Bull. Soc. Math. France
146 (4), 2018, p. 633-647

UN ISOMORPHISME DE SUSLIN

PAR SHANE KELLY

RÉSUMÉ. — Dans cette note on constate qu'on peut enlever l'hypothèse de la résolution des singularités de l'isomorphisme construit par Suslin entre la cohomologie étale à supports compacts et les groupes de Chow supérieurs de Bloch. On démontre de plus que l'on peut obtenir cet isomorphisme à partir de la réalisation étale d'Ivorra.

ABSTRACT (*An isomorphism by Suslin*). — In this note we observe that we can remove the resolution of singularities hypothesis from the isomorphism constructed by Suslin between étale cohomology with compact supports and Bloch's higher Chow groups. Moreover, we show that this isomorphism can be obtained from Ivorra's étale realisation functor.

1. Introduction

Un premier but de cette note est d'observer qu'en remplaçant le théorème [19, Theorem 4.1.2] de Voevodsky avec le résultat principal ([8, Theorem 5.3.1], [9, Theorem 4.0.1]) de la thèse de l'auteur, on peut enlever l'hypothèse de la résolution des singularités dans le résultat principal de [17].

Texte reçu le 20 juin 2016, modifié le 3 avril 2017, accepté le 14 avril 2017.

SHANE KELLY, Tokyo Institute of Technology, Department of Mathematics, 2-12-1 Ookayama, Meguro-ku, Tokyo 152-8551, Japan • *E-mail :* shanekelly@math.titech.ac.jp

Classification mathématique par sujets (2010). — 14F20, 19E15, 14C15.

Mots clefs. — Cohomologie étale, cycles algébriques, cohomologie motivique, groups de Chow supérieurs.

doi:10.24033/bsmf2768

Théorème 1.1 ([8, Theorem 5.6.1], cf. [17, Introduction]). — *Soit k un corps algébriquement clos, m un entier inversible dans k, $\pi_X : X \to k$ un morphisme séparé de type fini et soit $j \leq 0$. Alors il existe un isomorphisme naturel*

$$\Phi_{Sus} : H_c^{n+2j}(X, \mathbb{Z}/m(j)) \cong CH_j(X, n; \mathbb{Z}/m)^{\#}$$

où H_c est la cohomologie étale à support compact, la notation CH désigne les groupes de Chow supérieurs, et on utilise $(-)^{\#}$ pour indiquer $\hom_{Ab}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

Suslin définit cet isomorphisme à partir d'un isomorphisme $CH_0(X, n; \mathbb{Z}/m) \cong H_n^{sing}(X, \mathbb{Z}/m)$ (démontré dans [17]), un isomorphisme $H_c^n(X, \mathbb{Z}/m) \cong H^n_{sing}(X, \mathbb{Z}/m)$ (démontré dans [14]), et l'isomorphisme canonique

$$H^n_{sing}(X, \mathbb{Z}/m) \cong H_n^{sing}(X, \mathbb{Z}/m)^{\#}. \tag{1}$$

D'un autre côté, on peut définir un deuxième morphisme

$$\Phi_R : H_c^{n+2j}(X, \mathbb{Z}/m(j)) \to CH_j(X, n; \mathbb{Z}/m)^{\#}$$

à partir du morphisme canonique

$$\hom(\mathbb{Z}/m, R\pi_{X!}(\mathbb{Z}/m)_X(p)[q]) \to \hom(R\pi_{X!}(\mathbb{Z}/m)_X(p)[q], \mathbb{Z}/m)^{\#} \tag{2}$$

où les morphismes sont dans la catégorie dérivée $D_{et}(k, \mathbb{Z}/m)$ des faisceaux de $\mathbb{Z}/m$-modules sur le petit site étale de k (cf. Définition 3.4).

La deuxième but de cette note est de démontrer que Φ_{Sus} est égal à Φ_R.

