ISSN 0012-9593

quatrième série - tome 51 fascicule 2 mars-avril 2018

ANNALES
SCIENTIFIQUES
de
L'ÉCOLE
NORMALE
SUPÉRIEURE

Bertrand LEMAIRE & Colette MŒGLIN & Jean-Loup WALDSPURGER

Le lemme fondamental pour l'endoscopie tordue : réduction aux éléments unités

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure

Publiées avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

Rédaction / *Editor*

Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure,
45, rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 05, France.
Tél. : (33) 1 44 32 20 88. Fax : (33) 1 44 32 20 80.
`annales@ens.fr`

Édition / *Publication*

Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré
11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05
Tél. : (33) 01 44 27 67 99
Fax : (33) 01 40 46 90 96

Abonnements / *Subscriptions*

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 09
Fax : (33) 04 91 41 17 51
email : `smf@smf.univ-mrs.fr`

Tarifs

Abonnement électronique : 420 euros.
Abonnement avec supplément papier :
Europe : 531 €. Hors Europe : 575 € ($ 863). Vente au numéro : 77 €.

ISSN 0012-9593 (print) 1873-2151 (electronic)

Directeur de la publication : Stéphane Seuret
Périodicité : 6 nos / an

Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.
4^{e} série, t. 51, 2018, p. 281 à 369

LE LEMME FONDAMENTAL POUR L'ENDOSCOPIE TORDUE : RÉDUCTION AUX ÉLÉMENTS UNITÉS

PAR Bertrand LEMAIRE, Colette MŒGLIN
ET Jean-Loup WALDSPURGER

Résumé. – On prouve ici que le lemme fondamental pour l'endoscopie tordue, désormais établi pour les unités des algèbres de Hecke sphériques, entraîne le lemme fondamental pour tous les éléments de ces algèbres de Hecke. La démonstration, dont l'idée est due à Arthur, utilise le transfert, déjà établi lui aussi comme conséquence du lemme fondamental pour les unités.

Abstract. – We show here that the fundamental lemma for twisted endoscopy, now proved for the unit elements in the spherical Hecke algebras, implies the fundamental lemma for all elements of these Hecke algebras. The proof, whose idea is due to Arthur, uses the transfer, which is known as a consequence of the fundamental lemma for the units.

1. Introduction

1.1. – Le lemme fondamental est un résultat essentiel à la stabilisation de la formule des traces. Il est maintenant démontré pour les unités des algèbres de Hecke sphériques, pour l'endoscopie ordinaire comme pour l'endoscopie tordue, en toute caractéristique pourvu que la caractéristique résiduelle soit suffisamment grande [17, 19, 20].

Le lemme fondamental pour tous les éléments des algèbres de Hecke sphériques en presque toute caractéristique résiduelle est utilisé dans [15, X.5.6] pour achever la stabilisation de la formule des traces tordue.

Pour l'endoscopie ordinaire en caractéristique nulle, Hales a prouvé que le lemme fondamental pour les unités des algèbres de Hecke sphériques en presque toute caractéristique résiduelle implique le lemme fondamental pour tous les autres éléments de ces algèbres en toute caractéristique résiduelle [4]. Sa méthode est globale, et généralise celles de Clozel et Labesse pour le changement de base. Cette méthode utilise de manière cruciale une propriété bien connue des groupes non ramifiés de type adjoint, à savoir que les séries principales unitaires non ramifiées (c'est-à-dire induites à partir d'un caractère unitaire non ramifié du Levi minimal) sont irréductibles. Dans le cas tordu, le groupe adjoint G_{AD} est

 doi:10.24033/asens.2357

naturellement remplacé par le groupe $G_\sharp = G/Z(G)^\theta$, ce qui rend difficile l'application de cette méthode.

