

# Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

## **NOMBRE DE CLASSES DES TORES DE MULTIPLICATION COMPLEXE ET BORNES INFÉRIEURES POUR LES ORBITES GALOISIENNES DE POINTS SPÉCIAUX**

Emmanuel Ullmo & Andrei Yafaev

**Tome 143**

**Fascicule 1**

**2015**

**SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE**

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

pages 197-228

---

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un  
périodique trimestriel de la Société Mathématique de France.

Fascicule 1, tome 143, janvier 2015

---

*Comité de rédaction*

|                       |                     |
|-----------------------|---------------------|
| Gérard BESSON         | Daniel HUYBRECHTS   |
| Emmanuel BREUILLARD   | Julien MARCHÉ       |
| Antoine CHAMBERT-LOIR | Christophe SABOT    |
| Charles FAVRE         | Laure SAINT-RAYMOND |
| Pascal HUBERT         | Wilhelm SCHLAG      |
| Marc HERZLICH         |                     |

Raphaël KRIKORIAN (dir.)

*Diffusion*

|                         |                          |                     |
|-------------------------|--------------------------|---------------------|
| Maison de la SMF        | Hindustan Book Agency    | AMS                 |
| Case 916 - Luminy       | O-131, The Shopping Mall | P.O. Box 6248       |
| 13288 Marseille Cedex 9 | Arjun Marg, DLF Phase 1  | Providence RI 02940 |
| France                  | Gurgaon 122002, Haryana  | USA                 |
| smf@smf.univ-mrs.fr     | Inde                     | www.ams.org         |

*Tarifs*

*Vente au numéro* : 43 € (\$ 64)

*Abonnement* Europe : 176 €, hors Europe : 193 € (\$ 290)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

*Secrétariat : Nathalie Christiaën*

*Bulletin de la Société Mathématique de France*

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie

75231 Paris Cedex 05, France

Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96

revues@smf.ens.fr • <http://smf.emath.fr/>

© *Société Mathématique de France* 2015

*Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.*

ISSN 0037-9484

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

---

# NOMBRE DE CLASSES DES TORES DE MULTIPLICATION COMPLEXE ET BORNES INFÉRIEURES POUR LES ORBITES GALOISIENNES DE POINTS SPÉCIAUX

PAR EMMANUEL ULLMO & ANDREI YAFAEV

---

RÉSUMÉ. — Dans cet article nous donnons des bornes inférieures pour les nombres de classe de tores algébriques à multiplication complexe. Nous en déduisons des bornes inférieures pour la taille des orbites galoisiennes de points spéciaux (inconditionnellement et sous l'hypothèse de Riemann généralisée).

ABSTRACT (*Complex multiplication tori class number and inferior boundary of special point Galois orbits*)

In this paper we give lower bounds for class numbers of CM algebraic tori. We deduce lower bounds for the size of the Galois orbits of special points in Shimura varieties (unconditionally and under the Generalised Riemann Hypothesis).

## 1. Introduction

Ce papier est motivé par la conjecture d'André-Oort dont voici l'énoncé.

CONJECTURE 1.1 (André-Oort). — *Soit  $S$  une variété de Shimura et soit  $\Sigma \subset S$  un ensemble de points spéciaux. Alors les composantes irréductibles de l'adhérence de Zariski de  $\Sigma$  sont des sous-variétés spéciales de  $S$ .*

---

*Texte reçu le 27 février 2012, accepté le 19 juillet 2013.*

EMMANUEL ULLMO, Université de Paris-Sud, Bat 425, 91405, Orsay Cedex France •

*E-mail* : [ullmo@math.u-psud.fr](mailto:ullmo@math.u-psud.fr)

ANDREI YAFAEV, University College London, Department of Mathematics, 25 Gordon street, WC1H 0AH, London, United Kingdom • *E-mail* : [yafaev@math.ucl.ac.uk](mailto:yafaev@math.ucl.ac.uk)

Classification mathématique par sujets (2000). — 11G18.

Cette conjecture a été récemment démontrée par Klingler et les deux auteurs [27], [14] en admettant l'hypothèse de Riemann généralisée. La stratégie consistait à combiner des méthodes galoisiennes et géométriques d'Edixhoven avec des techniques ergodiques de Clozel-Ullmo. Très récemment, Jonathan Pila a mis en place une stratégie faisant intervenir des idées issues de la logique pour attaquer la conjecture d'André-Oort [19], [21]. Cette nouvelle approche a déjà permis [20] de démontrer la conjecture d'André-Oort pour des produits de courbes modulaires de manière inconditionnelle. Qu'on adopte la stratégie d'Edixhoven ou celle de Pila, un des ingrédients majeurs est une borne inférieure suffisamment forte pour la taille des orbites sous Galois des points spéciaux des variétés de Shimura.

Il est à noter que la stratégie de Pila nécessite des meilleures bornes que celles requises par la méthode d'Edixhoven. La minoration de la taille des orbites sous Galois des points spéciaux obtenue dans [27] dépend de la validité de l'hypothèse de Riemann généralisée et est insuffisante pour les applications à la méthode de Pila. Notons que l'on ne sait pas à ce jour que sur l'espace de module  $\mathbb{A}_g$  des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension  $g \geq 4$  il n'y a qu'un nombre fini de points correspondants à des variétés abéliennes à multiplication complexe définies sur des extensions de  $\mathbb{Q}$  de degré borné.