Proposition (Proposition 4.3, Proposition 4.5). — *Sous les hypothèses du Théorème 1.1, l'isomorphisme*

$$H^n_{sing}(X, \mathbb{Z}/m) \cong \hom(\mathbb{Z}/m, R\pi_{X!}(\mathbb{Z}/m)_X[n])$$

défini dans [14], *et le morphisme*

$$H_n^{sing}(X, \mathbb{Z}/m) \to \hom(R\pi_{X!}(\mathbb{Z}/m)_X[n], \mathbb{Z}/m)$$

de la Définition 3.4 (défini à partir du foncteur de réalisation d'Ivorra, cf. Section A), sont compatibles avec les accouplements canoniques (1) et (2). Par conséquence, Φ_{Sus} est égal à Φ_R.

Conventions. Pour un groupe abélien A, les éléments de $A^{\#}$ seront induits en général par un morphisme $A \to \mathbb{Z}/m$ et un choix d'injection $\mathbb{Z}/m \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Donc, on choisit une fois pour tout une telle injection.

2. L'isomorphisme de Suslin

2.1. Les groupes de Chow supérieurs et l'homologie singulière. — Le but de cette sous-section est de permettre au lecteur d'observer que l'hypothèse de la résolution des singularités de [17, Theorem 3.2] (reproduit en dessous comme le Théorème 2.3) n'est pas nécessaire, si l'on remplace [19, Theorem 4.1.2] avec [8, Theorem 5.1.3], [9, Theorem 4.0.1] (reproduit en dessous comme le

Théorème 2.2). À cette fin, on rappelle la notation de [17, Section 2], son résultat principal, et son extension au cas non-affine. On constate aussi que l'extension de Levine ([11, Theorem 1.7]) du théorème de localisation de Bloch nous permet de travailler avec les schémas séparé de type fini, au lieu des schémas quasi-projectifs.

Soit k un corps et soit X un k-schéma[1] séparé de type fini. Soit $z_j(X,n)$ le groupe abélien libre engendré par les sous-variétés de Δ^n_X de dimension $j+n$ telles que l'intersection avec chaque coface $\Delta^m_X \subset \Delta^n_X$ est de dimension $\leq j+m$ dans Δ^m_X (où Δ^n_S est le sous-schéma linéaire de $\mathbb{A}^{n+1}_S$ défini par $t_0+\cdots+t_n=1$ et les cofaces sont les sous-variéties définies par $t_{j_1}=0,\ldots,t_{j_{n-m}}=0$). Par définition ([1], [11]), les groupes $CH_j(X,n)$ sont les groupes d'homologie du complexe $\cdots \to z_j(X,2)\to z_j(X,1)\to z_j(X,0)\to 0\to\ldots$ où les différentielles sont $\sum_{i=0}^n(-1)^i\partial_i^*$ et le morphisme ∂_i^* est l'intersection avec la coface $t_i=0$. Le complexe $z_j(X,*)$ possède un sous-complexe $z_j^{equi}(X,*)$ où $z_j^{equi}(X,n)$ est le sous-groupe libre engendré par les sous-variétés $V\subset\Delta^n_X$ tels que la projection vers Δ^n_k est un morphisme équidimensionel[2] de dimension relative j. Le théorème technique principal de [17] est le suivant. Il est vrai sans aucune hypothèse sur le corps de base k !

Théorème 2.1 ([17, Theorem 2.1]). — *Soit X un k-schéma affine équidimensionnel et $j\geq 0$. Alors, l'inclusion de complexes $z_j^{equi}(X,*)\hookrightarrow z_j(X,*)$ est un quasi-isomorphisme.*

Écrivons Sch/k pour la catégorie des k-schémas séparés de type fini et Sm/k pour la sous-catégorie pleine des k-schémas lisses. Pour $X\in\mathsf{Sch}/k$ et $t\geq 0$, Suslin écrit $z_t(X)$ pour le préfaiscau $z_{equi}(X/k,t)\otimes\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]$ de [16].[3]

Les groupes de (co)homologie singulière d'un préfaisceau F sur Sch/k sont définis comme $H_n^{sing}(F)=H_n(C_*F)$ (où C_*F est le complexe avec $C_nF=F(\Delta^n_k)$) et pour un groupe abélien Λ comme

$$H_n^{sing}(F,\Lambda)=H_n(C_*F\overset{L}{\otimes}\Lambda),\quad H^n_{sing}(F,\Lambda)=H^n(\mathrm{RHom}(C_*F,\Lambda)).$$

1. Suslin et Bloch travaillent avec un X équidimensionnel mais cette hypothèse n'est pas nécessaire, cf. [11, Introduction].

