

Pour une fonction continue $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ on note $\Gamma_f = \{(x, f(x)), x \in [0, 1]\}$ son graphe. Soit $C \subset \mathbb{R}^2$ le flocon de Von Koch. Existe-t-il un nombre dénombrable de fonctions continues $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ et d'isométries du plan $T_n : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telles que l'on ait l'inclusion suivante ?

$$C \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n(\Gamma_{f_n}).$$

Une référence pour le flocon de Von Koch peut être :
<http://staff.math.su.se/lenb/dok/von-Koch-1904.pdf>.

Solution de l'auteur : la réponse est non. Soit K l'unique ensemble compact non vide auto-similaire vérifiant $K = \bigcup_{i=1}^4 \phi_i(K)$, où $\phi_1(z) = z/3$, $\phi_2(z) = (e^{i\pi/3}z + 1)/3$, $\phi_3(z) = (e^{-i\pi/3}z + e^{i\pi/3} + 1)/3$, et $\phi_4(z) = (z + 2)/3$. La courbe \mathcal{C} est l'ensemble connexe obtenu en posant sur chacun des côtés d'un triangle équilatéral de côté 1 une copie de K , de sorte que \mathcal{C} soit à l'extérieur du triangle. On munit \mathcal{C} de la topologie induite par la distance euclidienne sur le plan. On peut toujours supposer sans perte de généralité que $K \subset \mathcal{C}$, ce que nous ferons.

Nous allons démontrer que pour toute fonction continue $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ et toute isométrie $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, l'ensemble $\mathcal{C} \cap T(\Gamma_f)$ (qui est fermé dans \mathcal{C}) est nulle part dense dans \mathcal{C} . Alors, par le théorème de Baire, toute union dénombrable d'ensembles de la forme $\mathcal{C} \cap T_n(\Gamma_{f_n})$ est également nulle part dense dans \mathcal{C} qui est complet; elle ne peut donc pas recouvrir \mathcal{C} .

Supposons que $\mathcal{C} \cap T(\Gamma_f)$ ne soit pas nulle part dense dans \mathcal{C} . Dans ce cas, comme $T(\Gamma_f)$ est fermé, il existe un point $c \in \mathcal{C}$ et une boule $B(c, r)$ (avec $r > 0$) tels que $\mathcal{C} \cap B(c, r) \subset T(\Gamma_f)$. Sans perte de généralité on peut supposer que $\emptyset \neq K \cap B(c, r) \subset T(\Gamma_f)$. Aussi, il existe un entier j tel que l'image de K par une similitude S_j de rapport 3^{-j} soit contenue dans $K \cap B(c, r)$.

Montrons que dans toute direction du plan on peut trouver une droite intersectant K en au moins deux points, et donc par similitude une droite intersectant $S_j(K)$ en au moins deux points. Cela contredira la propriété de Γ_f d'être un graphe puisque $S_j(K) \subset \Gamma_f$, et il sera établi que $\mathcal{C} \cap T(\Gamma_f)$ est nulle part dense dans \mathcal{C} .

Constatons alors que les images de 0 et de 1 par les itérées du système $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4\}$ sont toutes dans K . C'est en particulier le cas de $P_1 = \phi_1(0)$, $Q_1 = \phi_1(1) = \phi_2(0)$ et $Q_2 = \phi_2(1)$. Soit g l'application de $\phi_2(K)$ (qui ne contient pas P_1) dans \mathbb{S}^1 qui à Q associe $\frac{P_1 Q}{\|P_1 Q\|}$. Comme $\phi_2(K)$ est connexe, l'image de g contient les directions comprises entre 0 et $\pi/6$, valeurs prises par l'argument de g en Q_1 et Q_2 respectivement. On peut opérer de même avec $P'_1 = \phi_2(P_1)$, $Q'_1 = \phi_2(Q_1)$, $Q'_2 = \phi_2(Q_2)$ et $\phi_2(\phi_2(K))$ pour obtenir des droites coupant K en au moins deux points dans toutes les directions comprises entre $\pi/3$ et $\pi/2$. Pour couvrir l'intervalle $[\pi/6, \pi/3]$, il suffit de considérer $P_1'' = \phi_2(1)$, $Q_1'' = \phi_2 \circ \phi_3(0)$, $Q_2'' = \phi_2 \circ \phi_3(1)$ et l'application qui à Q dans $\phi_2 \circ \phi_3(K)$ associe $\frac{Q P_1''}{\|Q P_1''\|}$. Ensuite, K possédant un axe

de symétrie vertical, on complète avec les directions d'angles compris entre $-\pi/2$ et 0 , ce qui établit la propriété souhaitée.

