Raconte moi... la dimension fractale

• C. Tricot

On a inventé la notion de dimension pour classifier les ensembles négligeables de la droite. Selon É. Borel (1913), un ensemble de mesure nulle peut être inclus dans la réunion d'une infinité dénombrable d'intervalles u_n tels que la série $\sum u_n$ converge, et tout point de E appartient à une infinité de ces intervalles (nommés tout d'abord des *intervalles d'exclusion*). « ... Pour ces diverses raisons la notion d'ensemble de mesure nulle est primordiale; mais c'est en même temps une notion si générale qu'on ne peut espérer approfondir réellement cette notion qu'en étudiant de près cette notion générale, c'est-à-dire en ne confondant pas entre eux tous les ensembles de mesure nulle. La classification basée sur la décroissance asymptotique des intervalles d'exclusion me paraît être un premier pas dans cette étude qui s'impose aux analystes » [2]. En effet, la dimension sera toujours associée aux ordres de croissance des fonctions vers 0 ou vers l'infini.

1. Les indices associés à l'ensemble complémentaire

Borel y reviendra en 1948, à l'occasion d'un problème sur les fractions continues : à quelles conditions la somme de deux ensembles compacts de la droite est-elle de mesure nulle, ou bien au contraire contient-elle un intervalle ? Pour donner des conditions suffisantes, Borel définit divers indices de « raréfaction ». Le compact E est, dans un intervalle ouvert donné, le complémentaire d'une réunion au plus dénombrable d'intervalles ouverts u_n. Si E est infini, et ne contient aucun intervalle, la suite (u_n) est infinie. Supposons les u_n rangés de façon que les longueurs $|u_n|$ forment une suite décroissante. La *raréfaction logarithmique* est

$$\rho = \limsup \frac{\ln n}{\ln n - \ln \sum_{i=n}^{+\infty} |u_i|}.$$

Plus tard, mais sans doute indépendamment, Besicovitch et Taylor utiliseront pour majorer la dimension de Hausdorff un indice presque identique :

$$\liminf \frac{\ln n}{\ln n - \ln \sum_{i=n}^{+\infty} |u_i|}.$$

Il existe bien d'autres indices du même type [11]. Le plus simple est sans doute

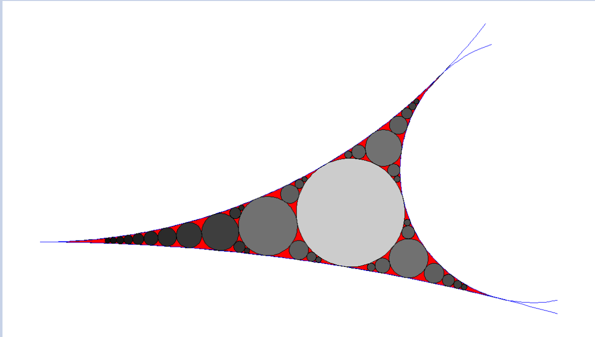
$$\limsup \frac{\ln n}{-\ln |u_n|},$$

qui peut aussi s'écrire comme l'*indice de Taylor-Besicovitch*

$$\inf\{\alpha : \sum_n |u_n|^\alpha < +\infty\}.$$

Ils seront généralisés au plan dans des études sur certaines *surfaces poreuses*. Par exemple, on a considéré l'ensemble résiduel de l'*empilement apollonien*, formé de cercles inscrits dans des triangles curvilignes. L'indice de Taylor-Besicovitch de la suite des diamètres peut être comparé à la dimension de Hausdorff (voir [12] pour des références générales).

Figure 1 – L'ensemble résiduel du *packing apollonien* a une dimension de Hausdorff égale à l'exposant de convergence des diamètres.

