Problème 3

Soient $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace de probabilité et $T : X \to X$ une application mesurable préservant la mesure μ, c'est-à-dire que $\mu \circ T^{-1} = \mu$. Le quadruplet $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ est dit système dynamique mesuré.

Un élément A de $\mathcal{B}$ est dit invariant s'il vérifie $T^{-1}(A) = A$. La sous-tribu de $\mathcal{B}$ constituée des ensembles invariants sera notée $\mathcal{J}$.

Le théorème ergodique de Birkhoff énonce que pour toute fonction $f \in L^1(\mu)$, pour μ-presque tout x, on a

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(T^n x) = \mathbb{E}(f|\mathcal{J}).$$

De plus, si $f \in L^p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$, la limite ci-dessus existe aussi au sens L^p.

Une suite de variables aléatoires $(M_n)_{n\geq 1}$ définies sur $(X, \mathcal{B}, \mu)$ est une martingale si

$$\forall n \geq 1, \quad \mathbb{E}(M_{n+1}|M_1, \cdots, M_n) = M_n.$$

Le théorème de Doob énonce que si la martingale $(M_n)_{n\geq 1}$ est telle que $\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}|M_n| < \infty$, alors M_n converge presque sûrement. De plus, si $\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}|M_n|^p < \infty$ avec $1 < p < \infty$, alors M_n converge aussi au sens L^p.

Dans la suite, on se donne $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite décroissante d'éléments de $[0,1]$ telle que $\sum p_n = \infty$, et indépendamment de $(X, \mathcal{B}, \mu)$, une suite $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes telle que pout tout $n \in \mathbb{N}$, ξ_n suit une loi de Bernoulli de paramètre p_n, i.e. $\mathbb{P}(\xi_n = 1) = p_n = 1 - \mathbb{P}(\xi_n = 0)$.

On considère l'ensemble aléatoire

$$\chi = \{n \in \mathbb{N} : \xi_n = 1\}.$$

1. Étudier la convergence de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{(p_1 + \cdots + p_n)^c}$ pour $c > 0$.
2. Montrer que pour toute $f \in L^2(\mu)$, on a presque sûrement, pour μ-presque tout x

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{|\chi \cap [1,N]|} \sum_{n\in\chi\cap[1,N]} f(T^n x) = \mathbb{E}(f|\mathcal{J}),$$

et que la limite existe aussi au sens de $L^2(\mu)$.

Solution de l'auteur : 1. Soit $c > 0$ et $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$, continue et décroissante, telle que $f(n) = p_n$ pour tout entier $n \geq 1$. Soit F une primitive strictement positive de f. La fonction $f/F^c = F'/F^c$ est décroissante. Il vient alors par comparaison successive de $\sum_{k=1}^n f(k)$ avec $F(n)$ puis de $\sum_{k=1}^n f(k)/F(k)^c$ avec n'importe quelle primitive de F'/F^c évaluée entre 1 et n, e.g. $F^{1-c}/(1-c)$ si $c \neq 1$ et $\log(F)$ si $c = 1$, que $\lim_{n\to\infty} F(n) = +\infty$ puis que la série $\sum_{n=1}^{\infty} p_n/(p_1 + \cdots + p_n)^c$ converge si et seulement si $c > 1$.

Autre approche pour le cas $c > 1$. Soit $s_k = p_1 + \cdots + p_k$. Sans perte de généralité, nous supposons ici que $p_1 > 1$ de sorte que $s_k > 1$ pour tout $k \geq 1$.

