Bulletin
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

CONSTANTES DE SOBOLEV DES ARBRES

Marc Bourdon

Tome 135
Fascicule 1

2007

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 1-

Bull. Soc. math. France
135 (1), 2007, p. 93–

CONSTANTES DE SOBOLEV DES ARBRES

PAR MARC BOURDON

RÉSUMÉ. — Étant donnés $p \in [1, +\infty[$ et un arbre T dont chaque sommet est de valence au moins 3, on étudie la constante de Sobolev d'exposant p de T, c'est-à-dire la plus petite constante σ_p telle que pour tout $u \in \ell_p(T^0)$ on ait $\|u\|_p^p \leq \sigma_p \|\mathrm{d}u\|_p^p$. Notre motivation vient de la recherche de graphes finis avec des petites constantes de Poincaré d'exposant p, en vue d'obtenir des exemples de groupes qui ont la propriété de point fixe sur les espaces L^p.

ABSTRACT (*Sobolev constants for trees*). — For $p \in [1, +\infty[$ and for any tree T of valency at least 3, we study the Sobolev constant of exponent p of T, that is the smallest constant σ_p such that for every $u \in \ell_p(T)$, one has $\|u\|_p^p \leq \sigma_p \|\mathrm{d}u\|_p^p$. Our motivation comes from the search of finite graphs with small Poincaré constants of exponent p, in order to construct examples of groups which admit the fixed point property on L^p-spaces.

1. Introduction

Soit G un graphe fini ; notons G^0 l'ensemble de ses sommets et G^1 l'ensemble de ses arêtes non orientées. Pour $p \in]1, +\infty[$ on s'intéresse à la plus petite

Texte reçu le 23 janvier 2006, révisé le 6 avril 2007

MARC BOURDON, Laboratoire Paul Painlevé, UMR CNRS 8524, UFR de Mathématiques Pures et Appliquées, Bât. M2, Université des Sciences et Technologies de Lille, 59665 Villeneuve d'Ascq Cedex (France) • *E-mail :* `Marc.Bourdon@math.univ-lille1.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 58E35, 31C45.

Mots clefs. — Constantes de Sobolev, constantes de Poincaré, arbres, graphes.

constante π_p telle que pour toute fonction réelle u de G^0 on ait

$$(I_p) \qquad \sum_{x\in G^0} \big|u(x)-b_u\big|^p \le \pi_p \sum_{a\in G^1} \big|\mathrm{d}u(a)\big|^p,$$

où b_u est le « p-barycentre » des $u(x)$, ($x \in G^0$), c'est-à-dire l'unique $b \in \mathbb{R}$ qui minimise la fonction

$$t \longmapsto \sum_{x\in G^0} \big|u(x)-t\big|^p,$$

et où du désigne la différentielle de u : pour toute arête a d'extrémités a_+ et a_- dans G^0 ,

$$\big|\mathrm{d}u(a)\big| = \big|u(a_+)-u(a_-)\big|.$$

La constante π_p s'appelle la *constante de Poincaré d'exposant* p du graphe G. Son inverse π_p^{-1} est égale à la plus petite « valeur propre » non nulle du p-Laplacien de G (voir 1.2), c'est-à-dire de l'opérateur défini sur les fonctions u de G^0 par

$$\forall x \in G_0, \quad (\Delta_p u)(x) = \sum_{y\sim x} \big|u(x)-u(y)\big|^{p-2}\big(u(x)-u(y)\big).$$

Pour $p = 2$, l'étude de π_p est bien développée (voir [8] et les références). Par contre, lorsque p est grand, même pour les graphes les plus simples, il est difficile d'estimer π_p et le sujet semble très ouvert.

On étudie dans cette note le problème analogue pour les arbres. Soit T un arbre dont chaque sommet est de valence au moins égale à 3. Pour $p \in [1,+\infty[$ soit σ_p la plus petite constante telle que pour toute fonction réelle u de T^0 p-sommable, on ait

$$\sum_{x\in T^0} \big|u(x)\big|^p \le \sigma_p \sum_{a\in T^1} \big|\mathrm{d}u(a)\big|^p.$$

Elle s'appelle la *constante de Sobolev d'exposant* p de T. On démontre :

Théorème 1.1

a) *Si T est homogène de valence k, alors*

$$\sigma_p = \big[(k-1)^{\frac{1}{p}} - 1\big]^{-p}.$$

b) *Si la valence de chaque sommet de T appartient à* $[3,k]$*, alors*

$$\sigma_p \ge \big[(k-1)^{\frac{1}{p}} - 1\big]^{-p}.$$

c) *Si la valence de chaque sommet de T est supérieure ou égale à $k \ge 3$, alors*

$$\sigma_p \le \big[(k-1)^{\frac{1}{p}} - 1\big]^{-p}.$$

Pour $p = 2$ ces relations sont classiques (voir [8]), dans le cas général elles ne semblent pas apparaître dans la littérature.

