Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

UR LA COHOMOLOGIE NON RAMIFIÉE DEGRÉ TROIS D'UN PRODUIT

Alena Pirutka

Tome 144
Fascicule 1

2016

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

pages 53-75

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un périodique trimestriel de la Société Mathématique de France.

Fascicule 1, tome 144, janvier 2016

Diffusion

Maison de la SMF	Hindustan Book Agency	AMS
Case 916 - Luminy	O-131, The Shopping Mall	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Arjun Marg, DLF Phase 1	Providence RI 02940
France	Gurgaon 122002, Haryana	USA
smf@smf.univ-mrs.fr	Inde	www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 43 € ($ 64)

Abonnement Europe : 178 €, hors Europe : 194 € ($ 291)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Bulletin de la Société Mathématique de France
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 0037-9484

Directeur de la publication : Marc Peigné

Bull. Soc. math. France
144 (1), 2016, p. 53–75

SUR LA COHOMOLOGIE NON RAMIFIÉE EN DEGRÉ TROIS D'UN PRODUIT

PAR ALENA PIRUTKA

RÉSUMÉ. — Soit $\mathbb{F}$ un corps fini et soit C une courbe projective et lisse sur $\mathbb{F}$. On établit la nullité du troisième groupe de cohomologie non ramifiée du produit $X \times C$ pour certaines surfaces projectives et lisses X sur $\mathbb{F}$. Cela s'applique en particulier aux surfaces géométriquement rationnelles.

ABSTRACT (*On the unramified cohomology in degree three of a product*)
Let $\mathbb{F}$ be a finite field and let C be a smooth projective curve over $\mathbb{F}$. We establish that the third unramified cohomology of the product $X \times C$ vanishes for some smooth projective surfaces X over $\mathbb{F}$. This applies in particular to geometrically rational surfaces.

1. Introduction

Soit $\mathbb{F}$ un corps fini. Soit $V/\mathbb{F}$ une variété projective et lisse, géométriquement intègre, de dimension 3, munie d'un morphisme $f : V \to C$ vers une courbe projective et lisse sur $\mathbb{F}$. Dans un article récent [9], Colliot-Thélène et Kahn ont établi le résultat suivant qui relie la conjecture de Colliot-Thélène et Sansuc sur les zéro-cycles de degré 1 sur la fibre générique V_η de f (cf. [8]) et le groupe de cohomologie non ramifiée $H^3_{\mathrm{nr}}(V, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$:

Texte reçu le 21 mai 2012, révisé et accepté le 22 mai 2013.

ALENA PIRUTKA, Centre de Mathématiques Laurent Schwartz, École Polytechnique, 91128 Palaiseau, France • *E-mail :* `alena.pirutka@polytechnique.edu`

Classification mathématique par sujets (2000). — 14F20; 14E22, 14C25.

Mots clefs. — Cohomologie non ramifiée, zéro-cycles, applications résidu, corps finis.

Supposons que la conjecture de Tate vaut pour les diviseurs sur V et que le groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(V, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ est divisible. S'il existe sur la surface V_η une famille de zéro-cycles locaux de degré 1, orthogonale au groupe de Brauer de V_η via l'accouplement de Brauer-Manin (cf. [22]*), alors il existe sur V_η un zéro-cycle de degré premier à l.*

Par conséquent, on s'intéresse à savoir si le groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(V, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ est nul pour une telle variété V. Plus généralement, on conjecture ([9] Conjecture 5.6), que le troisième groupe de cohomologie non ramifiée s'annule pour une $\mathbb{F}$-variété projective et lisse, de dimension 3, géométriquement uniréglée. Pour une variété fibrée en coniques au-dessus d'une surface, c'est un théorème de Parimala et Suresh [26]. Pour V comme ci-dessus, le premier cas à examiner est celui d'une fibration triviale $V = X \times C$ où X est une surface géométriquement rationnelle sur $\mathbb{F}$. Dans cette note on établit la conjecture pour de telles variétés V. Cela donne en particulier un nouveau cas où l'on arrive à comprendre le groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(V, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ pour une variété projective et lisse V de dimension trois, définie sur $\mathbb{F}$ (cf. [9] Question 5.4).

Pour k un corps on note $\bar{k}$ une clôture séparable de k. Si X est une k-variété, on écrit $\bar{X} = X \times_k \bar{k}$. Pour L un corps contenant k, on écrit $X_L = X \times_k L$. L'énoncé principal est le suivant.

THÉORÈME 1.1. — *Soit $\mathbb{F}$ un corps fini de caractéristique p. Soient C et X des variétés projectives et lisses, géométriquement intègres, définies sur $\mathbb{F}$, de dimensions respectives 1 et 2. Soit K le corps des fonctions de C. Faisons les hypothèses :*

(H1) $H^1(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}}) = 0$;
(H2) $b_2(\bar{X}) - \rho(\bar{X}) = 0$;
(H3) $NS(\bar{X})$ *est sans torsion ;*
(H4) $A_0(X_{\bar{K}}) = 0$.

