Problème 2

Montrer que pour tout triplet (p, q, r) de nombres premiers deux à deux distincts, il existe une solution (x, y, z) en entiers strictement positifs à l'équation $x^p + y^q = z^r$.

Solution de l'auteur : Comme pq et r sont premiers entre eux, il existe s tel que pqs soit congru à -1 modulo r. Soit t tel que $pqs + 1 = tr$. D'autre part soit a et b deux entiers positifs. On pose $c = a^p + b^q$ et on prend

$$z = c^t, x = c^{qs}a,\ y = c^{ps}b.$$

En prenant $a = b = 1$ on trouve simplement la solution $(2^{qs})^p + (2^{qs})^q = 2^{pqs+1} = (2^t)^r$.

N.B. : On conjecture (Beal, Tijdeman, Zagier) qu'il n'y a pas de solution en entiers x, y, z premiers entre eux quand les trois nombres premiers p, q, et r sont impairs.

Solution de l'équipe Maly : On commence par un lemme évident.

Lemme. *Soient a et b deux entiers naturels premiers entre eux, il existe deux entiers naturels c et d tels que $ac + 1 = db$*

Démonstration. Par le théorème de Bézout, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ tels que $\alpha a + \beta b = 1$, où l'on voit que α et β sont de signes opposés. Si α est négatif la preuve est terminée. Sinon, comme le couple $(\alpha - kb, \beta + ka)$ est solution de l'équation pour tout entier k, il suffit de choisir k suffisamment grand pour obtenir la solution souhaitée. □

Soient donc c et d des entiers positifs tels que $pqc + 1 = dr$

Proposition. *Le triplet $(2^{qc}, 2^{pc}, 2^d)$ est solution de (1).*

Démonstration. La vérification est triviale : $(2^{qc})^p + (2^{pc})^q = 2^{qcp} + 2^{pcq} = 2^{pqc+1} = 2^{dr} = (2^d)^r$ □

Une généralisation

Nous proposons la généralisation suivante.

Proposition. *Soient $a_1, ..., a_n, r$ des entiers positifs premiers entre eux, avec $n > 1$. Alors l'équation*

$$x_1^{a_1} + ... + x_n^{a_n} = z^r \tag{1}$$

possède une infinité de solutions dans $\mathbb{N}^{n+1}$.

Tout repose à nouveau sur l'existence d'entiers positifs c et d tels que $ca_1...a_n + 1 = dr$.

Démonstration. Soit α un entier strictement positif. On pose pour tout i entre 1 et n :

$$x_i = n^{c\prod_{j\neq i} a_j} \cdot \alpha^{r\prod_{j\neq i} a_j}$$

Le choix de z est ensuite imposé : $z = n^d \cdot \alpha^{\prod_j a_j}$
Il est alors facile de vérifier que l'on a bien définie, pour tout α, une solution de (2). □

Remarque. *L'infinité des solutions peut s'obtenir, sans introduire un α, en observant simplement qu'il y a une infinité de couples (c, d) qui sont solution de $ca_1...a_n + 1 = dr$, avec c et d positifs.*