Solution de l'équipe ramarov2 n'utilisant pas le théorème de Baire :

On suppose par l'absurde qu'on dispose de telles suites $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Comme expliqué dans la référence apportée, la transformation Ω d'un segment est la courbe obtenue en remplaçant son tiers du milieu par un triangle équilatéral dirigé vers l'extérieur. Ω peut s'appliquer à une ligne brisée en l'appliquant simplement à chaque segment de la ligne. C'est cette transformation qui permet de construire la suite de lignes brisées $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers C . Autrement dit, C_0 est un triangle équilatéral de côté 1 quelconque et $C_{n+1} = \Omega(C_n)$. On sait que C_n est composé de 4^n segments longueurs 3^{-n} .

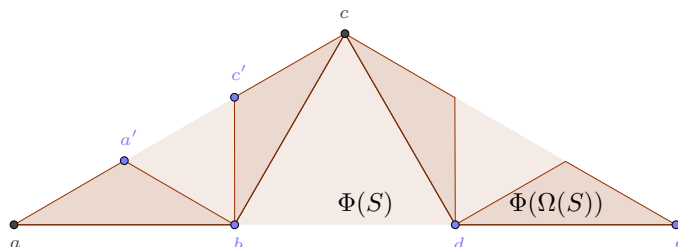
On définit une transformation Φ qui transforme un segment en le triangle isocèle fermé (en tant que surface) dont les sommets sont les extrémités dudit segment et le sommet du triangle équilatéral rajouté par Ω (celui qui n'est pas sur le segment d'origine). Φ s'applique à une ligne brisée en donnant l'union des triangles obtenus en appliquant Φ à chacun des segments de la ligne. On note $F_n = \Phi(C_n)$.

Lemme. Si S est un segment de taille r alors $\Phi(S)$ est un triangle isocèle de base S et de hauteur $r\sqrt{3}/6$, donc de diamètre r .

$\Omega(S) \subset \Phi(S)$ et $\Phi(\Omega(S)) \subset \Phi(S)$.

De plus, les triangles composant $\Phi(\Omega(S))$ ne peuvent s'intersecter qu'aux extrémités de leur base situés sur $\Omega(S)$ et $\Phi(\Omega(S))$ contient tous les sommets de $\Phi(S)$.

Démonstration. On note a, b, c, d, e les points consécutifs de $\Omega(S)$, avec $S = [a, e]$. $\Phi(S)$ est la surface délimitée par le triangle de sommets a, c, e . En appliquant Ω aux segments $[a, b]$ et $[b, c]$, on obtient respectivement des points a' et c' .



Si on prouve que les points a' et c' se trouvent sur le segment $[a, c]$ alors les triangles $aa'b$ et $bc'c$ seront inclus dans le triangle ace par convexité. Les autres cas se traitent par symétrie axiale.

On peut supposer que $a = (0, 0)$ et $e = (6, 0)$, et alors par simple application du théorème de Pythagore, $c = (3, \sqrt{3})$ et $b = (2, 0)$. De plus, $a' = (1, 1/\sqrt{3})$ et $c' = (2, 2/\sqrt{3})$. Donc, $a', c' \in [a, c]$.