2. Quand on écrit équidimensionnel de dimension relative t on veut dire un morphisme de schémas $f:W\to V$ qui est de type fini, dominant, est pour lequel le fonction $\dim p^{-1}p(-)$ sur W est constant et égal à t.

3. Le préfaisceau $z_{equi}(X/k,t)\otimes\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]$ est un *qfh*-faisceau d'après [16, Proposition 4.2.5]. Puis le préfaiseau $Cycl_{equi}(X/k,t)\otimes\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]$ est égal à $z_t(X)$ sur les schémas normaux d'après [16, Proposition 3.4.3]. Enfin, l'inclusion canonique $z_{equi}(X/k,t)\subseteq Cycl_{equi}(X/k,t)$ devient un isomorphisme après $-\otimes\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]$, pourtant il n'y a pas de référence clair. Le mieux serait [16, Lemma 3.3.2, Lemma 3.3.9(2)]. Puisque chaque schéma admet un *qfh*-recouvrement par des schémas normaux, cela implique l'identification $z_{equi}(X/k,t)\otimes\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]=z_t(X)$.

Le foncteur $C_* : \mathsf{PreShv}(\mathsf{Sch}/k) \to \mathsf{Comp}(\mathsf{Ab})$ admet une généralisation $\underline{C}_* : \mathsf{PreShv}(\mathsf{Sch}/k) \to \mathsf{Comp}(\mathsf{PreShv}(\mathsf{Sch}/k))$ dont C_* n'est que le complexe des sections globales. Elle est définie par $(\underline{C}_n F)(Y) = F(\Delta^n_Y)$.

On remplace le théorème [19, Theorem 4.1.2] de Voevodsky (qui apparait comme [17, Theorem 3.1] dans l'article de Suslin) avec la version suivante qui ne suppose pas que la résolution des singularités soit vraie.

Théorème 2.2 ([8, Theorem 5.1.3], [9, Theorem 4.0.1], cf. [19, Theorem 4.1.2]). — *Soit k un corps parfait de caractéristique exponentielle p. Soit F un préfaisceau de $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]$-modules avec transferts tels que*[4] *$F_{cdh} = 0$. Alors, l'image de $\underline{C}_* F$ dans la catégorie des complexes de faisceaux de Nisnevich sur Sm/k est acyclique.*

Ce théorème implique tout de suite l'extension suivante.

Théorème 2.3 (cf. [17, Theorem 3.2]). — *Soit k un corps parfait de caractéristique exponentielle p. Alors, pour tout k-schéma séparé de type fini X et tout $j \geq 0$, l'inclusion canonique de complexes*

$$C_*(z_j(X)) \left[\frac{1}{p}\right] = z_j^{equi}(X, *) \left[\frac{1}{p}\right] \to z_j(X, *) \left[\frac{1}{p}\right]$$

est un quasi-isomorphisme. Par conséquence, cette inclusion induit des isomorphismes

$$\Phi_s^{CH} : H_n^{sing}(z_j(X), \mathbb{Z}/m) \xrightarrow{\sim} CH_j(X, n; \mathbb{Z}/m) \tag{3}$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout m premier à p.

Démonstration. — On reproduit la démonstration de [17, Theorem 3.2] qui marche sans problème une fois que [17, Theorem 3.1] (i.e., [19, Theorem 4.1.2]) est remplacé par Théorème 2.2.

On travaille par récurrence sur $d = \dim X$. Si $d = 0$, les deux complexes sont égaux, donc considérons le cas $d > 0$, et assumons que le résultat est connu pour les schémas de dimension inférieure à d. Soit $Y \subset X$ un sous-schéma fermé de dimension $< d$ tel que $U = X - Y$ est affine équidimensionnel de dimension d. La suite de préfaisceaux $0 \to z_j(Y) \to z_j(X) \to z_j(U)$ est exacte, et la faisceau cdh associé à $z_j(U)/z_j(X)$ est zéro ([15, Theorem 4.2.9, Theorem 4.3.1]). D'où, d'après le Théorème 2.2, l'application de $(\underline{C}_*(-))_{Nis}(k) = C_*(-)$ donne un triangle distingué dans la catégorie dérivée des groupes abéliens. De l'autre côté, la