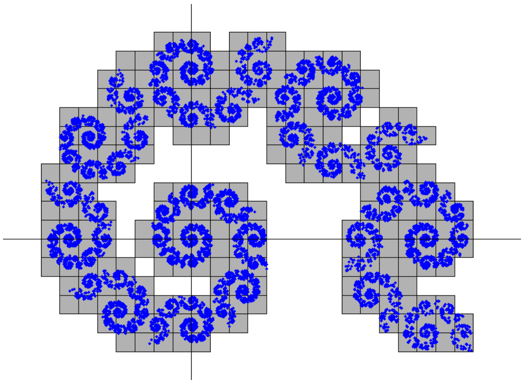


2. Et ceux associés aux recouvrements

Mais auparavant, Bouligand avait introduit des indices fondés sur les recouvrements de E par des intervalles [4]. Si ω_n désigne le nombre minimum d'intervalles de longueur l^n recouvrant E (en général on les prend dans un réseau), l'*ordre dimensionnel* de Bouligand est la limite, lorsqu'elle existe, du rapport

$$\frac{\ln \omega_n}{n \ln l}.$$

FIGURE 2 – La dimension de boîtes est l'ordre de croissance du nombre de carrés recouvrant l'ensemble.



On peut aussi compter le nombre minimum $N_\epsilon(E)$ de boules de rayon ϵ recouvrant E, ou le nombre maximum $M_\epsilon(E)$ de boules disjointes de rayon ϵ centrées sur E, et considérer les rapports

$$\frac{\ln N_\epsilon(E)}{-\ln \epsilon} \quad , \quad \frac{\ln M_\epsilon(E)}{-\ln \epsilon}.$$

Ces trois rapports ont le même ordre de grandeur lorsque n tend vers l'infini et ϵ vers 0. En cas de convergence la limite est la célèbre *dimension de boîtes*. L'avantage de ces indices de recouvrement, c'est qu'ils sont faciles à généraliser en dimension 2 ou 3. L'indice

$$\liminf \frac{\ln N_\epsilon(E)}{-\ln \epsilon}$$

a été utilisé par Pontrjagin et Schnirelmann (*ordre métrique*), pour comparaison avec la dimension topologique ; et la limite supérieure par Hawkes (*dimension d'entropie*). L'indice

$$\limsup \frac{\ln M_\epsilon(E)}{-\ln \epsilon}$$

est la *dimension métrique* de Kolmogorov. Il y a eu d'autres utilisations de ces indices, sous des vocables différents. Avons-nous donc affaire à une multitude de dimensions ? Non, car tous ces indices de recouvrement coïncident entre eux [11] ; et ils sont égaux à ceux associés aux intervalles complémentaires sur la droite, à condition que E soit de mesure nulle. Les références sont nombreuses, mais la notion mathématique est toujours la même... [12].

Un avantage de la dimension de boîtes, c'est qu'on peut en donner une approximation numérique à partir de données réelles, à condition de bien définir les échelles du calcul et de donner un sens à la notion de limite. Mais pour les théoriciens, elle a l'inconvénient de ne pas tenir compte des propriétés topologiques de l'ensemble. En particulier, la dimension d'un ensemble borné est égale à celle de son adhérence ! Bouligand avait lui-même remarqué que la dimension de l'ensemble $\{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$ est $\frac{1}{2}$. Vue comme une limite supérieure, la dimension de boîtes, notée Δ, a la propriété de *stabilité* [13] : $\Delta(E_1 \cup E_2) = \max\{\Delta(E_1), \Delta(E_2)\}$, mais non celle de *$\sigma$-stabilité* : elle n'est pas stable pour une réunion dénombrable.

3. La dimension de Hausdorff

C'est Hausdorff [6] en 1919 qui, s'inspirant de la théorie de la mesure de Caratheodory, précise le mieux à son époque la notion de dimension, du point de vue de la théorie de la mesure. On se donne un réel $\alpha > 0$. Pour tout $\epsilon > 0$, on considère *tous les recouvrements* possibles de E par des ensembles de diamètre $\leqslant \epsilon$:

$$H_\epsilon^\alpha(E) = \inf\{\sum_n \mathrm{diam}(E_n)^\alpha : E \subset \cup E_n, \mathrm{diam}(E_n) \leqslant \epsilon\}.$$