On a donc prouvé que pour tout segment S , $\Phi(\Omega(S)) \subset \Phi(S)$. De plus, par convexité, $\Omega(S) \subset \Phi(S)$. Le reste du lemme se déduit simplement en remarquant que l'intersection de $aa'b$ avec $bc'c$ est réduite à b , sans oublier que $\{c\}$ est aussi l'intersection de $bc'c$ et du triangle de base $[c, d]$. □

Lemme. $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante de compacts connexes par arcs tels que $C \subset F_n$.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, C_n est composé d'un nombre fini de segments, donc F_n est une union finie de compacts, donc est compact.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(S_i)_{i \in I}$ la famille finie de segments qui décrit C_n .

$$C_{n+1} = \Omega(C_n) = \bigcup_{i \in I} \Omega(S_i) \subset \bigcup_{i \in I} \Phi(S_i) = \Phi(C_n) = F_n$$

$$F_{n+1} = \Phi(\Omega(C_n)) = \bigcup_{i \in I} \Phi(\Omega(S_i)) \subset \bigcup_{i \in I} \Phi(S_i) = \Phi(C_n) = F_n$$

Remarquons que l'égalité $\Phi(\Omega(C_n)) = \bigcup_{i \in I} \Phi(\Omega(S_i))$ est vraie car les $\Omega(S_i)$ induisent une partition des segments composant $\Omega(C_n)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme tout point de C est limite d'une suite de points $x_k \in C_k$ d'après la référence, tout point de C est limite de points de F_n qui est compact, donc fermé. Donc $C \subset F_n$.

La connexité par arcs se montre par récurrence en remarquant que F_1 est connexe par arcs. \square

On commence par observer que les triangles composant F_k sont des triangles isocèles de base un segment composant C_k , donc de longueur 3^{-k} , et de hauteur $3^{-k} \sqrt{3}/6$. Il existe donc une constante $c > 0$, indépendante de k tel que tout triangle de F_k contient une boule ouverte de diamètre $c3^{-k}$. De plus, F_k est composé de 4^n triangles. On se donne également $m \in \mathbb{N}^*$ tq $c4^m \geq 4 \times 3^m$.

Théorème. *Il existe une suite décroissante $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de triangles et une suite strictement croissante $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'entiers telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, Δ_n est un des triangles composant F_{a_n} et telles que*

$$\Delta_n \cap \bigcup_{i=0}^{n-1} T_i(\Gamma_{f_i}) = \emptyset$$

Démonstration. On va construire cette suite par récurrence. On choisit $a_0 = 0$ et pour Δ_0 n'importe quel des 3 triangles composant F_0 . Supposant Δ_n et a_n construits :

Par hypothèse de récurrence, $\Delta_n = \Phi(S)$ pour un certain segment composant C_{a_n} . On peut supposer que S est de longueur 1. De ce fait, $\Phi(\Omega^m(S)) \subset \Delta_n$, et $\Phi(\Omega^m(S))$ est composé de 4^m triangles entrant tous dans la composition de F_{a_n+m} , de bases de longueur 3^{-m} , qui contiennent chacun une boule de rayon B_i , $1 \leq i \leq 4^m$, de diamètre $c3^{-m}$.

Si p est la projection orthogonale sur la droite $T_n(\{(x, 0), x \in [0, 1]\})$, $p(\Delta_n)$ est un intervalle de longueur ≤ 1 qui contient tous les $p(B_i)$. Comme p est orthogonale et que T_n est une isométrie, $p(B_i)$ est un intervalle de longueur $c3^{-m}$. Donc au moins 4 des $p(B_i)$ s'intersectent. En effet, sinon

$$4 \leq \frac{c4^m}{3^m} \leq \sum_{i=1}^{4^m} \int \mathbb{1}_{p(B_i)} d\lambda = \int \sum_{i=1}^{4^m} \mathbb{1}_{p(B_i)} d\lambda \leq 3 \int \mathbb{1}_{p(\Delta_n)} d\lambda \leq 3$$

Cela donne 4 triangles dont les intérieurs sont traversés par une même droite, parallèle à $T_n(\{(0, x), x \in [0, 1]\})$. Les triangles composant F_{a_n+m} ne peuvent s'intersecter qu'aux extrémités de leur base d'après le lemme 1. Donc il existe deux triangles de F_{a_n+m} inclus dans Δ_n , dont les bases sont de longueur 3^{-m} (car on a supposé que celle de S est de longueur 1) et dont les intérieurs sont traversés par une même droite D parallèle à $T_n(\{(0, x), x \in [0, 1]\})$ et à distance $\varepsilon > 0$ (car les deux triangles sont des compacts disjoints). On les note $\Phi(U)$ et $\Phi(V)$, où U et V sont leurs bases respectives.

