Bulletin
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

PÉRIODES ENTIÈRES DE GROUPES p-DIVISIBLES SUR UNE BASE GÉNÉRALE

Miaofen Chen

Tome 143
Fascicule 1

2015

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 1-33

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un périodique trimestriel de la Société Mathématique de France.

Fascicule 1, tome 143, janvier 2015

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 43 € ($ 64)
Abonnement Europe : 176 €, hors Europe : 193 € ($ 290)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Bulletin de la Société Mathématique de France
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 0037-9484

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

Bull. Soc. math. France
143 (1), 2015, p. 1–33

PÉRIODES ENTIÈRES DE GROUPES p-DIVISIBLES SUR UNE BASE GÉNÉRALE

PAR MIAOFEN CHEN

RÉSUMÉ. — Faltings a démontré un théorème de comparaison à coefficients entiers entre module de Tate et module de Dieudonné filtré des groupes p-divisibles sur un anneau de valuation discrète p-adique complet. Dans cet article, nous généralisons son résultat sur une base plus générale, plus précisément, sur une $\mathbb{Z}_p$-algèbre noethérienne, p-adiquement complète, normale, intègre et sans p-torsion.

ABSTRACT (*Integral periods of p-divisible groups over a general base*)

Faltings has proved a comparaison theorem with integral coefficients between the Tate module and the filtered Dieudonné module of a p-divisible groups over a p-adic complete discrete valuation ring. In this paper, we generalise his resultat over a more general base, namely over a Noetherian, normal, integral, p-adically complete, p-torsion free $\mathbb{Z}_p$-algebra.

Texte reçu le 2 juin 2011, modifié le 14 février 2013 et le 5 septembre 2013, accepté le 3 mai 2014.

MIAOFEN CHEN, Department of Mathematics, Shanghai Key Laboratory of PMMP, East China Normal University, No. 500 Dong Chuan Road, Shanghai, 200241, P.R.China •
E-mail : `mfchen@math.ecnu.edu.cn`

Classification mathématique par sujets (2000). — 14L05.

Mots clefs. — Groupe p-divisible, théorie de Fontaine, théorème de comparaison.

1. Introduction

Soient $K|\mathbb{Q}_p$ un corps valué complet pour une valuation discrète, à corps résiduel k parfait de caractéristique $p > 0$, et $K_0 := \mathrm{Frac}(W(k))$ le corps des fractions de l'anneau des vecteurs de Witt de k. Fixons une clôture algébrique $\overline{K}$ de K. Cela correspond à un point géométrique $\overline{\eta}$ de $\mathrm{Spec}(K)$. Soit $\widehat{\overline{K}}$ le complété p-adique de $\overline{K}$. Notons $\Gamma_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}|K)$ le groupe de Galois. Posons $\mathcal{O}_K$ (resp. $\mathcal{O}_{\overline{K}}$, resp. $\mathcal{O}_{\widehat{\overline{K}}}$) l'anneau des entiers de K (resp. $\overline{K}$, resp. $\widehat{\overline{K}}$).

À tout groupe p-divisible X sur $\mathcal{O}_K$ est associé

- le module de Tate $T_p(X_{\overline{\eta}})$ qui est un $\mathbb{Z}_p[\Gamma_K]$-module ;
- l'isocristal de Dieudonné filtré $\underline{D}(X) = (D(X), \varphi, \mathrm{Fil}^\bullet(D(X) \otimes_{K_0} K))$, où $(D(X), \varphi)$ est l'isocristal de Dieudonné covariant de $X \otimes_{\mathcal{O}_K} k$ et

$$\mathrm{Fil}^n(D(X) \otimes K) = \begin{cases} D(X) \otimes K & n \leq -1 \\ \omega_{X^\vee}[1/p] & n = 0 \\ 0 & n \geq 1 \end{cases}$$

où $X^\vee$ est le dual de Cartier de X. L'espace cotangent $\omega_{X^\vee}[1/p]$ de $X^\vee$ à valeur dans K peut être considéré comme un sous-K-espace vectoriel de $D(X) \otimes_{K_0} K$ en utilisant l'algébre de Lie de la suite exacte associé à l'extension universelle vectorielle $E(X)$ de X (cf. [13])

$$0 \to \omega_{X^\vee} \to \mathrm{Lie}\, E(X) \to \mathrm{Lie}\, X \to 0$$

et en identifiant $\mathrm{Lie}\, E(X)[1/p]$ avec $D(X) \otimes_{K_0} K$.