Alors

$$H^3_{\mathrm{nr}}(X \times C, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) = 0$$

pour tout nombre premier $l \neq p$.

Les hypothèses du théorème sont vérifiées si $\bar{X}$ est une surface rationnelle. Elles sont aussi satisfaites pour les surfaces $K3$ supersingulières au sens de Shioda (cf. [16], ces surfaces n'existent qu'en caractéristique positive).

Pour établir le théorème 1.1, on procède par diverses réductions. On montre d'abord que le groupe de Chow des 0-cycles de degré zéro sur X_K est nul, au moins à la p-torsion près. On en déduit que tout élément ξ du groupe

$$H^3_{\mathrm{nr}}(X \times C, \mu_{l^r}^{\otimes 2}) \subset H^3(\mathbb{F}(X \times C), \mu_{l^r}^{\otimes 2})$$

provient de $H^3_{\text{ét}}(X_K, \mu_{l^r}^{\otimes 2})$. Ceci est fait dans la section 2. Dans la section 3, on vérifie que pour les cas que l'on considère, les applications résidus sont compatibles à des applications bord dans la suite spectrale de Leray. On se ramène ainsi à considérer le groupe $H^3_{\text{ét}}(X \times C, \mathbb{Z}/l)$, ce qui nous permet de déduire le résultat dans la section 4.

1.1. Rappels et notations. — Si A est un groupe abélien et n est un entier, on note $A[n]$ le sous-groupe de A formé par les éléments annulés par n. Pour l un nombre premier on note $A\{l\}$ le sous-groupe de A formé par les éléments de torsion l-primaire.

Étant donnés un corps k et un entier n inversible sur k, on note μ_n le k-schéma en groupes (étale) des racines n-ièmes de l'unité. Pour j un entier positif, on note $\mu_n^{\otimes j} = \mu_n \otimes \cdots \otimes \mu_n$ (j fois). Lorsque k contient une racine primitive n-ième de l'unité, on a un isomorphisme $\mu_n^{\otimes j} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/n$ pour tout j.

Pour X un schéma on note $\mathbb{G}_m$ le groupe multiplicatif sur X et le faisceau étale ainsi défini. On écrit $\operatorname{Br} X = H^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_m)$ pour le groupe de Brauer cohomologique de X.

Pour X une k-variété propre, on note $A_0(X)$ le groupe de Chow des 0-cycles de degré zéro sur X : $A_0(X) = \ker[CH_0(X) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z}]$. On note $\rho(\bar{X}) = \operatorname{rk}(\operatorname{NS}(\bar{X}))$ le rang du groupe de Néron-Severi de $\bar{X}$ (cf. [2] XIII 5.1) et $b_i(\bar{X}) = \dim_{\mathbb{Q}_l} H^i(\bar{X}, \mathbb{Q}_l)$, $l \neq \operatorname{car} k$, les nombres de Betti.

1.1.0.1. *Cohomologie non ramifiée.*— Pour k un corps, F un corps de fonctions sur k, n un entier inversible sur k, $i \geq 1$ un entier naturel et $j \in \mathbb{Z}$ un entier relatif on définit

$$H^i_{\text{nr}}(F/k, \mu_n^{\otimes j}) = \bigcap_A \operatorname{Ker}[H^i(F, \mu_n^{\otimes j}) \xrightarrow{\partial_A} H^{i-1}(k_A, \mu_n^{\otimes j-1})].$$

Dans cette formule, A parcourt les anneaux de valuation discrète de rang un, de corps des fractions F, contenant le corps k. Le corps résiduel d'un tel anneau A est noté k_A et l'application ∂_A est l'application résidu.

Pour X une k-variété intègre, on note $H^i_{\text{nr}}(X, \mu_n^{\otimes j}) \stackrel{\text{def}}{=} H^i_{\text{nr}}(k(X)/k, \mu_n^{\otimes j})$, où $k(X)$ est le corps des fonctions de X. On utilise aussi les groupes $H^i_{\text{nr}}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$ (resp. $H^i_{\text{nr}}(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(j))$ pour l un nombre premier) obtenus par passage à la limite inductive.

1.1.0.2. *Rappels de K-théorie.*— Pour X un schéma noethérien et j un entier positif on note $\mathcal{K}_j$ le faisceau de Zariski associé au préfaisceau $U \mapsto K_j(H^0(U, \mathcal{O}_U))$, le groupe $K_j(A)$ étant celui associé par Quillen à l'anneau A. Lorsque X est une variété lisse sur un corps k, la conjecture de Gersten, établie par Quillen, permet de calculer les groupes de cohomologie de Zariski