

372

ASTÉRISQUE

2015

RIGIDITY OF HIGH DIMENSIONAL GRAPH MANIFOLDS

Roberto FRIGERIO, Jean-François LAFONT, Alessandro SISTO

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 372, 2015

Comité de rédaction

Ahmed ABBES Damien GABORIAU
Viviane BALADI Michael HARRIS
Gérard BESSON Fabrice PLANCHON
Laurent BERGER Pierre SCHAPIRA
Philippe BIANE Bertrand TOËN
Hélène ESNAULT
Éric VASSEROT (dir.)

Diffusion

Maison de la SMF	Hindustan Book Agency	AMS
Case 916 - Luminy	O-131, The Shopping Mall	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Arjun Marg, DLF Phase 1	Providence RI 02940
France	Gurgaon 122002, Haryana	USA
smf@smf.univ-mrs.fr	Inde	www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 60 € (\$ 90)

Abonnement Europe : 530 €, hors Europe : 569 € (\$ 853)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie

75231 Paris Cedex 05, France

Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96

revues@smf.ens.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2015

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN 0303-1179

ISBN 978-2-85629-809-1

Directeur de la publication : Marc Peigné

372

ASTÉRISQUE

2015

RIGIDITY OF HIGH DIMENSIONAL GRAPH MANIFOLDS

Roberto FRIGERIO, Jean-François LAFONT, Alessandro SISTO

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Roberto Frigerio

Dipartimento di Matematica - Largo B. Pontecorvo, 5 - 56127 Pisa, Italy
`frigerio@dm.unipi.it`

Jean-François Lafont

Department of Mathematics, The Ohio State University, 231 West 18th Avenue,
Columbus, OH 43210-1174, USA
`jlafont@math.ohio-state.edu`

Alessandro Sisto

Department of Mathematics, ETH Zurich, 8092 Zurich, Switzerland
`sisto@math.ethz.ch`

Classification mathématique par sujet (2000). — 53C24, 20F65; 53C23, 20E08, 20F67, 20F69, 19D35.

Mots-clés. — Quasi-isometry, quasi-action, graph of groups, CAT(0) space, Borel conjecture, smooth rigidity, Baum-Connes conjecture, asymptotic cone, mapping class group, Kazhdan's property (T), Tits' alternative, co-Hopf property, C^* -simplicity, SQ -universality.

RIGIDITY OF HIGH DIMENSIONAL GRAPH MANIFOLDS

by Roberto FRIGERIO, Jean-François LAFONT and Alessandro SISTO

Abstract. — We define the class of *high dimensional graph manifolds*. These are compact smooth manifolds supporting a decomposition into finitely many pieces, each of which is diffeomorphic to the product of a torus with a finite volume hyperbolic manifold with toric cusps. The various pieces are attached together via affine maps of the boundary tori. We require all the hyperbolic factors in the pieces to have dimension ≥ 3 . Our main goal is to study this class of graph manifolds from the viewpoint of rigidity theory.

We show that, in dimensions ≥ 6 , the Borel conjecture holds for our graph manifolds. We also show that smooth rigidity holds within the class: two graph manifolds are homotopy equivalent if and only if they are diffeomorphic. We introduce the notion of *irreducible* graph manifolds. These form a subclass which has better coarse geometric properties, in that various subgroups can be shown to be quasi-isometrically embedded inside the fundamental group. We establish some structure theory for finitely generated groups which are quasi-isometric to the fundamental group of an irreducible graph manifold: any such group has a graph of groups splitting with strong constraints on the edge and vertex groups. Along the way, we classify groups which are quasi-isometric to the product of a free abelian group and a non-uniform lattice in $SO(n, 1)$. We provide various examples of graph manifolds which do *not* support any locally CAT(0) metric.

Several of our results can be extended to allow pieces with hyperbolic surface factors. We emphasize that, in dimension $= 3$, our notion of graph manifold *does not* coincide with the classical graph manifolds. Rather, it is a class of 3-manifolds that contains some (but not all) classical graph 3-manifolds (we don't allow general Seifert fibered pieces), as well as some non-graph 3-manifolds (we do allow hyperbolic pieces).

Résumé (Rigidité des variétés graphées de grande dimension.) — Ce texte est consacré à la définition et à l'étude systématique des *variétés graphées de grande dimension*. Celles-ci sont des variétés lisses, ayant une décomposition en un nombre fini de morceaux géométriques. Chaque morceau est diffeomorphe au produit d'un tore et d'une variété hyperbolique de volume fini dont tous les bouts sont des tores. Les morceaux sont

recollés par des applications affines des tores qui en sont les bords. Nous exigeons que le facteur hyperbolique dans chaque morceau soit de dimension ≥ 3 . Notre but principal est d'établir divers résultats de rigidité pour cette classe de variétés graphées.

