

**Jérémie SZEFTTEL**

---

**PARAMETRIX FOR WAVE EQUATIONS  
ON A ROUGH BACKGROUND III:  
SPACE-TIME REGULARITY OF THE PHASE**

---

ASTÉRIQUE 401

Société Mathématique de France 2018

---

Astérisque est un périodique de la Société mathématique de France  
Numéro 401

---

Comité de rédaction

Ahmed ABBES	Hélène ESNAULT
Viviane BALADI	Philippe EYSSIDIEUX
Laurent BERGER	Michael HARRIS
Philippe BIANE	Alexandru OANCEA
Nicolas BURQ	Fabrice PLANCHON
Damien CALAQUE	

Éric VASSEROT (dir.)

Diffusion

Maison de la SMF	AMS
B.P. 67	P.O. Box 6248
13274 Marseille Cedex 9	Providence RI 02940
France	USA
<a href="mailto:christian.munusami@smf.emath.fr">christian.munusami@smf.emath.fr</a>	<a href="http://www.ams.org">www.ams.org</a>

Tarifs 2018

*Vente au numéro* : 60 € (\$90)  
*Abonnement électronique* : 500 € (\$750)  
*Abonnement avec supplément papier* : 665 €, hors Europe : 718 € (\$1077)  
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie

75231 Paris Cedex 05, France

Tél : (33) 01 44 27 67 99

• Fax : (33) 01 40 46 90 96

[nathalie.christiaen@smf.emath.fr](mailto:nathalie.christiaen@smf.emath.fr)

• <http://smf.emath.fr/>

*Société Mathématique de France 2018*

*Tous droits réservés (article L122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L335-2 et suivants du CPI.*

ISSN 0303-1179 (print) 2492-5926 (electronic)

ISBN 978-2-85629-882-4

Stéphane SEURET  
Directeur de la publication

---

ASTÉRISQUE 401

**PARAMETRIX FOR WAVE EQUATIONS  
ON A ROUGH BACKGROUND III:  
SPACE-TIME REGULARITY OF THE PHASE**

**Jérémie SZEFTTEL**

**Société Mathématique de France 2018**  
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

J. SZEFTTEL

Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie, France.

*E-mail* : `jeremie.szefTEL@upmc.fr`

---

**2010 Mathematics Subject Classification.** — Primary 83C05; Secondary 35Q75, 58J45.

**Key words and phrases.** — Einstein equations, wave equation, eikonal equation, rough solutions.

---

**PARAMETRIX FOR WAVE EQUATIONS  
ON A ROUGH BACKGROUND III:  
SPACE-TIME REGULARITY OF THE PHASE**

**Jérémie SZEFTTEL**

**Abstract.** — This book is the third of a sequence of four papers dedicated to the construction and the control of a parametrix to the homogeneous wave equation  $\square_{\mathbf{g}}\phi = 0$ , where  $\mathbf{g}$  is a rough metric satisfying the Einstein vacuum equations. Controlling such a parametrix as well as its error term when one only assumes  $L^2$  bounds on the curvature tensor  $\mathbf{R}$  of  $\mathbf{g}$  is a major step of the proof of the bounded  $L^2$  curvature conjecture proposed in 2000 and solved in 2015 by S. Klainerman, I. Rodnianski and the author. On a more general level, this book deals with the control of the eikonal equation on a rough background, and with the derivation of  $L^2$  bounds for Fourier integral operators on manifolds with rough phases and symbols, and as such is also of independent interest.

**Résumé (Parametrix pour l'équation des ondes sur un espace-temps peu régulier III : régularité espace-temps de la phase)**

Cet ouvrage est le troisième d'une suite de quatre articles consacrés à la construction et au contrôle d'une paramétrix pour l'équation des ondes homogènes  $\square_{\mathbf{g}}\phi = 0$ , où  $\mathbf{g}$  est une métrique peu régulière satisfaisant les équations d'Einstein dans le vide. Le contrôle d'une telle paramétrix et du terme d'erreur associé quand on suppose seulement des bornes  $L^2$  sur le tenseur de courbure  $\mathbf{R}$  de  $\mathbf{g}$  est une étape cruciale de la preuve de la conjecture de courbure  $L^2$  proposée en l'an 2000 et résolue en 2015 par S. Klainerman, I. Rodnianski et l'auteur. Plus généralement, cet ouvrage concerne le contrôle de l'équation eikonale sur un espace-temps peu régulier et la dérivation de bornes  $L^2$  pour des opérateurs intégraux de Fourier sur des variétés avec une phase et un symbole peu réguliers, et possède de ce point vue un intérêt propre.



