

**Huanchen BAO**  
**Weiqiang WANG**

---

**A NEW APPROACH TO  
KAZHDAN-LUSZTIG THEORY OF  
TYPE *B* VIA QUANTUM  
SYMMETRIC PAIRS**

---

ASTÉRISQUE 402

Société Mathématique de France 2018

---

Astérisque est un périodique de la Société mathématique de France  
Numéro 402

---

**Comité de rédaction**

Ahmed ABBES	Hélène ESNAULT
Viviane BALADI	Philippe EYSSIDIEUX
Laurent BERGER	Michael HARRIS
Philippe BIANE	Alexandru OANCEA
Nicolas BURQ	Fabrice PLANCHON
Damien CALAQUE	
Éric VASSEROT (dir.)	

**Diffusion**

Maison de la SMF – Cellule de diffusion	AMS
Case 916 – Luminy	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Providence RI 02940
France	USA
<a href="mailto:commandes@smf.emath.fr">commandes@smf.emath.fr</a>	<a href="http://www.ams.org">www.ams.org</a>

**Tarifs 2018**

Vente au numéro : 60 € (\$ 90)  
Abonnement électronique : 500 € (\$ 750)  
Abonnement avec supplément papier : 657 €, hors Europe : 699 € (\$ 1049)  
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

**Secrétariat**

Astérisque  
Société Mathématique de France  
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie  
75231 Paris Cedex 05, France  
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96  
[asterisque@smf.emath.fr](mailto:asterisque@smf.emath.fr) • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2018

*Tous droits réservés (article L122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L335-2 et suivants du CPI.*

ISSN 0303-1179 (print) 2492-5926 (electronic)

ISBN 978-2-85629-889-3

Stéphane SEURET  
Directeur de la publication

---

ASTÉRIQUE 402

**A NEW APPROACH TO  
KAZHDAN-LUSZTIG THEORY OF  
TYPE  $B$  VIA QUANTUM  
SYMMETRIC PAIRS**

**Huanchen BAO  
Weiqiang WANG**

**Société Mathématique de France 2018**  
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

HUANCHEN BAO

Department of Mathematics, University of Maryland, College Park, MD  
20742.

*E-mail* : `huanchen@math.umd.edu`

WEIQIANG WANG

Department of Mathematics, University of Virginia, Charlottesville, VA  
22904.

*E-mail* : `ww9c@virginia.edu`

---

**2010 Mathematics Subject Classification.** — 17B10, 17B20, 17B37.

**Key words and phrases.** — Kazhdan-Lusztig theory, Lie superalgebras, canonical bases, quantum symmetric pairs.

---

# A NEW APPROACH TO KAZHDAN-LUSZTIG THEORY OF TYPE $B$ VIA QUANTUM SYMMETRIC PAIRS

Huanchen BAO, Weiqiang WANG

**Abstract.** — We show that Hecke algebra of type  $B$  and a coideal subalgebra of the type  $A$  quantum group satisfy a double centralizer property, generalizing the Schur-Jimbo duality in type  $A$ . The quantum group of type  $A$  and its coideal subalgebra form a quantum symmetric pair. A new theory of canonical bases arising from quantum symmetric pairs is initiated. It is then applied to formulate and establish for the first time a Kazhdan-Lusztig theory for the BGG category  $\mathcal{O}$  of the ortho-symplectic Lie superalgebras  $\mathfrak{osp}(2m+1|2n)$ . In particular, our approach provides a new formulation of the Kazhdan-Lusztig theory for Lie algebras of type  $B/C$ .

**Résumé (Une nouvelle approche à la théorie de Kazhdan-Lusztig de type  $B$  via les paires symétriques)**

On démontre que les algèbres de Hecke de type  $B$  et des coidéaux du groupes quantiques de type  $A$  satisfont une propriété de double centralisateur qui généralise la dualité de Schur-Jimbo en type  $A$ . Le groupe quantique de type  $A$  et son coidéale forment une paire symétrique quantique. Une nouvelle théorie des bases canoniques associées aux paires symétriques quantiques est développée. Elle est appliquée pour formuler et établir une théorie à la Kazhdan-Lusztig pour la catégorie  $\mathcal{O}$  de BGG de la super-algèbre de Lie ortho-symplectique  $\mathfrak{osp}(2m+1|2n)$ . Notre approche donne en particulier une nouvelle formulation de la théorie de Kazhdan-Lusztig pour les algèbres de Lie de type  $B/C$ .