Nous démontrons, en dimension ≥ 6 , la conjecture de Borel pour les variétés graphées : une variété quelconque est homotopiquement équivalente à une variété graphée si et seulement si elle est homéomorphe à cette même variété graphée. Nous établissons la rigidité lisse pour la classe des variétés graphées : deux variétés graphées sont homotopiquement équivalentes si et seulement si elles sont difféomorphes. Du point de vue de la géométrie à grande échelle, la distorsion des groupes fondamentaux des morceaux dans le groupe fondamental de la variété graphée joue un rôle essentiel. Nous introduisons la notion de *variété graphée irréductible*. Elles forment une sous-classe pour laquelle ces sous-groupes sont toujours non-distordus. Ceci nous permet d'analyser la structure des groupes quasi-isométriques au groupe fondamental d'une variété graphée irréductible: un tel groupe a (virtuellement) une action sur un arbre, avec de fortes contraintes sur les stabilisateurs de sommets et d'arêtes. Cette analyse comprend, entre autre, une classification des groupes quasi-isométriques au produit d'un groupe abélien libre et d'un réseau non-uniforme dans $SO(n, 1)$. Nous présentons plusieurs exemples de variétés graphées qui n'admettent *aucune* métrique localement CAT(0).

Certains de nos résultats s'appliquent aussi bien en présence de morceaux ayant comme facteurs des surfaces hyperboliques. Nous précisons que, en dimension trois, notre notion de variété graphée *ne coïncide pas* avec la notion classique de variété graphée. Nos variétés forment une classe comprenant certaines des variétés graphées classiques (mais pas toutes: nous excluons certaines sous-variétés de Seifert), ainsi que des variétés que ne sont pas des variétés graphées classiques (nous admettons des morceaux purement hyperboliques).

CONTENTS

Introduction	xi
Part I. Graph manifolds: topological and algebraic properties	1
1. Quasi-isometries and quasi-actions	3
1.1. The quasi-isometry type of a group	3
1.2. The Milnor-Švarz Lemma	4
1.3. From quasi-isometries to quasi-actions	4
2. Generalized graph manifolds	9
2.1. Putting a metric on (extended) graph manifolds	11
2.2. Purely hyperbolic graph manifolds are nonpositively curved	12
2.3. $\pi_1(M)$ as the fundamental group of a graph of groups	14
2.4. The universal cover of M as a tree of spaces	15
2.5. Basic metric properties of \widetilde{M}	18
2.6. Examples not supporting any locally CAT(0) metric	19
3. Topological rigidity	23
3.1. Contractible universal cover	24
3.2. Lower algebraic K-theory	25
3.3. Topological rigidity - the general case	27
3.4. Topological rigidity - (extended) graph manifolds	31
3.5. Baum-Connes Conjecture and consequences	32
4. Isomorphisms preserve pieces	35
4.1. Some properties of wall stabilizers	36
4.2. Characterizing surface pieces	38
4.3. Further properties of wall stabilizers	40
4.4. Isomorphisms quasi-preserve non-surface pieces	42
4.5. Isomorphisms preserve pieces	45
5. Smooth rigidity	47
5.1. Rigidly decomposable pairs	47
5.2. Dehn twists	52

5.3. Proof of Theorem 5.3	54
5.4. Mapping class group	55
6. Algebraic properties	57
6.1. Graphs of groups and groups acting on trees	58
6.2. The graph of groups associated to an (extended) graph manifold ...	60
6.3. Relative hyperbolicity and hyperbolically embedded subgroups	66
6.4. Kazhdan subgroups	67
6.5. Uniformly exponential growth	68
6.6. The Tits Alternative	69
6.7. Co-Hopf property	72
6.8. C^* -simplicity of acylindrical graphs of groups	75
6.9. SQ-universality	78
6.10. Solvable word problem	79
6.11. Gluings and isomorphism type	84
 Part II. Irreducible graph manifolds: coarse geometric properties	91
 7. Irreducible graph manifolds	93
7.1. The geometry of chambers and walls	94
7.2. An important consequence of irreducibility	95
7.3. The geometry of neutered spaces	96
7.4. Walls and chambers are quasi-isometrically embedded in the universal covering of irreducible graph manifolds	99
 8. Pieces of irreducible graph manifolds are quasi-preserved	109
8.1. The asymptotic cone of a geodesic metric space	109
8.2. Quasi-isometries and asymptotic cones	111
8.3. Tree-graded spaces	113
8.4. The asymptotic cone of \widetilde{M}	114
8.5. A characterization of bi-Lipschitz $(n - 1)$ -flats in \widetilde{M}_ω	121
8.6. A characterization of quasi-flats of maximal dimension in \widetilde{M}	123
8.7. Walls and chambers are quasi-preserved by quasi-isometries	124
8.8. Thickness and relative hyperbolicity	125
 9. Quasi isometry rigidity, I	129
9.1. The quasi-action of Γ on \widetilde{M}	130
9.2. The image of θ	132
9.3. The kernel of θ	134
9.4. Abelian undistorted normal subgroups are virtually central	136
9.5. Pieces with quasi-isometric fundamental groups	139
 10. Quasi isometry rigidity, II	141
10.1. From quasi-actions to actions on trees	141

10.2. The action of Γ^0 on T	142
10.3. Stabilizers of edges and vertices	143
10.4. Graph manifolds with quasi-isometric fundamental groups	144
Part III. Concluding remarks	147
11. Examples not supporting locally CAT(0) metrics	149
11.1. Fiber bundles	149
11.2. Irreducible examples	156
12. Directions for future research	163
12.1. Further algebraic properties	163
12.2. Studying quasi-isometries	164
12.3. Non-positive curvature and differential geometry	166
Bibliography	169