La fonction f_n est continue sur $[0, 1]$ donc est uniformément continue. On dispose d'un $\eta \leq \varepsilon/2$ tel que si $|x - y| \leq \eta$ alors $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon/2$. On va utiliser l'uniforme continuité pour trouver un petit

triangle que f_n n'atteint pas.

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $3^{-m-k} \leq \eta/2$. Les triangles composant $\Phi(\Omega^k(U))$ et $\Phi(\Omega^k(V))$ sont de diamètres inférieurs à $\eta/2$. $\Phi(\Omega^k(U)) \subset \Phi(U)$ est connexe par arcs et contient les sommets de $\Phi(U)$. D traverse l'intérieur de $\Phi(U)$, et coupe le plan en deux demi-plans ouverts, donc on dispose d'un couple de sommets de $\Phi(U)$ dans deux demi-plans distincts. $\Phi(\Omega^k(U))$ est un connexe qui rencontre chacun des demi-plans ouverts, donc il rencontre leur frontière, D , d'après le théorème des passages des douanes. Il existe un triangle A_U entrant dans la composition de $\Phi(\Omega^k(U)) \subset \Phi(U)$ et qui rencontre D . De même, on a un triangle A_V entrant dans la composition de $\Phi(\Omega^k(V)) \subset \Phi(V)$ et qui rencontre D .

Supposons par l'absurde qu'il existe $x, y \in [0, 1]$ tels que $T_n((x, f_n(x))) \in A_U$ et $T_n((y, f_n(y))) \in A_V$. T_n est une isométrie et D est parallèle à $T_n(\{(0, x), x \in [0, 1]\})$, donc

$$|x - y| \leq d(T_n((x, f_n(x))), D) + d(T_n((y, f_n(y))), D) \leq \text{diam}A_U + \text{diam}A_V \leq \eta$$

Donc $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon/2$. Cependant, comme A_U et A_V sont à distance au moins ε

$$|f_n(x) - f_n(y)| \geq d(T_n((x, f_n(x))), T_n((y, f_n(y)))) - |x - y| \geq \varepsilon - \eta \geq \varepsilon/2$$

Ce qui est une contradiction. On peut donc supposer $A_U \cap T_n(\Gamma_{f_n}) = \emptyset$. On pose alors $\Delta_{n+1} = A_U$ et $a_{n+1} = a_n + m + k > a_n$. Δ_{n+1} est un triangle composant $\Phi(\Omega^k(U))$, et comme U est un segment composant C_{a_n+m} , Δ_{n+1} est un des triangles composant $\Phi(\Omega^k(C_{a_n+m})) = F_{a_n+m+k} = F_{a_{n+1}}$. De plus,

$$\Delta_{n+1} \subset \Phi(\Omega^k(U)) \subset \Phi(U) \subset \Delta_n$$

Pour finir,

$$\Delta_{n+1} \cap \bigcup_{i=0}^{(n+1)-1} T_i(\Gamma_{f_i}) \subset (\Delta_{n+1} \cap T_n(\Gamma_{f_n})) \cup (\Delta_n \cap \bigcup_{i=0}^{n-1} T_i(\Gamma_{f_i})) = \emptyset$$

□

D'après la référence fournie dans l'énoncé, C est compact comme image continue de $[0, 1]$ et contient tous les sommets de tous les C_n . Un des sommets du triangle Δ_n est une extrémité d'un des segments composant C_{a_n} , et est donc un sommet de C_{a_n} . On en conclut que $C \cap \Delta_n \neq \emptyset$, et est compact comme intersection de compacts. De plus, $(a_n)_{n \geq 0}$ est une suite à valeurs entières strictement croissante, donc diverge.

La suite $(C \cap \Delta_n)_{n \geq 0}$ est une suite décroissante de compacts non vide dont la suite des diamètres est minorée par 3^{-a_n} , et donc tend vers 0. Par complétude, le théorème des fermés emboîtés implique l'existence d'un point $z \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\bigcap_{n \geq 0} C \cap \Delta_n = \{z\}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $z \notin T_n(\Gamma_{f_n})$, mais $z \in C$. Cela contredit bien l'hypothèse initiale $C \subset \bigcup_{n \geq 0} T_n(\Gamma_{f_n})$.