Le but principal de cet article est d'obtenir des minorations pour la taille des orbites sous Galois de point spéciaux utilisables dans la stratégie de Pila. Nous obtenons en toute généralité ces bornes sous l'hypothèse de Riemann généralisée et dans certains cas de manière inconditionnelle. Notons aussi qu'il n'est pas évident de prévoir exactement le type de bornes nécessaire pour la méthode de Pila mais nous pensons que celles que nous obtenons sont difficilement améliorables qualitativement et probablement adaptées aux applications en vue.

Un point spécial  $x$  d'une variété de Shimura définit un tore algébrique  $T$  sur  $\mathbb{Q}$  et un corps de nombres CM  $E = E(x, T)$ , le corps reflex. On dispose alors d'un morphisme de tores algébriques sur  $\mathbb{Q}$  dit de réciprocité

$$r = r_{x,T} : R_E := \text{Res}_{E/\mathbb{Q}} \mathbb{G}_{m,E} \rightarrow T.$$

Soit  $M$  un tore algébrique sur  $\mathbb{Q}$ . Soit  $K_M^m$  le sous-groupe compact ouvert maximal de  $M(\mathbb{A}_f)$ . Le groupe de classes  $h_M$  de  $M$  est par définition le groupe fini

$$h_M = M(\mathbb{Q}) \backslash M(\mathbb{A}_f) / K_M^m.$$

Le morphisme de réciprocité  $r$  induit au niveau des groupes de classes une application  $\bar{r} : h_{R_E} \rightarrow h_T$  et l'orbite sous Galois du point spécial  $x$  est minorée par le cardinal de l'image de  $\bar{r}$ . Minorer la taille de l'orbite sous Galois de  $x$  revient donc à minorer le cardinal de l'image de  $\bar{r}$ .

La stratégie suivie dans ce papier est d’abord de minorer la taille du groupe de classes de  $T$  puis de borner la taille du conoyau de  $\bar{r}$ . Les bornes obtenues pour la taille de  $h_T$  sont inconditionnelles et ont la forme voulue. Nous pouvons minorer le conoyau de  $\bar{r}$  quand le noyau de  $r$  est connexe de manière inconditionnelle et obtenir les bornes voulues pour l’orbite de Galois de  $x$  dans ce cas. Nous donnons des critères assurant la connexité du noyau de  $r$  dans la section 4. Par exemple ce noyau est toujours connexe si  $x$  est un point spécial de  $\mathbb{A}_g$  pour  $g \leq 3$  ou si  $x$  est “Galois générique ” pour  $g$  arbitraire.

Quand le noyau de  $r$  n’est pas connexe, l’estimation du conoyau de  $\bar{r}$  semble être un problème sérieux de géométrie algébrique et de cohomologie galoisienne que nous n’avons pas su résoudre sans l’hypothèse de Riemann généralisée.

Précisons un peu la nature des résultats obtenus. Soit  $M$  un tore algébrique sur  $\mathbb{Q}$  de dimension  $d$ . Soit  $L$  le corps de décomposition de  $M$  et  $D_L$  la valeur absolue de son discriminant. Notre but est de donner une borne inférieure pour  $h_M$  en fonction de  $D_L$ . Soit  $X^*(M)$  le groupe de caractères de  $M$  et  $\chi_M$  le caractère de la représentation d’Artin correspondante de  $G = \text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ . On considère la fonction  $L$  d’Artin associée que l’on dénote  $L(s, M)$  et  $\rho_M$  son quasi-résidu dont la définition est donnée à la section 2.1.2.

On définit ensuite le *quasi-discriminant*  $D_M$  de  $M$ . Il est défini comme le rapport entre deux mesures de Haar sur  $M(\mathbb{A})$ . La proposition 3.1 donne une formule fermée qui relie  $D_M$  au conducteur d’Artin  $a(M)$  du module galoisien  $X^*(M) \otimes \mathbb{Q}$  et au cardinal du groupe des composantes du modèle de Néron de type fini de  $M$  sur  $\mathbb{Z}$ . Shyr [25] montre la formule :

$$(1) \quad h_M R_M = w_M \tau_M \rho_M D_M^{1/2}$$

où  $w_M$  est la taille du ‘groupe des unités de  $M$ ’,  $R_M$  le régulateur de  $M$  et  $\tau_M$  le nombre de Tamagawa. Il est à noter que dans le cas du tore  $M = \text{Res}_{F/\mathbb{Q}} \mathbb{G}_{mF}$  où  $F$  est un corps de nombres, on retrouve la formule classique pour le nombre de classes de l’anneau des entiers de  $F$ .

En explicitant et en évaluant les invariants arithmétiques de  $M$  intervenant dans la formule de Shyr (1) on montre que

$$(2) \quad h_M R_M \gg D_M^u$$

où les constantes ne dépendent que de  $d$  et sont explicites en fonction de  $d$ . La forme précise du résultat est donnée dans le théorème 2.3. Une fois la formule fermée pour  $D_M$  obtenue les résultats principaux sont une minoration de la forme voulue pour le conducteur d’Artin  $a(M)$  (proposition 3.2) et une estimation de type Brauer-Siegel pour le quasi-résidu  $\rho_M$  (proposition 2.1). Il est à noter que dans le cas où  $M$  est un tore de multiplication complexe  $T$  le régulateur  $R_T$  est trivial et nous obtenons une minoration de  $h_T$ .