Cas $c = 2$: La convergence est due à l'inégalité

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k}{s_k^2} \leq \frac{1}{p_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{p_k}{s_k s_{k-1}} = \frac{1}{p_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{s_{k-1}} - \frac{1}{s_k} \right) = \frac{2}{p_1}.$$

Cas $c = 1 + \frac{1}{m}$: Comme le terme général de la série est une fonction décroissante de c, il suffit de montrer la convergence de la série pour une suite de $c > 1$ décroissante vers 1. Prenons $c = 1 + \frac{1}{m}$

($m = 1, 2, \cdots$). Nous démontrons la convergence en utilisant une idée similaire à celle utilisé dans le cas $c = 2$. La formule

$$a^m - b^m = (a-b)(a^{m-1} + a^{m-2}b + \cdots + ab^{m-2} + b^{m-1})$$

permet d'obtenir

$$p_k = s_k - s_{k-1} \le m s_k^{1-1/m}(s_k^{1/m} - s_{k-1}^{1/m}).$$

On a alors

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{p_k}{s_k^{1+1/m}} \le m \sum_{k=2}^{\infty} \frac{s_k^{1/m} - s_{k-1}^{1/m}}{s_k^{1/m} s_{k-1}^{1/m}} = m \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{s_{k-1}^{1/m}} - \frac{1}{s_k^{1/m}} \right) = \frac{m}{p_1^{1/m}}.$$

2. Fixons $x \in X$ et considérons la martingale

$$X_n^x = \sum_{k=1}^{n} \frac{(\xi_k - p_k) f(T^k x)}{s_k},$$

qui est une somme de variables aléatoires indépendantes et centrées. Comme $\mathbb{E}(\xi_n - p_n)^2 = p_n(1-p_n)$, on a

$$\mathbb{E}|X_n^x|^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{|f(T^k x)|^2 p_k (1-p_k)}{s_k^2}$$

d'où

$$\int \sup_n \mathbb{E}|X_n^x|^2 d\mu(x) \le \|f\|_2^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k(1-p_k)}{s_k^2} < \infty.$$

La dernière inégalité est due à (1) et au fait que $f \in L^2(\mu)$, et l'avant dernière inégalité utilise la T-invariance de la measure μ. Par conséquent, pour μ-presque tout x, la martingale X_n^x est L^2-bornée, et donc converge p.s. d'après le théorème de Doob. En d'autres termes, la série $\sum_n \frac{(\xi_n - p_n) f(T^n x)}{s_n}$ converge μ-p.p. p.s, et donc p.s. μ-p.p. par le théorème de Fubini. Alors, comme $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$, d'après le lemme de Kronecker, p.s. μ-p.p.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} (\xi_k - p_k) f(T^k x)}{\sum_{k=1}^{n} p_n} = 0. \tag{2}$$

D'autre part, comme $p_n \downarrow 0$ et $\sum p_k = \infty$, le théorème ergodique de Birkhoff implique que

$$\mu\text{−p.p.} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} p_k f(T^k x)}{\sum_{k=1}^{n} p_k} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(T^k x) = \mathbb{E}(f|\mathcal{J}) \tag{3}$$

(la première égalité s'obtient à l'aide d'une transformation d'Abel, dans laquelle on injecte le fait que pour tout $\epsilon > 0$ on a $n(\mathbb{E}(f|\mathcal{J}) - \epsilon) \le \sum_{k=1}^{n} f(T^k x) \le n(\mathbb{E}(f|\mathcal{J}) + \epsilon)$ pour n assez grand, puis en prenant la transformé d'Abel dans le sens inverse).

Nous pouvons maintenant conclure pour la limite p.s. μ-p.p. à partir de (2), de (3) et des égalités suivantes

$$\sum_{n \in \chi \cap [1,N]} f(T^n x) = \sum_{k=1}^{N} \xi_k f(T^k x); \quad \lim \frac{|\chi \cap [1,N]|}{\sum_{k=1}^{N} p_k} = 1. \tag{4}$$

La dernière égalité correspond au cas particulier de (2) où f est identiquement égale à 1.

La L^2-convergence se démontre de même, car (2) et (2) et (3) restent vraies pour la L^2-convergence.

Remarque. Le problème suivant reste ouvert : trouver une condition necessaire et suffisante sur (p_n) pour que la propriété suivante ait lieu : il existe un évèment Ω_0 de probabilité 1 telle que pour tout $\omega \in \Omega_0$, pour tout système dynamique $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ et pour toute $f \in L^2(\mu)$, la limite envisagée au problème 2 existe μ-p.p. (resp. au sens de L^2).

