Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

FONCTION ZÊTA DES HAUTEURS ASSOCIÉE À UNE CERTAINE SURFACE CUBIQUE

Régis de la Bretèche & Sir Peter Swinnerton-Dyer

Tome 135
Fascicule 1

2007

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

pages 1-

Bull. Soc. math. France
135 (1), 2007, p. 65–

FONCTION ZÊTA DES HAUTEURS ASSOCIÉE À UNE CERTAINE SURFACE CUBIQUE

PAR RÉGIS DE LA BRETÈCHE & SIR PETER SWINNERTON-DYER

RÉSUMÉ. — L'objet de cet article est d'obtenir une formule pour la fonction zêta des hauteurs classique à partir de la fonction zêta des hauteurs multiple de La Bretèche, et d'utiliser cette formule pour prolonger de manière méromorphe la fonction zêta des hauteurs. En particulier, il est montré que celle-ci peut être prolongée au demi-plan $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \frac{3}{4}\}$ et que la frontière naturelle de son domaine naturel de méromorphie est $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s = \frac{3}{4}\}$.

ABSTRACT (*Height zeta function of a cubic surface*). — The object of this article is to obtain a formula for the classical height zeta function of $X_0^3 = X_1X_2X_3$ in terms of the multiple height zeta function of La Bretèche, and to use that formula to find the meromorphic continuation of the height zeta function. In particular, it will be shown that the height zeta function can be meromorphic continued in $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \frac{3}{4}\}$ and its natural boundary is $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s = \frac{3}{4}\}$.

Texte reçu le 17 janvier 2006, révisé le 25 juillet 2006

RÉGIS DE LA BRETÈCHE, Université Paris 7 – Denis Diderot, Institut de Mathématiques de Jussieu, UMR 7586, Case 7012, 2, place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05 (France)
E-mail : `breteche@math.jussieu.fr`
SIR PETER SWINNERTON-DYER, Isaac Newton Institute, 20, Clarkson Road, Cambridge CB3 0EH (England) • *E-mail :* `H.P.F.Swinnerton-Dyer@dpmms.cam.ac.uk`

Classification mathématique par sujets (2000). — 11G35, 14G05, 14G10.

Mots clefs. — Conjecture de Manin, surfaces cubiques, frontière naturelle du domaine naturel de méromorphie, utilisation de l'hypothèse de Riemann, formule de Perron.

1. Introduction

De nombreux auteurs (voir [2, 7, 8, 9]) ont étudié l'asymptotique du nombre $N(B)$ des points rationnels P de hauteur $H(P) \leqslant B$ sur la surface cubique définie par

$$X_0^3 = X_1X_2X_3 \tag{1.1}$$

en dehors des trois droites définies par $X_0 = 0$. Ici, la hauteur $H(P)$ lorsque P est représenté par un quadruplet d'entiers x_0, x_1, x_2, x_3 de pgcd égal à 1 est définie par

$$H(P) = \max_j |x_j|.$$

Le meilleur résultat a été obtenu par le premier auteur [2] utilisant des méthodes d'analyse complexe analogue à celle intervenant dans la démonstration du théorème des nombres premiers. Il a montré qu'il existe un polynôme Q de degré 6 et une constante $c > 0$ tels que l'on ait, pour B tendant vers l'infini, l'estimation

$$N(B) = BQ(\log B) + O\big(B^{7/8}\exp\{-c(\log B)^{3/5}(\log\log B)^{-1/5}\}\big). \tag{1.2}$$

De plus le coefficient dominant est égal à

$$\frac{1}{6!}\prod_p\Big\{\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^7\Big(1+\frac{7}{p}+\frac{1}{p^2}\Big)\Big\}. \tag{1.3}$$

De récentes conjectures concernant le nombre de points rationnels [11] rendent souhaitable d'obtenir le terme suivant de l'estimation de $N(B)$. Le second auteur conjecture dans [11] qu'il existe un deuxième terme dans l'estimation de $N(B)$ pour les surfaces cubiques non-singulières qui devrait ressembler à celui qui apparaît dans la formule explicite du théorème de nombres premiers.

L'exposant $\frac{9}{11}$ apparaissant dans (1.5) est difficile à prévoir. Il est sans doute lié à la nature de la singularité de la cubique considérée, mais nous pensons qu'il est plausible de l'attribuer au choix de la hauteur. Un choix plus canonique d'un certain point de vue de la hauteur peut être trouvé dans [12]. Pour celle-ci, on peut remplacer (1.4) par

$$N(B) = BQ_1(\log B) + O(B^{1/2+\epsilon})$$

où Q_1 est un polynôme de degré 5 et le terme d'erreur est encore relié aux zéros de la fonction zêta de Riemann ; mais ici aussi il y a des complications qui apparaissent de manière quelque peu non naturelle.

Puisque les conjectures de [11] ne concernent que les cubiques non-singulières, cela ne permet pas de faire des prédictions sur la valeur de cet exposant.

Les fonctions zêta des hauteurs associées à certaines surfaces de del Pezzo singulières de degré 4 ont déjà été calculéees dans [3, 4, 5]. Elles jouent un role clé dans la démonstration d'une estimation précise dans la conjecture de Manin et l'étude de la taille du terme d'erreur. De plus, elles recellent en général plus d'informations que les formules asymptotiques.

Nous étudions ici les propriétés analytiques de la fonction zêta des hauteurs $Z(s)$ associée à (1.1) et en particulier le plus grand domaine où la fonction $Z(s)$ peut être prolongée de manière méromorphe.