Remarques et motivations a) La constante de Poincaré joue un rôle important dans la mise en œuvre par M. Gromov de la méthode de Garland pour obtenir des théorèmes de points fixes (voir [5, 4]). En particulier, il découle de [5] le résultat suivant, qui généralise à $p \neq 2$ un théorème d'A. Zuk [10] et de Ballmann-Swiatkowski [2] (voir aussi [9, 7, 1] pour des résultats voisins) :

Soit X un 2-complexe simplicial connexe, de valence constante égale à $k \geq 3$ (i.e. *toute arête de X est commune à k triangles de X*) *et soit Γ un groupe agissant sur X de manière simpliciale, libre, et cocompacte. On suppose que deux triangles distincts quelconques de X/Γ ont au plus un sommet ou une arête en commun. Soit μ une mesure borélienne sur $\mathbb{R}$ et soit $p \in]1, +\infty[$. Alors si les constantes de Poincaré d'exposant p des links des sommets de X sont toutes strictement inférieures à $2/k$, toute action isométrique de Γ sur $L^p(\mathbb{R}, \mu)$ possède un point fixe global.*

Ce résultat implique en particulier l'annulation du premier groupe de cohomologie ℓ_p de Γ, c'est à dire le $H^1(\Gamma, \ell_p(\Gamma))$. En effet il suffit de prendre pour μ la mesure de comptage d'un sous-ensemble dénombrable de $\mathbb{R}$.

b) Le théorème 1.1 montre que pour p fixé, la constante de Sobolev σ_p de l'arbre régulier de valence k est équivalente à $1/k$ lorsque k tend vers l'infini. On peut donc espérer que pour $p > 1$ et $c > 1$ fixées, il existe de nombreux graphes finis de valence k qui satisfont $\pi_p \leq c/k$. J'ignore toutefois comment construire de tels graphes (voir [8] pour $p = 2$).

c) Décrivons les cas limites $p = 1$ et $= \infty$ de l'inégalité (I_p). La constante π_1 est également (par des arguments standards, voir [3]), la plus petite constante telle que pour tout $A \subset G^0$ avec $|A| \leq \frac{1}{2}|G^0|$, on ait

$$|A| \leq \pi_1 |\partial A|,$$

où ∂A désigne l'ensemble des $a \in G^1$ qui ont une extrémité dans A et l'autre dans A^c.

Posons

$$\pi_\infty = \lim_{p \to +\infty} \pi_p^{1/p}.$$

Alors π_∞ est la plus petite constante telle que pour toute fonction u de G^0, on ait

$$\tfrac{1}{2}(\sup u - \inf u) \leq \pi_\infty \sup |du|.$$

Il est tentant de croire que la fonction $\theta \mapsto \theta \log \pi_{1/\theta}$ est convexe sur $[0, 1]$, comme dans le théorème d'interpolation de Riesz.

Remerciements. — Je remercie Yann Ollivier dont les questions sont à l'origine de cette note. Merci également à Frédéric Haglund, Hiroyasu Izeki, Pierre Pansu, et Shin Nayatani pour leurs intérêt et suggestions. Ce travail a été effectué lors d'un séjour aux instituts de mathématiques de Chennai et d'Allahabad, je remercie ces institutions pour leur hospitalité. Enfin je remercie le rapporteur qui m'a suggéré d'énoncer et de démontrer les inégalités b) et c) du théorème 1.1.

2. Quelques lemmes

Pour un ensemble E et $p \in]1, +\infty[$, on note $\ell_p(E)$ l'ensemble des fonctions réelles de E qui sont p-sommables et $\|.\|_p$ leur p-norme. Soit G un graphe connexe de valence uniformément bornée. On suppose que les extrémités de chaque arête sont distinctes et que deux arêtes qui ont mêmes extrémités sont confondues. Pour $u \in \ell_p(G^0)$, sa *p-énergie* est le nombre $\|\mathrm{d}u\|_p^p$. Supposons G infini, et considérons l'inverse de la constante de Sobolev de G

$$\lambda := \inf\Big\{ \frac{\|\mathrm{d}u\|_p^p}{\|u\|_p^p} \ ; \ u \in \ell_p(G^0) \setminus \{0\} \Big\}.$$

En général, l'infimum n'est pas atteint, les lemmes qui suivent permettent de se ramener à la dimension finie. Pour un sous-espace $\mathcal{E}$ de $\ell_p(G^0)$, on note

$$\lambda_{\mathcal{E}} = \inf\Big\{ \frac{\|\mathrm{d}u\|_p^p}{\|u\|_p^p} \ ; \ u \in \mathcal{E} \setminus \{0\} \Big\}.$$

Soit H un sous-graphe fermé de G, on dénote par $\mathcal{E}_H$ le sous-espace de $\ell_p(G^0)$ constitué des fonctions nulles en dehors de H^0, et par $\mathcal{P}_H$ la projection de $\ell_p(G^0)$ sur $\mathcal{E}_H$. Le lemme suivant est immédiat.

Lemme 2.1. — *Soit $\{G_n\}$ une suite de sous-graphes fermés de G, croissante, et telle que l'union des G_n soit égale à G. Soit $\mathcal{E}$ un sous-espace de $\ell_p(G^0)$ et soit $\mathcal{E}_n$ son image par $\mathcal{P}_{G_n}$. Alors*

$$\lim_{n \to +\infty} \lambda_{\mathcal{E}_n} = \lambda_{\mathcal{E}}.$$

Rappelons que le p-Laplacien de G est l'application de $\{u : G^0 \to \mathbb{R}\}$ dans lui-même définie par

$$\forall x \in G_0, \quad (\Delta_p u)(x) = \sum_{y \sim x} \big\{u(x) - u(y)\big\}^{p-1},$$

où $y \sim x$ signifie que x et y sont les extrémités d'une arête de G, et où $\{t\}^{p-1}$ désigne t^{p-1} si $t \geq 0$ et $-|t|^{p-1}$ sinon. On renvoie à [6] et à ses références pour l'analyse p-harmonique.

Désignons par $\langle h, k \rangle$ le produit scalaire $\sum_{x \in G^0} h(x)k(x)$.