Solution de l'équipe ALE :

Question 1

On va traiter les cas $c > 1$ et $c \leqslant 1$, on note $S_n = p_1 + \cdots + p_n$.

— $c > 1$: On va faire une comparaison série-intégrale. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a donc $\frac{p_n}{S_n^c} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^c} = \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{S_n^c} \leqslant \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{t^c}$ puis :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{p_n}{S_n^c} \leqslant \frac{p_1}{S_1^c} + \int_{S_1}^{S_N} \frac{dt}{t^c} \leqslant p_1^{1-c} + \int_{S_1}^{\infty} \frac{dt}{t^c} < \infty.$$

La série converge donc.

— $c \leqslant 1$: Comme S_n tend vers l'infini, $\frac{p_n}{S_n^c} \geqslant \frac{p_n}{S_n} \geqslant 0$ à partir d'un certain rang. On en déduit que si la série diverge pour $c = 1$, elle divergera pour tous les $c \leqslant 1$.
On va montrer que la suite des sommes partielles n'est pas de Cauchy :

$$\sum_{n}^{n+p} \frac{p_n}{S_n} = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{S_k - S_{k-1}}{S_k} \geqslant \frac{1}{S_{n+p}} \sum_{k=n+1}^{n+p} S_k - S_{k-1} = 1 - \frac{S_n}{S_{n+p}}$$

Or pour tout n on peut prendre p grand pour que $S_n \leqslant \frac{S_{n+p}}{2}$ donc

$$\sup_p |S_{n+p} - S_n| \geqslant \frac{1}{2}$$

.

La série $\sum \frac{p_n}{(p_1 + \cdots + p_n)^c}$ converge si et seulement si $c > 1$.

Question 2

On va commencer par ôter l'aspect dynamique au système, et regarder d'abord une version non dynamique et déterministe, puis une version non dynamique mais probabiliste, pour en déduire le résultat.

On commence par un résultat technique qui sera très utile.

Lemme. *Soient $(p_n)_{n\geqslant 1}$ une suite strictement positive décroissante vers 0 et $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite convergeant au sens de Césaro vers un réel $l \in \mathbb{R}$. Alors*

— *Si $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \infty$, alors*

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} p_k u_k}{\sum_{k=1}^{n} p_k} \to l.$$

— *Si $\sum_{k=1}^{\infty} p_k < \infty$, alors la série $\sum_{k\geqslant 1} p_k u_k$ est convergente.*

Démonstration. Clairement, on peut supposer $l = 0$. Posons, pour $n \geqslant 1$,

$$C_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k, S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k, S_0 = 0,$$

On observe que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} p_k u_k = \sum_{k=1}^{N} p_k (S_k - S_{k-1}) &= \sum_{k=1}^{N} p_k S_k - \sum_{k=1}^{N-1} p_{k+1} S_k \\ &= p_N S_N + \sum_{k=1}^{N-1} k(p_k - p_{k+1}) C_k \\ &= p_N S_N + Z_n\end{aligned}$$

On suppose que la somme des p_n est infinie. Comme C tend vers 0 et comme $Np_N \leqslant \sum_{k=1}^n p_k$, $p_N S_N$ est négligeable devant $\sum_{k=1}^N p_k$. Observons maintenant que la suite $k(p_k - p_{k+1})$ est positive et que pour tout $q \geqslant 1$,

$$\sup_N \sum_{k=1}^N k(p_k - p_{k+1}) = \sup_N \sum_{k=1}^N p_k - p_{N+1} \geqslant \sup_N \sum_{k=1}^q p_k - q p_{N+1} = \sum_{k=1}^q p_k.$$

Ainsi la série des $k(p_k - p_{k+1})$ est également divergente donc Z_n est négligeable devant la somme partielle de la série, qui est elle-même dominée par la somme partielle des p_k.