Cette quantité est une fonction décroissante de ϵ. Elle a donc une limite (éventuellement $+\infty$) lorsque ϵ tend vers 0. La *mesure de E en dimension α* est $H^\alpha(E) = \lim_{\epsilon \to 0} H_\epsilon^\alpha(E)$. Il s'agit d'une mesure extérieure au sens de Caratheodory. On observe qu'elle prend les valeurs 0 ou $+\infty$, sauf éventuellement pour une valeur de coupure qui est la *dimension de Hausdorff* :

$$\dim_H(E) = \inf\{\alpha : H^\alpha(E) = 0\} = \sup\{\alpha : H^\alpha(E) = +\infty\}.$$

Les mesures de Hausdorff forment toute une famille de mesures intermédiaires entre les mesures de longueur, d'aire, de volume, etc. Il suffit de changer la valeur de α. De même, $\dim_H(E)$ est une *dimension* fractionnaire, qui fait l'interpolation entre la dimension 1 du segment, 2 du disque, 3 de la sphère... Ce sera le point de départ de nombreux travaux de Besicovitch. On peut remarquer le commentaire, un peu critique, de Borel [3] à ce sujet :

« Je dois tout d'abord faire observer que la méthode de M. Besicovitch présente avec la mienne une différence analogue entre ma définition de mesure des ensembles et la définition de M. Lebesgue ». En effet Borel était un adepte des *mathématiques constructives*. La dimension de Hausdorff, définie à partir de bornes inférieures, ne se construit pas numériquement. Il faudra donc distinguer entre deux types de dimensions : les dimensions théoriques, appréciées du mathématicien, et dont la valeur ne se calcule que sur des ensembles d'un type particulier ; et les dimensions de portée plus pratique, dont on peut donner des estimations sur les données numériques, mais qui s'insèrent mal dans un traité de Théorie Géométrique de la Mesure. Les unes sont σ-stables, car elles proviennent d'une famille de mesures ; et les autres non.

Dans [13] on trouvera une autre définition de dimension, qui provient également d'une famille de mesures : la *dimension d'empilement* (*packing dimension*). Au lieu de recouvrir l'ensemble E, on préfère considérer des boules disjointes centrées sur E (*empilements*) pour définir une autre famille de mesures. La dimension correspondante se comporte comme la symétrique de la dimension de Hausdorff dans de nombreux résultats (les $\liminf$ sont remplacées par des $\limsup$ etc.).

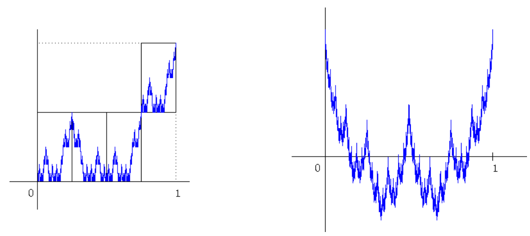
À l'époque où la mode des *fractales*, due à B. Mandelbrot, a décollé, il y a eu beaucoup de confusion sur ces notions de dimension. De nombreux chercheurs ont admis allègrement que la dimension de boîtes était une bonne approximation de la dimension de Hausdorff. L'inégalité $\dim_H(E) \leqslant \Delta(E)$ est toujours vraie, mais l'égalité ne se produit que sur des ensembles bien particuliers ; le type le plus connu est celui des ensembles *à similitude interne*, ou *auto-similaire* pour employer une mauvaise traduction du *self-similar* anglais. Ainsi la courbe de Von Koch est la réunion de 4 images d'elle-même par des similitudes de rapport $\frac{1}{3}$, et sa dimension (de boîtes, de Hausdorff, ...) vaut $\frac{\ln 4}{\ln 3}$. Mais dès qu'on étudie les ensembles *auto-affines*, les dimensions peuvent être différentes. Par exemple, pour la *courbe de McMullen* on trouve [8] $\Delta(E) = \frac{3}{2}$ et $\dim_H(E) = \ln(1+\sqrt{3})/\ln 2$.

