Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

LE LEMME FONDAMENTAL MÉTAPLECTIQUE DE JACQUET ET MAO EN ÉGALES CARACTÉRISTIQUES

Viet Cuong Do

Tome 143
Fascicule 1

2015

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 125-196

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un périodique trimestriel de la Société Mathématique de France.

Fascicule 1, tome 143, janvier 2015

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 43 € ($ 64)
Abonnement Europe : 176 €, hors Europe : 193 € ($ 290)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Bulletin de la Société Mathématique de France
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 0037-9484

Directeur de la publication : Marc Peigné

Bull. Soc. math. France
143 (1), 2015, p. 125–196

LE LEMME FONDAMENTAL MÉTAPLECTIQUE DE JACQUET ET MAO EN ÉGALES CARACTÉRISTIQUES

PAR VIET CUONG DO

RÉSUMÉ. — Jacquet et Mao ont établi une formule des traces relative qui conduira à la classification de l'image de la correspondance métaplectique comme ensemble des représentations distinguées. Le but de cet article est de prouver dans le cas des égales caractéristiques le lemme fondamental pour cette formule des traces relative.

ABSTRACT (*The metaplectic fundamental lemma of Jacquet and Mao in equal characteristic*)

Jacquet and Mao established a relative trace formula which will lead to the classification of the image of metaplectic correspondence as a set of distinguished representations. The aim of this paper is to prove in the case of equal characteristic the fundamental lemma for this relative trace formula.

1. Introduction

Soit $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles d'un corps global et $\widetilde{\mathrm{GL}}_r(\mathbb{A})$ le revêtement métaplectique de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ (c'est un revêtement à deux feuillets de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$, qui est une extension centrale par $\{\pm 1\}$, cf [11]). Pour $r = 2$, Jacquet [8] a montré qu'on pouvait utiliser une formule des traces relative pour caractériser l'image de l'application de relèvement automorphe de $\widetilde{\mathrm{GL}}_r(\mathbb{A})$ à $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ comme ensemble des représentations distinguées par le groupe orthogonal. Pour r arbitraire, Mao

Texte reçu le 5 juillet 2012, révisé le 27 mai 2014, accepté le 10 juin 2014.

VIET CUONG DO

Classification mathématique par sujets (2000). — 11L05, 14F20, 11F37.

Mots clefs. — Groupe métaplectique, correspondance métaplectique, formule des traces relative, lemme fondamental, somme exponentielle.

[14] a écrit la formule des traces relative correspondante. Pour achever la caractérisation de l'image du relèvement il reste entre autres un énoncé local à démontrer (le « lemme fondamental métaplectique de Jacquet-Mao »). L'objet de ce travail est de donner une démonstration de cet énoncé dans le cas de caractéristique positive.

On va d'abord énoncer ce lemme fondamental. Soient F un corps local non-archimédien, $\mathcal{O}$ son anneau des entiers et k son corps résiduel, que l'on suppose de caractéristique p impaire et de cardinal q (on sait seulement que dans le cas de caractéristique impaire, le revêtement de Kazhdan-Patterson local est scindé au-dessus de $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O})$ - qui est une propriété importante pour écrire la formule des traces relative de Mao). On fixe ϖ une uniformisante de F. Soit $\psi : k \to \mathbb{C}^*$ un caractère additif. On note $\Psi(x) = \psi(\mathrm{res}\, x\, \mathrm{d}\varpi)$; c'est un caractère additif de F dans $\mathbb{C}^*$. On note $v(x)$ la valuation de l'élément $x \in F$ et $|x| = q^{-v(x)}$. On note N_r le sous-groupe de GL_r formé des matrices triangulaires supérieures unipotentes, T_r celui formé des matrices diagonales et S_r le sous-schéma de GL_r formé des matrices symétriques. Soit $\theta : N_r(F) \to \mathbb{C}^*$ le caractère défini par $\theta(n) = \Psi(\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{r} n_{i-1,i})$.

Le revêtement de Kazhdan-Patterson local est (canoniquement) scindé au-dessus de $N_r(F)$ ainsi qu'au-dessus de $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O})$. On peut écrire les éléments de $\widetilde{\mathrm{GL}}_r(F)$ sous la forme $\tilde{g} = (g, z)$, avec $g \in \mathrm{GL}_r(F)$ et $z \in \{\pm 1\}$ et la multiplication est alors définie par

$$(g, z).(g', z') = (gg', \chi(g, g')zz'),$$

où χ est un certain cocycle, pour la description duquel on renvoie à Kazhdan-Patterson [11]. Ces notations étant fixées, le scindage σ au-dessus de $N_r(F)$ est simplement défini par $\sigma(n) = (n, 1)$ alors que le scindage κ^* au-dessus de $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O})$ est défini par $\kappa^*(g) = (g, \kappa(g))$; la fonction $\kappa : \mathrm{GL}_r(F) \to \{\pm 1\}$ n'est vraiment pas facile à calculer et son calcul dans la situation géométrique qu'on envisagera est l'un des résultats importants de ce travail.