## CONTENTS

<b>1. Introduction</b>	1
<b>2. Main results</b>	7
2.1. Maximal foliation on $\mathcal{M}$	7
2.2. Geometry of the foliation generated by $u$ on $\mathcal{M}$	8
2.3. Null structure equations	11
2.4. Commutation formulas	16
2.5. Bianchi identities	17
2.6. Assumptions on $R$ and $u _{\Sigma_0}$	17
2.7. Main results	20
2.8. Dependence of the norm $L_u^\infty L^2(\mathcal{H}_u)$ on $\omega \in \mathbb{S}^2$	24
2.9. Additional estimates for $\text{tr}\chi$	27
2.10. Organization of the book	27
<b>3. Calculus inequalities on <math>P_{t,u}</math>, <math>\mathcal{H}_u</math> and <math>\Sigma_t</math></b>	29
3.1. Calculus inequalities on $P_{t,u}$	29
3.2. Geometric Littlewood Paley theory on $P_{t,u}$	31
3.3. Hodge systems	36
3.4. Calculus inequalities on $\mathcal{H}_u$	40
3.5. Calculus inequalities on $\Sigma_t$	43
3.6. Geometric Littlewood-Paley theory on $\Sigma_t$	49
<b>4. Regularity with respect to <math>(t, x)</math></b>	59
4.1. Lower bound on the injectivity radius on $\mathcal{H}_u$	60
4.2. Coordinate systems on $\Sigma_t$ and $P_{t,u}$	64
4.3. Bound on the Gauss curvature $K$	67
4.4. Estimates for the lapse $n$	69
4.5. Estimates for $k$ on $\mathcal{H}_u$	72

4.6. Time foliation versus geodesic foliation	76
4.7. Trace norm bounds for $\bar{\delta}$ and $\bar{\varepsilon}$	84
4.8. Estimates for $b$	90
4.9. Remaining estimates for $\text{tr } \chi$ , $\widehat{\chi}$ and $\zeta$	93
<b>5. Estimates for <math>\underline{L}\underline{L} \text{tr } \chi</math>, <math>\nabla_{\underline{L}}(\zeta)</math> and <math>\underline{L}\underline{L}(b)</math></b>	<b>97</b>
5.1. Besov improvement for $\text{tr } \chi$ in the time foliation	97
5.2. Structure equations for $\underline{L}\underline{L} \text{tr } \chi$ and $\nabla_{\underline{L}}(\zeta)$	105
5.3. Estimates for $\nabla_{\underline{L}}(\zeta)$	109
5.4. Estimates for $\underline{L}\underline{L} \text{tr } \chi$	111
5.5. Estimates for $\underline{L}\underline{L}b$	116
<b>6. First order derivatives with respect to <math>\omega</math></b>	<b>123</b>
6.1. Commutator formulas	123
6.2. Control of $\partial_{\omega}N$ , $\partial_{\omega}b$ , $\partial_{\omega}\chi$ and $\partial_{\omega}\zeta$	128
6.3. Control of $\nabla_{\underline{L}}\Pi(\partial_{\omega}\chi)$	133
6.4. Proof of the decomposition (2.79) for $\widehat{\chi}$	136
6.5. Besov improvement for $\partial_{\omega}N$ and $\partial_{\omega}\chi$	148
6.6. Estimate for $N(\cdot, \omega) - N(\cdot, \omega')$	149
<b>7. Second order derivatives with respect to <math>\omega</math></b>	<b>153</b>
7.1. Equation for $D_{\underline{L}}\partial_{\omega}^2N$ , $D_A\partial_{\omega}^2N$ , $D_{\underline{L}}\partial_{\omega}^2N$ , $\partial_{\omega}^2\zeta$ and $\partial_{\omega}^2b$	153
7.2. Estimates for $\partial_{\omega}^2N$ , $\partial_{\omega}^2b$ , $\partial_{\omega}^2\chi$ and $\partial_{\omega}^2\zeta$	158
<b>8. Dependence of the norm <math>L_u^{\infty}L^2(\mathcal{H}_u)</math> on <math>\omega \in \mathbb{S}^2</math></b>	<b>165</b>
8.1. The basic estimates	165
8.2. Decompositions involving $\partial_{\omega}N$ , $\text{tr } \chi$ and $b^p$	171
8.3. A first variant of Proposition 8.1	172
8.4. Decompositions involving $\chi$	176
8.5. A second variant of Proposition 8.1	181
8.6. Decompositions involving $\zeta$ , $\nabla b$ and $\partial_{\omega}b$	184
<b>9. Additional estimates for <math>\text{tr } \chi</math></b>	<b>187</b>
9.1. Commutator estimates between $P_j$ and $\nabla_{\underline{L}}, \nabla_N$	187
9.2. Commutator estimates acting on $\text{tr } \chi$	187
9.3. Additional estimates for $P_j \text{tr } \chi$	188
<b>A. Appendix to chapter 4</b>	<b>197</b>
A.1. Proof of Proposition 4.11	197
A.2. Proof of Lemma 4.14	202
A.3. Proof of Lemma 4.24	204
<b>B. Appendix to chapter 5</b>	<b>207</b>
B.1. Proof of Lemma 5.6	207
B.2. Proof of Lemma 5.7	208
B.3. Proof of Lemma 5.8	210



