

# Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

## **NILSYSTÈMES D'ORDRE 2 ET PARALLÉLÉPIPÈDES**

**Bernard Host & Alejandro Maass**

**Tome 135  
Fascicule 3**

**2007**

**SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE**

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

pages 1-

## NILSYSTÈMES D'ORDRE 2 ET PARALLÉLÉPIPÈDES

PAR BERNARD HOST & ALEJANDRO MAASS

---

RÉSUMÉ. — En topologie dynamique, une famille classique de systèmes est celle formée par les rotations minimales. La classe des nilsystèmes et de leurs limites projectives en est une extension naturelle. L'étude de ces systèmes est ancienne mais connaît actuellement un renouveau à cause de ses applications, à la fois à la théorie ergodique et en théorie additive des nombres.

Les rotations minimales sont caractérisées par le fait que la relation de proximalité régionale est l'égalité. Nous introduisons une nouvelle relation, celle de *bi-proximalité régionale*, et montrons qu'elle caractérise les limites projectives de nilsystèmes d'ordre 2.

Les rotations minimales sont liées aux suites presque périodiques et de même les nilsystèmes correspondent aux *nilsuites*. Ces suites introduites en théorie ergodique sont intervenues depuis dans certaines questions de théorie des nombres. De notre caractérisation des nilsystèmes d'ordre 2 nous déduisons une caractérisation des nilsuites d'ordre 2.

Les démonstrations s'appuient d'une manière essentielle sur l'étude des "structures de parallélépipèdes" développée par B. Kra et le premier auteur.

---

*Texte reçu le 8 novembre 2006, révisé le 11 mai 2007*

BERNARD HOST, Université Paris-Est, Laboratoire d'analyse et de mathématiques appliquées, UMR CNRS 8050, 5 bd. Descartes, 77454 Marne la Vallée Cedex 2 (France)  
*E-mail* : [bernard.host@univ-mlv.fr](mailto:bernard.host@univ-mlv.fr)

ALEJANDRO MAASS, Departamento de Ingeniería Matemática, Universidad de Chile & Centro de Modelamiento Matemático, UMI 2071 UCHILE-CNRS, Casilla 170/3 correo 3, Santiago (Chili) • *E-mail* : [amaass@dim.uchile.cl](mailto:amaass@dim.uchile.cl)

Classification mathématique par sujets (2000). — 37B99.

Mots clefs. — Nilsystèmes, systèmes distaux, nilsuites.

Remerciements : ce travail a été financé en partie par le Núcleo Milenio Información y Aleatoriedad P04-069F et par le projet ECOS-Conicyt C03E03.

ABSTRACT (*Two step nilsystems and parallelepipeds*). — One natural extension of this family is the class of nilsystems and their inverse limits. These systems have arisen in recent applications in ergodic theory and in additive combinatorics, renewing interest in studying these classical objects.

Minimal rotations can be characterized via the regionally proximal relation. We introduce a new relation, the bi-regionally proximal relation, and show that it characterizes inverse limits of two step nilsystems.

Minimal rotations are linked to almost periodic sequences, and more generally nilsystems correspond to nilsequences. These sequences were introduced in ergodic theory and have since been used in some questions of Number Theory. Using our characterization of two step nilsystems we deduce a characterization of two step nilsequences.

The proofs rely in an essential way on the study of “parallelepiped structures” developed by B. Kra and the first author.

## 1. Introduction

Un *système dynamique topologique* (abrégé en *système*)  $(X, T)$  est un espace compact métrisable  $X$  muni d'un homéomorphisme  $T: X \rightarrow X$ . Ce système est *transitif* s'il existe au moins un point  $x \in X$  dont l'orbite  $\{T^n x; n \in \mathbb{Z}\}$  est dense dans  $X$ ; il est *minimal* si l'orbite de tout point est dense dans  $X$ . Cette propriété est équivalente à la condition que les seuls fermés de  $X$  invariants par  $T$  sont  $X$  et l'ensemble vide.

**1.1. Systèmes équicontinus et nilsystèmes.** — Une famille classique de systèmes minimaux est celle formée par les *rotations minimales* (ces systèmes sont appelés *systèmes de Kronecker* dans [8]). Dans ce cas,  $X$  est un groupe abélien compact et la transformation  $T$  a la forme  $x \mapsto \alpha x$ , où  $\alpha \in X$  est une constante telle que  $\{\alpha^n; n \in \mathbb{Z}\}$  soit dense dans  $X$ .

Un système minimal est *équicontinu* si et seulement si il est isomorphe à une rotation minimale. Ces systèmes peuvent être caractérisés au moyen de la *relation de proximalité régionale* : pour chaque système minimal  $(X, T)$ , cette relation est une relation d'équivalence sur  $X$  et le système est équicontinu si et seulement si cette relation est l'égalité (voir [1]). La définition et les propriétés de cette relation sont rappelées dans la section 2.1.

Nous nous intéressons ici à une famille plus générale de systèmes, les *nil-systèmes*. L'étude de ces systèmes est ancienne mais connaît actuellement un renouveau à cause de ses applications, à la fois en théorie ergodique (voir par exemple [6], [7], [13], [5]) et en théorie additive des nombres (voir [11], [10]). Nous en donnons ici la définition, les propriétés utiles sont rappelées dans la section 5.1.

DÉFINITION 1. — Soient  $k \geq 1$  un entier,  $G$  un groupe de Lie nilpotent d'ordre  $k$  et  $\Gamma$  un sous-groupe discret cocompact de  $G$ . La variété  $X = G/\Gamma$  est appelée une *nilvariété d'ordre  $k$* . Fixons  $t \in G$  et soit  $T: X \rightarrow X$  l'application  $x \mapsto t \cdot x$ , où  $(g, x) \mapsto g \cdot x$  est l'action à gauche de  $G$  sur  $X$ . Alors  $(X, T)$  est appelé un *nilsystème d'ordre  $k$* .