4. La cdh-topology sur Sch/k est engendrée par la topologie de Nisnevich, est les morphismes $Y \to X$ propres complètement décomposés. Par *complètement décomposé* on veut dire que le morphisme induit $Y(K) \to X(K)$ est surjectif pour toute extension de corps K/k (les corps de fonctions y compris). On renvoie le lecteur qui ne connait pas la cdh topologie au très accessible [15, Section 5].

suite $z_j(Y,*) \to z_j(X,*) \to z_j(U,*)$ est aussi un triangle distingué ([11, Theorem 1.7], [1, Theorem 3.3]). L'inclusion à gauche $C_*z_j(Y)\left[\frac{1}{p}\right] \subseteq z_j(Y,*)\left[\frac{1}{p}\right]$ est un quasi-isomorphisme par l'hypothèse de récurrence et l'inclusion à droite $C_*z_j(U)\left[\frac{1}{p}\right] \subseteq z_j(U,*)\left[\frac{1}{p}\right]$ est un quasi-isomorphisme par le Théorème 2.1. Donc l'inclusion au milieu $C_*z_j(X)\left[\frac{1}{p}\right] \subseteq z_j(X,*)\left[\frac{1}{p}\right]$ est aussi un quasi-isomorphisme. □

2.2. La cohomologie étale, la cohomologie singulière, et les groupes de Chow supérieurs. — Désormais on fixe un m premier à p et on écrit $\Lambda = \mathbb{Z}/m$.

Dans cette sous-section on rappelle les résultats de [17, Section 4] et [14] pour arriver à l'isomorphisme $CH_j(X,n;\Lambda)^\# \cong H_c^{n+2j}(X,\Lambda(j))$. Cet isomorphisme est donné par la composition de la suite d'isomorphismes décrite dans la Définition 2.8.

En regardant les définitions, on voit qu'il y a un accouplement canonique entre $H^n_{sing}(-,\Lambda)$ et $H_n^{sing}(-,\Lambda)$. Soit

$$\mathcal{D}_s : H^n_{sing}(-,\Lambda) \to H_n^{sing}(-,\Lambda)^\# \tag{4}$$

le morphisme induit. Pour passer au cas $j<0$ on utilisera les isomorphismes canoniques

$$Tr^{CH} : CH_j(X,n;\Lambda) \xrightarrow{\sim} CH_j(\mathbb{A}_X^{-j},n;\Lambda) \tag{5}$$

$$Tr^{et} : H_c^n(\mathbb{A}_X^{-j},\Lambda) \xrightarrow{\sim} H_c^{n+2j}(X,\Lambda(j)) \tag{6}$$

de [1, Theorem 2.1] et [18, XVIII.2.8.1] respectivement. Le choix de la notation Tr^{CH} sera justifié plus tard.

Choisissons une immersion ouverte $X \to \overline{X}$ de X dans un schéma $\overline{X}$ propre sur k ([13]). Soit $i : Y \to \overline{X}$ l'immersion fermée complémentaire. Définissons le complexe[5]

$$[X^c] = \big([Y] \to [\overline{X}]\big) \tag{7}$$

dans $\mathsf{Comp}(\mathsf{PreShv}(\mathsf{Cor}/k))$ concentré en degrés -1 et 0.

Remarque 2.4. — On travaille avec la catégorie Cor/k, des correspondances *non*-lisse. Ses objets sont les k-schémas séparés de type fini, et $\hom_{\mathsf{Cor}/k}([X],[Y]) = c_{equi}(X\times Y/Y,0)$ dans la notation de [16]. La composition est définie avec les morphismes de correspondance développés dans [16, Sections 3.6 et 3.7]. Le lecteur peut consulter aussi [6, Chapitres 1 et 2], [12, Appendix 1A], [2, Section 3.8], et [8, Chapter 2]. Le diagramme [6, Diagramme 43] est particulièrement utile pour comprendre la composition.

5. On utilisera souvent la même notation pour un objet, et le préfaisceau qu'il represente.