1.2. – Depuis les travaux de Hales, un autre résultat a été démontré, pour l'endoscopie tordue en caractéristique nulle : le lemme fondamental pour les unités des algèbres de Hecke sphériques implique le transfert [18]. La méthode est globale, et le résultat obtenu est semblable à celui de Hales : si le lemme fondamental pour les unités des algèbres de Hecke sphériques est vrai en presque toute caractéristique résiduelle, alors la conjecture de transfert est vraie en toute caractéristique résiduelle. On dispose donc aujourd'hui du lemme fondamental pour les unités en presque toute caractéristique résiduelle, et du transfert en toute caractéristique résiduelle. On démontre ici (pour l'endoscopie tordue en caractéristique nulle), de manière purement locale grâce au transfert — qui, comme on vient de le dire, a été obtenu par voie globale —, que le lemme fondamental pour les unités des algèbres de Hecke sphériques implique le lemme fondamental pour tous les autres éléments de ces algèbres.

1.3. – Le résultat démontré ici (pour l'endoscopie tordue) est *a priori* moins fort que celui de Hales (pour l'endoscopie ordinaire), puisque notre méthode ne permet pas d'ôter la restriction sur la caractéristique résiduelle. Pour éliminer cette restriction, il suffit de démontrer le lemme fondamental pour les unités des algèbres de Hecke sphériques dans le seul cas où on l'utilise ici : celui où la donnée endoscopique elliptique non ramifiée a pour groupe sous-jacent un tore (voir 1.7). À titre d'exemple, c'est ce que l'on fait dans le cas du groupe $G = GL(n)$ tordu par l'automorphisme extérieur $g \mapsto {}^t g^{-1}$. Dans ce cas, on démontre donc que le lemme fondamental pour tous les éléments des algèbres de Hecke sphériques est vrai, sans restriction sur la caractéristique résiduelle — cf. 4.13.

La restriction sur la caractéristique résiduelle est complètement éliminée dans [13], où l'on démontre le lemme fondamental pour les unités des algèbres de Hecke sphériques dans le cas d'une donnée endoscopique elliptique non ramifiée ayant pour groupe sous-jacent un tore. Dans ce cas très particulier, certaines constructions de la section 5 du présent article sont reprises dans [13]. Elles décrivent l'action de l'automorphisme θ et d'un élément de Frobenius ϕ sur le diagramme de Dynkin, et n'ont rien à voir avec le lemme fondamental : la preuve n'est pas circulaire !

Nous n'utilisons pas le résultat de Hales [4], sauf en 4.13 dans le cas de $PGL(2)$ avec caractère ω. D'ailleurs, nous ne l'utilisons pas non plus dans [13], où nous nous ramenons au cas de $GL(n)$ avec caractère ω, qui a été traité par Kazhdan [5]. En définitive, nous redémontrons le résultat de Hales [4] dans le cadre plus général de l'endoscopie tordue.

Une fois le lemme fondamental établi pour tous les éléments des algèbres de Hecke sphériques, on pourra essayer de le ramener à la caractéristique non nulle par la méthode des corps proches. C'est certainement possible si la caractéristique est suffisamment grande. Signalons le travail d'Alexis Bouthier [2], qui prouve pour l'endoscopie ordinaire en caractéristique non nulle, mais sous certaines hypothèses très restrictives, le lemme fondamental pour tous les éléments des algèbres de Hecke sphériques.

Ces considérations faites, revenons à la caractéristique nulle.

1.4. – Pour l'endoscopie tordue, les travaux fondamentaux de Kottwitz-Shelstad et Labesse ont été repris (et modifiés sur certains points) dans [15, I]. Ce sont les notions et les notations de loc. cit. que l'on utilise ici. Soit F une extension finie d'un corps p-adique $\mathbb{Q}_p$. Soit G un groupe algébrique réductif connexe défini et quasi-déployé sur F, et déployé sur une extension non ramifiée de F. L'action galoisienne sur le groupe dual $\hat{G}$ est donc donnée par celle d'un élément de Frobenius $\phi \in W_F$, où W_F est le groupe de Weil de F. Soient aussi $\widetilde{G}$ un G-espace tordu défini sur F, et ω un caractère[(1)] de $G(F)$. On suppose vérifiées les hypothèses suivantes :

- l'ensemble $\widetilde{G}(F)$ des points F-rationnels de $\widetilde{G}$ n'est pas vide ;
- le F-automorphisme θ de $Z(G)$ défini par $\widetilde{G}$ est d'ordre fini ;
- le $G(F)$-espace tordu $\widetilde{G}(F)$ possède un sous-espace hyperspécial $(K, \widetilde{K})$;
- le caractère ω est trivial sur $Z(G; F)^\theta$;
- la classe de cohomologie $\boldsymbol{a} \in \mathrm{H}^1(W_F, Z(\hat{G}))$ associée à ω est non ramifiée.