Pour lier le module de Tate et l'isocristal de Dieudonné filtré des groupes p-divisibles sur $\mathcal{O}_K$, Fontaine a construit l'anneau $B_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$ qui est une K_0-algèbre munie d'une action de Γ_K, d'un Frobenius φ et d'une $\mathbb{Z}$-filtration. En utilisant cet anneau $B_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$, le module de Tate rationnel $V_p(X_{\overline{\eta}}) = T_p(X_{\overline{\eta}})[1/p]$ et l'isocristal de Dieudonné filtré $\underline{D}(X)$ se déterminent l'un et l'autre. Plus précisément, Fontaine a démontré dans [9] qu'il existe un isomorphisme de $B_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$-modules

$$V_p(X) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_{\overline{K}}) \xrightarrow{\sim} \underline{D}(X) \otimes_{K_0} B_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_{\overline{K}}) \tag{1}$$

compatible aux filtrations, aux actions de φ et aux morphismes de Frobenius si on munit le membre de gauche du Frobenius $p \otimes \varphi$ et celui de droite de $\varphi \otimes \varphi$.

Faltings a généralisé le théorème de comparaison (1) en un énoncé à coéfficients entiers. On utilise du coup $A_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$ qui est une sous-$\mathcal{O}_{K_0}$-algèbre de $B_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$ stable sous Frobenius et l'action de Galois. Il existe une application surjective $\theta : A_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_{\overline{K}}) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\widehat{\overline{K}}}$. Posons $\mathbb{E} := \mathrm{Lie}\, E(\tilde{X})$ avec $\tilde{X}$ un relèvement de $X \otimes \mathcal{O}_{\widehat{\overline{K}}}$ sur $A_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$. Il s'agit de l'évaluation du cristal de Dieudonné covariant sur l'epaississement θ. Le $A_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$-module $\mathbb{E}$ possède une $\mathbb{N}$-filtration, une action de Frobenius semi-linéaire φ et une action de Galois Γ_K. Faltings a montré dans ([8] théorème 5) qu'il existe un isomorphisme de périodes

$$T_p(X_{\bar{\eta}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Fil}^0\, \mathbb{E}^{\varphi=p}$$

compatible à l'action de Γ_K. Le morphisme induit

$$T_p(X_{\bar{\eta}}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_{\overline{K}}) \to \mathbb{E}$$

est un homomorphisme de $(A_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_{\overline{K}}), \varphi)$-modules injectif, strictement compatible aux filtrations, et de conoyau annulé par t, où $t \in A_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$ tel que $\varphi(t) = pt$ et $t \in \mathrm{Fil}^1 A_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_{\overline{K}}) \backslash \mathrm{Fil}^2 A_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$.

Dans cet article, on généralise le théorème de comparaison de Faltings précédent en diminuant les hypothèses necessaires sur la base. Plus précisément, on remplace la base $\mathcal{O}_K$ par l'anneau R qui est une $\mathbb{Z}_p$-algèbre noethérienne, p-adiquement complète, normale, intègre et sans p-torsion. Fixons une clôture algébrique du corps des fractions $\mathrm{Frac}(R)$ de R. Soit $\overline{R}$ la fermeture intégrale de R dans l'extension galoisienne maximale de $\mathrm{Frac}(R)$ étale au-dessus de $R[1/p]$. Alors $\overline{R}$ joue un rôle parallèle à $\mathcal{O}_{\overline{K}}$. Soit $\widehat{\overline{R}}$ le complété p-adique de $\overline{R}$. On peut construire l'anneau de Fontaine $A_{\mathrm{cris}}(\overline{R})$ de la même façon. Il est muni d'un Frobenius cristallin φ, d'une filtration et d'une action de

$$\Gamma := \mathrm{Gal}(\widehat{\overline{R}}/R) = \pi_1(\mathrm{Spec}(R[1/p]), \bar{\eta})$$

où $\bar{\eta}$ est le point géométrique au dessus du point générique associé au choix de la clôture algébrique de $\mathrm{Frac}(R)$. De même, on a une application surjective :

$$\theta : A_{\mathrm{cris}}(\overline{R}) \twoheadrightarrow \widehat{\overline{R}}.$$

THÉORÈME (4.1). — *Soit X un groupe p-divisible sur R. Supposons que* $\mathrm{Lie}\, X$ *et* $\mathrm{Lie}(X^\vee)$ *soient libres. Posons* $\mathbb{E} := \mathrm{Lie}\, E(\tilde{X})$ *avec $\tilde{X}$ un relèvement de $X \otimes \overline{R}$ sur $A_{\mathrm{cris}}(\overline{R})$.*

1. *Il existe un isomorphisme de périodes*

$$T_p(X_{\bar{\eta}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Fil}^0\, \mathbb{E}^{\varphi=p}$$

compatible à l'action de Γ.

2. *Le morphisme induit*

$$T_p(X_{\bar{\eta}}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_{\mathrm{cris}}(\overline{R}) \to \mathbb{E}$$

est un homomorphisme de $(A_{\mathrm{cris}}(\overline{R}), \varphi)$-modules injectif, strictement compatible aux filtrations, et de conoyau annulé par t. En particulier, il existe un isomorphisme de $(B_{\mathrm{cris}}(\overline{R}), \varphi)$-modules filtrés

$$V_p(X_{\bar{\eta}}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\mathrm{cris}}(\overline{R}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{E}[\tfrac{1}{pt}].$$