Le groupe $N_r(F)$ agit sur $S_r(F)$ par $s \mapsto {}^t nsn$ et le groupe $N_r(F) \times N_r(F)$ agit sur $\mathrm{GL}_r(F)$ par $g \mapsto n^{-1}gn'$. On appelle *pertinentes* les orbites $\dot{s}$ sous l'action de $N_r(F)$ (resp. les orbites $\dot{g}$ sous l'action de $N_r(F) \times N_r(F)$) telles que pour tout n appartenant au fixateur $(N_r(F))_s$ de s on ait $\theta^2(n) = 1$ (resp. telles que pour toute couple (n, n') appartenant au fixateur $(N_r(F) \times N_r(F))_g$ de g on ait $\theta(n^{-1}n') = 1$). Dans cet article, on s'intéresse au cas où ces fixateurs sont triviaux, qui est en fait le cas fondamental [9]. Il existe alors un représentant dans l'orbite sous l'action de $N_r(F)$ qui est une matrice diagonale t (resp. un représentant de la forme $w_0 t$, où w_0 est la matrice de la permutation $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \cdots & r \\ r & r-1 & \cdots & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et t est une matrice diagonale, dans l'orbite sous l'action de $N_r(F) \times N_r(F)$).

Pour chaque matrice diagonale $t \in T_r(F)$, on introduit les deux intégrales orbitales

$$I(t) = \int_{N_r(F)} \phi_0({}^t ntn)\theta^2(n)dn$$

et

$$J(t) = \int_{N_r(F)\times N_r(F)} f_0(n^{-1}w_0tn')\theta(n^{-1}n')dndn',$$

où f_0 est la fonction définie par

$$f_0(g) = \begin{cases} \kappa(g), & \text{si } g \in \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}) \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$\phi_0(g) = \begin{cases} 1, & \text{si } g \in \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}) \cap S_r(F) \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

les mesures de Haar de $N_r(F)$ et $N_r(F) \times N_r(F)$ étant normalisées de sorte qu'elles attribuent la mesure 1 aux sous-groupes compacts ouverts formés des matrices à coefficients dans $\mathcal{O}$.

Soit $\zeta : k^* \to \{\pm 1\}$ le caractère quadratique non trivial ($\zeta(\lambda) = \lambda^{\frac{q-1}{2}}$, $\lambda \in k^*$). On note $\gamma(a, \Psi)$ la constante de Weil, qui est définie par la formule

$$\int \Phi^\vee(x)\Psi\left(\frac{1}{2}ax^2\right) dx = |a|^{-1/2}\gamma(a,\Psi) \int \Phi(x)\Psi\left(-\frac{1}{2}a^{-1}x^2\right) dx,$$

où $\Psi : F \to \mathbb{C}^*$ est un caractère additif, Φ est une fonction de Schwartz sur F et $\Phi^\vee$ est sa transformée de Fourier ($\Phi^\vee(x) = \int \Phi(y)\Psi(xy)dy$).

Conjecture 1.1 (Jacquet et Mao). — Soit $t = \mathrm{diag}(t_1, \dots, t_r)$, on note $a_i = \prod_{j=1}^{i} t_j$. On a alors $t = \mathrm{diag}(a_1, a_1^{-1}a_2, \dots, a_{r-1}^{-1}a_r)$ et

$$J(t) = \begin{cases} \mathfrak{t}(t)I(t) \\ \mathfrak{t}'(t)I(t), \end{cases}$$

où $\mathfrak{t}(t) = |\prod_{i=1}^{r-1} a_i|^{-1/2}\zeta(-1)^{\sum_{j\not\equiv r(\mathrm{mod} 2)} v(a_j)} \prod_{j\not\equiv r(\mathrm{mod} 2)} \gamma(a_j a_{j-1}^{-1}, \Psi)$ et où $\mathfrak{t}'(t) = |\prod_{i=1}^{r-1} a_i|^{-1/2}\zeta(-1)^{\sum_{j\equiv r(\mathrm{mod} 2)} v(a_j)} \prod_{j\equiv r(\mathrm{mod} 2)} \gamma(a_j a_{j-1}^{-1}, \Psi)$ (en convenant que $a_0 = 1$). De plus si $\mathfrak{t}(t) \neq \mathfrak{t}'(t)$, les deux intégrales $I(t)$ et $J(t)$ sont nulles.

Jacquet et Mao ont démontré leur conjecture pour GL_2 (voir [9]) et GL_3 (voir [14]) pour tout corps local de caractéristique résiduelle $\neq 2$ (la formule de [14] $\mu(a,b,c) = |a|^{-1}|b|^{-1/2}\gamma(a,\Psi)\gamma(-c,\Psi)$ doit en fait être corrigée en $\mu(a,b,c) = |a|^{-1}|b|^{-1/2}\gamma(-a,\Psi)\gamma(c,\Psi)$, comme on le voit en la comparant avec la formule de Jacquet [9] pour GL_2).