Soit $\boldsymbol{G}' = (G', \mathcal{G}', \tilde{s})$ une donnée endoscopique pour $(\widetilde{G}, \boldsymbol{a})$. On suppose que cette donnée est non ramifiée. Cela entraîne que le groupe G' (qui est défini et quasi-déployé sur F) se déploie sur une extension non ramifiée de F. Cela entraîne aussi que le L-groupe ${}^LG'$ est isomorphe à $\mathcal{G}'$. On peut donc, dans cette situation non ramifiée, faire l'économie des données auxiliaires. À la donnée $\boldsymbol{G}'$ est associé un G'-espace tordu $\widetilde{G}'$, défini sur F et à torsion intérieure. Au sous-espace hyperspécial $(K, \widetilde{K})$ de $\widetilde{G}(F)$ sont associés un sous-espace hyperspécial $(K', \widetilde{K}')$ de $\widetilde{G}'(F)$, bien défini à conjugaison près par $G'_{\mathrm{AD}}(F)$, et un facteur de transfert normalisé

$$\Delta : \mathcal{D}(\boldsymbol{G}') \to \mathbb{C}^\times.$$

Ici, $\mathcal{D}(\boldsymbol{G}')$ est l'ensemble des couples $(\delta, \gamma) \in \widetilde{G}'(F) \times \widetilde{G}(F)$ formés d'éléments semisimples dont les classes de conjugaison (sur $\overline{F}$) se correspondent, et tels que γ est fortement régulier. Pour $\gamma \in \widetilde{G}(F)$ fortement régulier (semi-simple), on définit l'intégrale orbitale ordinaire $I^{\widetilde{G}}(\gamma, f, \omega)$ d'une fonction $f \in C_c^\infty(\widetilde{G}(F))$. Pour $\delta \in \widetilde{G}'(F)$ fortement $\widetilde{G}$-régulier, on définit l'intégrale orbitale stable $S^{\widetilde{G}'}(\delta, f')$ d'une fonction $f' \in C_c^\infty(\widetilde{G}'(F))$, et l'intégrale orbitale endoscopique

$$I^{\widetilde{G},\omega}(\delta, f) = d_\theta^{1/2} \sum_\gamma d_\gamma^{-1} \Delta(\delta, \gamma) I^{\widetilde{G}}(\gamma, f, \omega)$$

d'une fonction $f \in C_c^\infty(\widetilde{G}(F))$; où γ parcourt les éléments de $\widetilde{G}(F)$ tels que $(\delta, \gamma) \in \mathcal{D}(\boldsymbol{G}')$, modulo conjugaison par $G(F)$. On renvoie à 2.7 pour des définitions précises. On dit qu'une fonction $f' \in C_c^\infty(\widetilde{G}'(F))$ est un transfert de $f \in C_c^\infty(G(F))$ si pour tout $\delta \in \widetilde{G}'(F)$ fortement $\widetilde{G}$-régulier, on a l'égalité

$$S^{\widetilde{G}'}(\delta, f') = I^{\widetilde{G},\omega}(\delta, f).$$

Soit $\mathbf{1}_{\widetilde{K}}$ la fonction caractéristique de $\widetilde{K}$, et soit $\mathbf{1}_{\widetilde{K}'}$ la fonction caractéristique de $\widetilde{K}'$. Le lemme fondamental pour les unités des algèbres de Hecke sphériques (2.8, théorème 1) dit que $\mathbf{1}_{\widetilde{K}'}$ est un transfert de $\mathbf{1}_{\widetilde{K}}$. Soit $\mathcal{H}_K$ l'algèbre de Hecke formée des fonctions sur $G(F)$ qui sont bi-invariantes par K et à support compact, et soit $\mathcal{H}_{K'}$ l'algèbre de Hecke formée des fonctions f' sur $G'(F)$ qui sont bi-invariantes par K' et à support compact. Via les

(1) Dans tout ce papier, on appelle *caractère* un homomorphisme continu dans $\mathbb{C}^\times$.