On rappelle qu'un nilsystème est minimal dès qu'il est transitif.

Un nilsystème d'ordre 1 est une rotation sur un groupe abélien compact. Nous ne considérons ici que les nilsystèmes d'ordre 2, la généralisation de nos résultats à l'ordre supérieur restant une question ouverte.

Contrairement à la famille des rotations minimales, la famille des nilsystèmes minimaux d'ordre 2 n'est pas stable par limite projective (voir [17]). Il est donc naturel de considérer la classe plus large des systèmes qui sont des *limites projectives de nilsystèmes minimaux d'ordre 2*.

Le résultat principal de cet article (théorème 2) est la caractérisation des limites projectives de nilsystèmes minimaux d'ordre 2 au moyen d'une nouvelle relation, la *relation de bi-proximalité régionale* introduite dans la section 2.1 : cette relation est l'égalité si et seulement si le système est (isomorphe à) une limite projective de nilsystèmes d'ordre 2.

Une caractérisation d'un type assez différent a été donnée par E. Glasner [9] dans le cas particulier où le système est une extension de son facteur équicontinu maximal par un groupe abélien compact.

**1.2. Application aux nilsuites.** — La notion de *nilsuite* (section 8.1) est une généralisation naturelle de celle de suite presque-périodique, obtenue en remplaçant les groupes abéliens par des groupes nilpotents. Ces suites ont été d'abord introduites en théorie ergodique pour l'étude des corrélations multiples (cf. [5]) et elles ont été ensuite utilisées en théorie des nombres pour l'étude des configurations apparaissant dans les nombres premiers (cf. [11], [10]).

Dans la section 8 nous utilisons notre résultat principal pour donner une caractérisation des nilsuites d'ordre 2 en termes de régularité arithmétique. Nous pensons que cette caractérisation pourrait avoir des applications en dehors de la dynamique. Au passage nous donnons aussi une caractérisation des suites presque périodiques, facile à montrer directement mais apparemment nouvelle.

### 1.3. Facteur équicontinu maximal et nilfacteur d'ordre 2 maximal

En topologie dynamique, les quotients sont appelés des facteurs. Nous en rappelons la définition.

DÉFINITION 2. — Soit  $(X, T)$  un système. Un *facteur* de ce système est la donnée d'un système  $(Y, S)$  et d'une application  $p: X \rightarrow Y$ , continue, surjective et vérifiant  $S \circ p = p \circ T$ .

Par abus de langage, on dit brièvement que  $Y$  est un facteur de  $X$  et l'application  $p$  est appelée l'*application facteur*.

Remarquons que tout facteur d'un système minimal est minimal et que tout facteur d'un système minimal équiv continu est équiv continu.

Soit désormais  $(X, T)$  un système minimal. Les facteurs de  $X$  sont (partiellement) ordonnés de façon naturelle : si  $Y$  est un facteur de  $X$  et si  $Z$  est un facteur de  $Y$ , alors  $Z$  est un facteur de  $X$  et on dit que le facteur  $Y$  est *plus grand* ou *au-dessus* du facteur  $Z$  de  $X$ .

La famille des facteurs de  $X$  qui sont équiv continus est projective. Comme une limite projective de systèmes équiv continus est un système équiv continu, cette famille a un plus grand élément, le *facteur équiv continu maximal*. Cette notion est l'analogue en topologie dynamique de celle de *facteur de Kronecker* en théorie ergodique.

NOTATION. — Nous notons désormais  $Z$  ou  $Z_X$  le facteur équiv continu maximal de  $(X, T)$  et  $\pi : X \rightarrow Z$  ou  $\pi_X : X \rightarrow Z_X$  l'application facteur.

Le facteur équiv continu maximal est déterminé par la relation de proximalité régionale : cette relation est une relation d'équivalence fermée et invariante et  $Z$  est le quotient de  $X$  par cette relation (cf. [1]).

Considérons maintenant la famille des facteurs de  $X$  qui sont des nilsystèmes d'ordre 2. Cette famille est projective (proposition 8), mais n'est pas stable par limite projective.

DÉFINITION 3. — Le *nilfacteur d'ordre 2 maximal* de  $X$  est le plus grand facteur de  $X$  qui est (isomorphe à) une limite projective de nilsystèmes d'ordre 2.

NOTATION. — Nous notons désormais  $Z_2$  ou  $Z_{X,2}$  le nilfacteur d'ordre 2 maximal de  $(X, T)$  et  $\pi_2$  ou  $\pi_{X,2}$  l'application quotient.

Ainsi,  $Z_2$  est caractérisé par les deux propriétés :

- 1)  $Z_2$  est un facteur de  $X$  qui est isomorphe à une limite projective de nilsystèmes d'ordre 2 ;
- 2) tout facteur de  $X$  qui est isomorphe à un nilsystème d'ordre 2 est un facteur de  $Z_2$ .

La notion de nilfacteur d'ordre 2 maximal est l'analogue en topologie dynamique de l'*algèbre de Conze-Lesigne* construite dans [6] et [7] puis dans [13] où elle est notée  $Z_2$ .

Nous ne savons pas si en général le nilfacteur d'ordre 2 maximal est le quotient de  $X$  par la relation de bi-proximalité régionale, ni même si cette relation est d'équivalence. Cependant ces propriétés sont vraies (théorème 3) pour une classe importante de systèmes, les *systèmes distaux* dont la définition est rappelée dans la section 3.4.