Pour la courbe de la *fonction de Weierstrass*, définie pour tout x comme

$$W_H(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \omega^{nH} \cos(\omega^n x + \phi_n)$$

où $\omega > 1$, $0 < H < 1$, et (ϕ_n) est une suite quelconque de phases, on peut vérifier que $\Delta(E) = 2 - H$. C'est aussi la valeur supposée de la dimension de Hausdorff, mais on n'a pu le démontrer que dans certains cas particuliers (par exemple, lorsque les phases sont nulles et ω est entier, voir [9]), ou presque sûrement lorsque les ϕ_n sont aléatoires [7]. L'égalité $\dim_H(E) = 2 - H$ est encore à vérifier dans toute sa généralité...

Figure 3 – Les courbes de McMullen et de Weierstrass.



4. Mesures portées par l'ensemble

Notons que pour calculer, de façon effective, une dimension de Hausdorff, un procédé très généralement utilisé consiste à étudier une mesure μ portée par E. La construction d'une telle mesure peut être suggérée par la construction même de E, comme dans le cas des ensembles à similitude interne. La dimension dépend alors des rapports $\alpha(x,\epsilon) = \ln \mu(B_\epsilon(x))/\ln \epsilon$. Si la mesure est bien équilibrée, c'est-à-dire si tous ces rapports tendent uniformément vers une même limite α, alors $\alpha = \Delta(E) = \dim_H(E)$. Si $\liminf \alpha(x,\epsilon) = \alpha$ pour tout x, alors α est la valeur de la dimension de Hausdorff de E. Si $\limsup \alpha(x,\epsilon) = \alpha$ pour tout x, alors α est la valeur de la dimension d'empilement. Il y a bien d'autres résultats de ce type. Mais il faut savoir que l'existence de mesures bien équilibrées n'est pas toujours facile à prouver. Pour la fonction de Weierstrass on la cherche encore !

On ne saurait décrire ici les nombreux domaines où la dimension de Hausdorff a été utilisée. Donnons quelques aperçus.

5. Relation avec la dimension capacitaire

Soit $\alpha > 0$, et μ une mesure borélienne sur $\mathbb{R}^n$. Le *potentiel d'ordre α* de μ en un point x est

$$U_\alpha^\mu(x) = \int \frac{d\mu(y)}{|x-y|^\alpha},$$

et l'*énergie d'ordre* α :

$$I_\alpha(\mu) = \int U_\alpha^\mu(x)\, d\mu(x) = \iint \frac{d\mu(x)\, d\mu(y)}{|x-y|^\alpha}.$$

On lui associe la *dimension capacitaire* d'un ensemble E, en posant

$$\dim_c(E) = \sup\{\alpha : \exists \mu \text{ telle que } \mu(E) > 0 \text{ et } I_\alpha(\mu) < +\infty\}.$$

En fait on peut montrer que l'on retrouve ainsi la dimension de Hausdorff : pour tout ensemble analytique E, $\dim_c(E) = \dim_H(E)$. Un tel résultat s'obtient au moyen d'arguments du type suivant (lemme de Frostman) : *si E est un compact tel que $H^\alpha(E) > 0$, on peut construire une mesure μ telle que $E = \mathrm{Supp}(\mu)$ et pour tout $x \in E$, $\mu(B_\epsilon(x)) \leqslant \epsilon^\alpha$.*

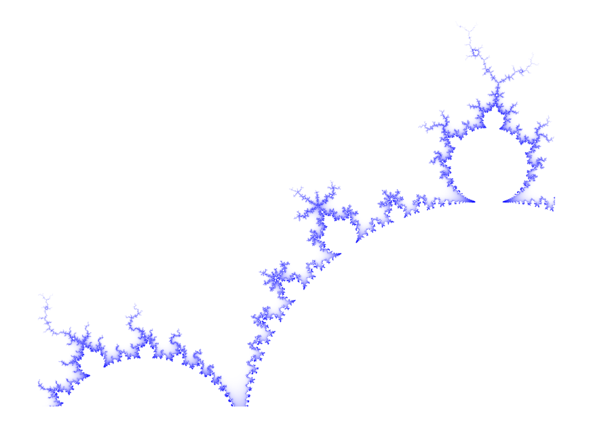
Il existe d'intéressantes applications de la théorie du potentiel en calculs de dimension, en particulier lorsqu'on étudie les projections d'un ensemble. Voici un résultat typique, qui peut se généraliser dans un contexte beaucoup plus large en utilisant les énergies de mesures.