## CONTENTS

<b>Introduction</b> .....	1
1. Background .....	1
2. The goal .....	2
3. An overview of Part I .....	3
4. An overview of Part II .....	5
5. Some future works .....	7
6. Organization .....	8
<b>Part I. Quantum symmetric pairs</b> .....	13
<b>1. Preliminaries on quantum groups</b> .....	15
1. The involution $\theta$ and the lattice $\Lambda_\theta$ .....	15
2. The algebras $'\mathfrak{f}$ , $\mathfrak{f}$ and $\mathbf{U}$ .....	16
3. Braid group action and canonical basis .....	18
4. Quasi- $\mathcal{R}$ -matrix $\Theta$ .....	20
<b>2. Intertwiner for a quantum symmetric pair</b> .....	23
1. Definition of the algebra $\mathbf{U}^t$ .....	23
2. Quantum symmetric pair $(\mathbf{U}, \mathbf{U}^t)$ .....	24
3. The intertwiner $\Upsilon$ .....	27
4. Constructing $\Upsilon$ .....	29
5. The isomorphism $\mathcal{T}$ .....	35
<b>3. Quasi-<math>\mathcal{R}</math>-matrix for a quantum symmetric pair</b> .....	37
1. Definition of $\Theta^t$ .....	37
2. Normalizing $\Theta^t$ .....	38
3. Properties of $\Theta^t$ .....	42
4. The bar map on $\mathbf{U}^t$ -modules .....	44
<b>4. The integrality of <math>\Upsilon</math> and the <math>\iota</math>-canonical basis of <math>{}^\omega L(\lambda)</math></b> .....	47
1. The homomorphism $\pi_{\lambda, \mu}$ .....	47
2. The $\iota$ -canonical bases at rank one .....	50
3. Integrality at rank one .....	54
4. The integrality of $\Upsilon$ .....	56
5. The $\iota$ -canonical basis of a based $\mathbf{U}$ -module .....	58

<b>5. The <math>(\mathbf{U}^l, \mathcal{H}_{B_m})</math>-duality and compatible bar involutions</b> .....	61
1. Schur-Jimbo duality .....	61
2. The $(\mathbf{U}^l, \mathcal{H}_{B_m})$ -duality .....	63
3. Bar involutions and duality .....	65
<b>6. The quantum symmetric pair <math>(\mathbf{U}, \mathbf{U}^J)</math></b> .....	69
1. The coideal subalgebra $\mathbf{U}^J$ .....	69
2. The intertwiner $\Upsilon$ and the isomorphism $\mathcal{T}$ .....	71
3. Quasi- $\mathcal{R}$ matrix on $\mathbf{U}^J$ .....	72
4. The $J$ -involutive modules .....	73
5. Integrality of $\Upsilon$ .....	74
6. The $J$ -canonical basis of ${}^\omega L(\lambda)$ .....	75
7. The $(\mathbf{U}^J, \mathcal{H}_{B_m})$ -duality .....	76
<b>Part II. Representation theory</b> .....	79
<b>7. BGG categories for ortho-symplectic Lie superalgebras</b> .....	81
1. The Lie superalgebra $\mathfrak{osp}(2m+1 2n)$ .....	81
2. Infinite-rank Lie superalgebras .....	84
3. The BGG categories .....	86
4. Truncation functors .....	89
<b>8. Fock spaces and Bruhat orderings</b> .....	91
1. Infinite-rank constructions .....	91
2. The Fock space $\mathbb{T}^b$ .....	92
3. The $q$ -wedge spaces .....	94
4. Bruhat orderings .....	96
<b>9. <math>\iota</math>-Canonical bases and Kazhdan-Lusztig-type polynomials</b> .....	101
1. The $B$ -completion and $\Upsilon$ .....	101
2. $\iota$ -Canonical bases .....	103
3. Bar involution and $q$ -wedges of $\mathbb{W}$ .....	105
4. Truncations .....	108
5. Bar involution and $q$ -wedges of $\mathbb{V}$ .....	110
<b>10. Comparisons of <math>\iota</math>-canonical bases in different Fock spaces</b> .....	111
1. Tensor versus $q$ -wedges .....	111
2. Adjacent $\iota$ -canonical bases .....	112
3. Combinatorial super duality .....	114
<b>11. Kazhdan-Lusztig theory of type <math>B</math> and <math>\iota</math>-canonical basis</b> .....	117
1. Grothendieck groups and Fock spaces .....	117
2. Comparison of characters .....	119
3. Translation functors .....	120



4. Classical KL theory reformulated .....	122
5. Super duality and Fock spaces .....	123
6. $\iota$ -KL theory for $\mathfrak{osp}$ .....	124
<b>12. BGG category of <math>\mathfrak{osp}(2m+1 2n)</math>-modules of half-integer weights</b> ..	<b>127</b>
1. Setups for half-integer weights .....	127
2. Fock spaces and $J$ -canonical bases .....	128
3. KL theory and $J$ -canonical basis .....	129
<b>Bibliography</b> .....	<b>131</b>