B.4. Proof of Lemma 5.9	210
B.5. Proof of Lemma 5.10	211
B.6. Proof of Lemma 5.11	212
B.7. Proof of Lemma 5.12	214
B.8. Proof of Lemma 5.13	217
B.9. Proof of Lemma 5.14	228
B.10. Proof of Lemma 5.15	230
B.11. Proof of Lemma 5.16	233
B.12. Proof of Lemma 5.17	233
<b>C. Appendix to chapter 6</b>	<b>235</b>
C.1. Proof of Lemma 6.9	235
C.2. Proof of Lemma 6.10	238
C.3. Proof of Lemma 6.12	239
C.4. Proof of Lemma 6.13	239
C.5. Proof of Lemma 6.14	240
C.6. Proof of Lemma 6.16	243
C.7. Proof of Lemma 6.17	245
C.8. Proof of Lemma 6.18	246
C.9. Proof of Lemma 6.19	249
C.10. Proof of Lemma 6.20	251
C.11. Proof of Lemma 6.21	251
C.12. Proof of Lemma 6.23	255
C.13. Proof of Lemma 6.24	257
C.14. Proof of Lemma 6.25	258
<b>D. Appendix to chapter 8</b>	<b>261</b>
D.1. Proof of Lemma 8.3	261
D.2. Proof of Lemma 8.4	266
D.3. Proof of Lemma 8.5	267
D.4. Proof of Lemma 8.6	268
D.5. Proof of Lemma 8.7	270
D.6. Proof of Lemma 8.8	272
D.7. Proof of Lemma 8.9	274
D.8. Proof of Lemma 8.12	278
D.9. Proof of Lemma 8.18	279
D.10. Proof of Lemma 8.19	283
D.11. Proof of Lemma 8.20	284
<b>E. Appendix to chapter 9</b>	<b>289</b>
E.1. Proof of Proposition 9.1	289
E.2. Proof of Proposition 9.2	292
E.3. Proof of Proposition 9.3	294
E.4. Proof of Proposition 9.4	298
E.5. Proof of Proposition 9.5	304
E.6. Proof of Proposition 9.6	307

E.7. Proof of Lemma 9.7 .....	309
E.8. Proof of Lemma 9.8 .....	312
E.9. Proof of Lemma 9.9 .....	313
E.10. Proof of Lemma 9.10 .....	316
E.11. Proof of Lemma 9.11 .....	317
<b>Bibliography</b> .....	<b>319</b>
<b>Index</b> .....	<b>323</b>