Problème 10

Peut-on trouver une configuration finie de points blancs et noirs dans $\mathbb{R}^2$ telle que les propriétés suivantes soient vérifiées ?

1. Pour tout point blanc, il y a exactement 10 points noirs qui se trouvent à distance 1 de ce point.
2. Le nombre de points blancs est strictement supérieur au nombre de points noirs.

Solution de l'auteur : Oui, une telle configuration existe.

Pour chaque configuration finie C de points blancs et de points noirs dans $\mathbb{R}^2$, on va s'intéresser au rapport $r(C)$ entre le nombre de points blancs de C et le nombre de points noirs de C.

Soit C une configuration finie de points blancs et de points noirs dans $\mathbb{R}^2$ telle que C vérifie la première condition imposée. (Par exemple, on peut prendre pour C une configuration C_1 formée par un point blanc et 10 points noirs à la distance 1 de ce point blanc ; on a $r(C_1) = \frac{1}{10}$.) Considérons une collection générique $v_1, \ldots, v_{10}$ de vecteurs de longueur 1 de $\mathbb{R}^2$ (la notion de généricité sera précisée ci-dessous) et construisons une nouvelle configuration C' de la façon suivante :

— pour tout point blanc $P \in C$, considérons 10 points blancs

$$P, t_{v_2-v_1}(P), \ldots, t_{v_{10}-v_1}(P),$$

où t_v est la translation de vecteur v ;

— pour tout point noir $Q \in C$, considérons 10 points noirs

$$Q, t_{v_2-v_1}(Q), \ldots, t_{v_{10}-v_1}(Q),$$

et un point blanc supplémentaire qui est le centre du cercle ayant le rayon 1 et contenant les points $Q, t_{v_2-v_1}(Q), \ldots, t_{v_{10}-v_1}(Q)$.

La nouvelle configuration C' vérifie la première propriété imposée (par construction, pour tout point blanc de C', il y a au moins 10 points noirs qui se trouvent à la distance 1 de ce point, et la généricité des vecteurs choisis $v_1, \ldots, v_{10}$ assure que, pour tout point blanc de C', le nombre de points noirs qui se trouvent à la distance 1 de ce point est exactement égal à 10).

De plus, $r(C') = r(C) + \frac{1}{10}$. Donc, en répétant 10 fois cette construction (en commeçant, par exemple, par la configuration C_1), on obtient une configuration qui vérifie les deux conditions imposées.

Ce problème a été traité par plusieurs équipes ; le jury a considéré que parmi les solutions correctes proposées par les équipes, aucune ne se distinguait particulièrement.