Soit E un ensemble analytique dans le plan, et p_θ la projection orthogonale sur une droite de direction θ. Alors pour presque tout θ, $\dim_H(p_\theta(E)) = \min\{1, \dim_H(E)\}$. Et si $\dim_H(E) > 1$, alors la mesure de Lebesgue de $p_\theta(E)$ est non nulle, pour presque tout θ.

6. L'ensemble de Mandelbrot

La dimension de Hausdorff de la frontière de l'ensemble de Mandelbrot vaut 2. Ce résultat, conjecturé par Mandelbrot, a été démontré en 1990 par M. Shishikura [10]. Il reste une conjecture : cette frontière est d'aire (mesure de Lebesgue) nulle. On sait aussi que pour un ensemble dense de nombres complexes c dans cette frontière, l'ensemble de Julia J_c est de dimension 2. Il existe même des ensembles de Julia d'aire non nulle [5].

Figure 4 – Un morceau de la frontière de l'ensemble de Mandelbrot.



7. Le mouvement brownien

La trajectoire du mouvement brownien dans le plan est une courbe fractale bien connue. On sait depuis longtemps que presque sûrement la dimension de la trajectoire est 2, ce qui est le maximum dans le plan. B. Mandelbrot avait conjecturé que la dimension de la frontière extérieure (ou de celle des petites îles entourées par la trajectoire) était égale à $\frac{4}{3}$. Cette conjecture a été démontrée récemment (voir [1] pour une présentation générale).

Références

[1] V. Beffara. « Raconte-moi le processus SLE ». *Gazette des mathématiciens* **144** (2015), p. 59-63.

[2] É. Borel. « Les ensembles de mesure nulle ». *Bull. Soc. Math. Fr.* **41** (1913), p. 1-19.

[3] É. Borel. « Sur les ensembles de mesure nulle ». *Physical Review* **25** (1935), p. 7-19.

[4] G. Bouligand. « Ensembles impropres et nombre dimensionnel ». *Bull. Sc. math.* **52** (1928), p. 320-376.

[5] X. Buff et A. Chéritat. « Quadratic Julia sets with positive area ». *Ann. of Math.* **176** (2012), p. 673-746.

[6] F. Hausdorff. « Dimension und äusseres Mass ». *Math. Ann.* **79** (1919), p. 157-179.

[7] B. Hunt. « The Hausdorff dimension of graphs of Weierstrass functions ». *Proc. Amer. Math. Soc.* **126** (1998), p. 791-800.

[8] C. McMullen. « The Hausdorff dimension of general Sierpinski carpets ». *Nagoya Math. J.* **96** (1984), p. 1-9.

[9] W. Shen. « Hausdorff dimension of the graphs of the classical Weierstrass functions ». *arXiv:1505.03986v1 [math.DS]* (mai 2015).

[10] M. Shishikura. « The Hausdorff dimension of the boundary of the Mandelbrot set and Julia sets ». *Ann. of Math.* **147** (1998), p. 225-267.

[11] C. Tricot. « Douze définitions de la densité logarithmique ». *Physical Review* **293** (1981), p. 549-552.

[12] C. Tricot. *Géométries et mesures fractales*. Ellipses, 2008.

[13] C. Tricot. « Two definitions of fractional dimension ». *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **91** (1982), p. 57-74.

Claude Tricot

Laboratoire de Mathématiques, université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand

Claude Tricot est professeur à l'université Blaise Pascal de Clermont-Ferrand, après un début de carrière en Angleterre et au Canada. Il a participé à l'émergence de la géométrie fractale dans les années 80, en particulier en introduisant les mesures et la dimension de packing.