La fonction zêta des hauteurs $Z(s)$ associée à (1.1) sur lequel on compte est définie par

$$Z(s) = \sum_{P} \frac{1}{H(P)^s}$$

où la somme est prise sur les points rationnels en dehors de la réunion des trois droites d'équation $X_0 = 0$.

Théorème 1. — *La fonction $Z(s)$ admet un prolongement méromorphe dans le demi-plan $\{s \in \mathbb{C} \,:\, \operatorname{Re} s > \frac{3}{4}\}$ et sa frontière naturelle d'analycité est la droite $\{s \in \mathbb{C} \,:\, \operatorname{Re} s = \frac{3}{4}\}$.*

Il est démontré dans [6] que les fonctions zêtas des hauteurs associés aux espaces projectifs $\mathbb{P}_n(Q)$ et à l'éclaté du plan projectif en un point sur $\mathbb{Q}$ sont prolongeables en des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$. À notre connaissance, c'est le seul autre exemple connu où le domaine naturel de méromorphie est entièrement déterminé.

L'estimation (1.5) avec son terme d'erreur semblable à celui qui apparaît dans le théorème des nombres premiers laisse deviner l'importance de la répartition des zéros de ζ dans la taille du terme d'erreur.

La formule (1.4) permet d'obtenir une évaluation de $N(B)$ sous l'hypothèse de Riemann usuelle. Les pôles de $Z(s)$ dans $\{s \in \mathbb{C} \,:\, \operatorname{Re} s \in]\frac{4}{5}, 1[\}$ sont alors $\frac{9}{11}$ et les $\frac{3}{4} + \frac{1}{8}\rho$ où les ρ décrivent les zéros de ζ de partie réelle $\frac{1}{2}$.

Théorème 2. — *Soit $\varepsilon > 0$. Sous l'hypothèse de Riemann, il existe une constante $\gamma > 0$ telle que nous avons lorsque B tendant vers l'infini l'estimation*

$$N(B) = BQ(\log B) + \gamma B^{9/11} + O\big(B^{13/16+\varepsilon}\big). \tag{1.4}$$

Si de plus tous les zéros de ζ sont simples, nous avons

$$N(B) = BQ(\log B) + \gamma B^{9/11} + \lim \sum_{|\tau| \leqslant R} \beta_\tau B^{13/16+i\tau/8} + O\big(B^{4/5+\varepsilon}\big) \tag{1.5}$$

où les $\frac{1}{2} + i\tau$ parcourent les zéros de la fonction zêta, les β_τ ne dépendent que de τ, et la limite est prise lorsque $R \to +\infty$ avec la condition

$$\big|\zeta(\sigma + iR)\big| > R^{-1/\log\log\log R} \qquad (\tfrac{1}{2} \leqslant \sigma < 1). \tag{1.6}$$

Remarques. — Il n'y a aucune raison de penser que ζ admet un zéro multiple. Mais si $\frac{1}{2}+i\tau$ est un zéro d'ordre $r>1$ de ζ, il suffit dans (1.5) de multiplier le terme correspondant par $Q_\tau(\log B)$ où Q_τ est un polynôme de degré $r-1$.

L'ensemble des R satisfaisant (1.6) est non borné. En effet, le théorème 14.16 de [14] affirme que, pour un choix convenable de A, tout intervalle $[T,T+1]$ avec $T\geqslant 2$ contient un t tel que

$$\big|\zeta(\sigma+it)\big|>t^{-A/\log\log t}\qquad(\tfrac{1}{2}\leqslant\sigma<1)$$

ce qui est plus fort que (1.6).

Nous renvoyons à la formule (4.9) pour une expression explicite de γ et à (4.12) pour une de β_τ.

Remerciements. — Ce travail a été réalisé lorsque le premier auteur faisait partie de l'équipe *Arithmétique et géométrie algébrique* du département de Mathématiques de l'Université d'Orsay. Nous remercions aussi Jordan Ellenberg qui nous a conseillé de déterminer le signe de la constante γ apparaissant au théorème 2.

2. Démonstration

2.1. Préliminaires. — Dans une première étape, nous démontrons une identité qui peut être vue comme une variante de la formule de Perron ; celle-ci est donnée au lemme 2. Avant cela, nous énonçons un lemme qui nous permettra de justifier les différentes manipulations en montrant la convergence absolue de toutes les intégrales multiples que nous rencontrerons par la suite.

Nous n'utiliserons seulement que le cas $n=0$ du lemme 1, mais l'énoncé du résultat général servira dans la démonstration par récurrence.

Lemme 1. — *Soient α,γ des réels et r,n des entiers tels que $0\leqslant\alpha<1$, $\gamma>0$, $r>0$, $n\geqslant 0$. Pour tout t l'intégrale*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\frac{T^\alpha\{\log(2+|t-t_1-\cdots-t_r|)\}^n\,\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_r}{(\gamma+|t_1|)\cdots(\gamma+|t_r|)(\gamma+|t-t_1-\cdots-t_r|)}\tag{2.1}$$

où $T=\max(|t_1|,\dots,|t_r|)$ est convergente et uniformément bornée.

Démonstration. — Nous raisonnons par récurrence sur r. Il est clair que, pour des raisons de symétrie, on peut remplacer dans (2.1) le terme T^α par $|t_1|^\alpha$. Nous majorons l'intégrale sur t_r pour laquelle nous devons considérer

$$\int_{-\infty}^{\infty}|t_r|^{\alpha_r}\frac{\{\log(2+|\tau-t_r|)\}^n\,\mathrm{d}t_r}{(\gamma+|t_r|)(\gamma+|\tau-t_r|)}\tag{2.2}$$