la codimension de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{D}$. Cette inégalité se traduit par $\delta_\mathcal{F} := \dim\mathcal{F} - \dim\mathcal{D} + \dim\mathcal{C} - \dim\mathcal{C}_\mathcal{F} \geq 0$. On dit que $\mathcal{F}$ est *pleine* si $\delta_\mathcal{F} = 0$, c'est-à-dire si $\dim\mathcal{C}_\mathcal{F}$ est maximale. En particulier, si $\mathcal{F}$ provient d'une face essentielle de $\mathcal{D}$, alors $\delta_\mathcal{F} = 0$ est équivalent au fait que $\mathcal{C}_\mathcal{F}$ soit essentielle dans $\mathcal{C}$. On peut maintenant énoncer un de nos résultats (voir le corollaire 2).

THÉORÈME A. — *Soit $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ deux sous-espaces de E engendrés par deux faces du cône engendré par $\mathcal{D}$. Si $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$, alors $\delta_{\mathcal{F}_1} \geq \delta_{\mathcal{F}_2}$.*

Nous présentons également dans ce travail une condition équivalente au fait que $\mathcal{F}$ soit pleine. Pour pouvoir énoncer celle-ci, nous allons introduire quelques définitions supplémentaires.

De manière classique (voir la section 3), on associe à $\mathcal{F}$ un groupe parabolique P de G ; le groupe P se décompose en un produit semi-direct $P^u \rtimes L$, où P^u est le radical unipotent de P et L un sous-groupe de Levi. Dans la section 4, nous montrons alors qu'il existe un sous-groupe parabolique $\hat{P}$ de $\hat{G}$ et une décomposition de Levi de celui-ci : $\hat{P} = \hat{P}^u \rtimes \hat{L}$ qui vérifient : $P = \hat{P} \cap G$; $P^u = \hat{P}^u \cap G$ et $L = \hat{L} \cap G$.

Nous noterons $\mathfrak{p}^u$ (resp. $\hat{\mathfrak{p}}^u$), l'algèbre de Lie de P^u (resp. $\hat{P}^u$) et B_L (resp. $B_{\hat{L}}$) un sous-groupe de Borel de L (resp. $\hat{L}$). Enfin rappelons que si un groupe algébrique Γ agit sur une variété X, on appelle isotropie réductive de Γ en $x \in X$, le quotient de Γ_x par son radical unipotent. Le groupe $\hat{L}$ agit sur $\hat{\mathfrak{p}}^u$ par la représentation adjointe et $L \subset \hat{L}$ stabilise $\mathfrak{p}^u$; donc, L agit sur $\hat{\mathfrak{p}}^u/\mathfrak{p}^u$. De plus, $\hat{L}$ et donc L agissent sur $\hat{L}/B_{\hat{L}}$ par multiplication. Finalement, L agit sur $\hat{\mathfrak{p}}^u/\mathfrak{p}^u \times \hat{L}/B_{\hat{L}}$ diagonalement. On peut maintenant énoncer le résultat suivant (voir le corollaire 3).

THÉORÈME B. — *Il existe un ouvert non vide Ω de $\hat{\mathfrak{p}}^u/\mathfrak{p}^u \times \hat{L}/B_{\hat{L}}$ tel que pour tout $x \in \Omega$, $\delta_\mathcal{F}$ est égal à la différence des dimensions des isotropies réductives des groupes L et B_L en x.*

Une conséquence immédiate des théorèmes A et B est le :

THÉORÈME C. — *S'il existe un point de $\hat{G}/\hat{B}$ dont l'isotropie dans le groupe dérivé de G est finie, alors toutes les faces de $\mathcal{D}$ sont pleines.*

La stratégie générale, pour montrer les résultats ci-dessus est d'identifier $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_\mathcal{F}$ à un ensemble de poids pour l'action d'un tore T sur l'algèbre des fonctions régulières de T-variété affine X et $X_\mathcal{F}$. Le calcul des dimensions de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_\mathcal{F}$ se ramène alors au calcul des dimensions des isotropies génériques de T sur X et $X_\mathcal{F}$. Nous utilisons ensuite le fait que ces dimensions sont invariantes par