Ainsi,

$$\sum_{k=1}^N p_k u_k = o\left(\sum_{k=1}^N p_k\right).$$

On suppose que la somme des p_n est finie. Alors on sait que $k(p_k - p_{k+1})$ est positive sommable comme ci-dessus, donc puisque $C_k = o(1)$, la famille des $k(p_k - p_{k+1})C_k$ est sommable. D'autre part, on sait que $Np_{2N} \leqslant \sum_{k=N+1}^{2N} p_k = o(1)$, donc par décroissance de p et puisque $C_n = O(1)$, $Np_N C_N = o(1)$, ce qui conclut.

$\square$

Lemme. *Soit u une suite telle que u et u^2 convergent au sens de Cesaro. Soit $v_n = (p_1 + \ldots + p_n)^{-2/3}$. Alors presque sûrement*

$$\sum_{k=1}^N (\xi_k - p_k) u_k = o(\frac{1}{v_n}).$$

Démonstration. Posons, pour $n \geqslant 1$, $T_n = (\xi_n - p_n) u_n v_n$. Les T_n sont indépendants centrés et $\mathbb{E}[T_n^2] = p_n(1 - p_n) v_n^2 u_n^2 \leqslant p_n v_n^2 u_n^2$. Comme la suite pv^2 est décroissante et que la somme de la série de terme général $p_n v_n^2$ est finie, et que u^2 converge au sens de Césaro, on a que

$$\sum_{k=1}^\infty \mathbb{E}[T_k^2] < \infty.$$

En particulier, $S_n = \sum_{k=1}^n T_k$ est une martingale qui converge presque sûrement et dans L^2 vers une variable aléatoire L^2 S_∞. On a alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{T_k}{v_k} = \sum_{k=1}^n \frac{S_k - S_{k-1}}{v_k} &= \sum_{k=1}^n \frac{S_k}{v_k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{S_k}{v_{k+1}} \\ &= \frac{S_n}{v_n} + \sum_{k=1}^n (-S_k) \left(\frac{1}{v_{k+1}} - \frac{1}{v_k}\right) \end{aligned}$$

La suite des $v_{k+1}^{-1} - v_k^{-1}$ est positive, décroissante (inégalité des pentes car $x \longmapsto x^{2/3}$ est concave), et la somme des termes de 1 à n est équivalente à v_n^{-1} donc diverge vers l'infini. Comme $S_k \to S_\infty$ presque sûrement, on a donc presque sûrement

$$\sum_{k=1}^n (-S_k) \left(\frac{1}{v_{k+1}} - \frac{1}{v_k}\right) = \frac{-S_\infty + o(1)}{v_n} = \frac{-S_n + o(1)}{v_n},$$

ce qui conclut. $\square$

En particulier avec $u = 1$, on voit que $\sum_{k=1}^n \xi_k$ est presque sûrement équivalente à $p_1 + \ldots + p_n$, et donc v_n^{-1} est négligeable devant cette somme.

Il s'ensuit que :

Proposition. *Soit u une suite convergeant au sens de Césaro vers $l \in \mathbb{R}$ telle que u^2 converge également au sens de Césaro. Alors presque sûrement :*

$$\frac{\sum_{k=1}^{N}(\xi_k u_k)}{\sum_{k=1}^{N}\xi_k} \to l.$$

Démonstration. Il suffit de le montrer, par ce qui précède, lorsque le dénominateur est $\sum_{k=1}^{n} p_k$. Or, par le résultat précédent et le lemme technique, on a

$$\sum_{k=1}^{n}\xi_k u_k = o(v_n^{-1}) + \sum_{k=1}^{n} p_k u_k = (l + o(1))\sum_{k=1}^{n} p_k.$$

□

Soit maintenant $f \in L^2(\mu)$. Soit Y l'ensemble des x tels que pour $g \in \{f, f^2\}$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(T^k(x)) \to \mathbb{E}[g|\mathscr{I}](x).$$

Par la proposition, on a presque sûrement

$$\frac{1}{|\chi \cap [1;n]|}\sum_{k=1}^{n}\xi_k f(T^k(x)) \to \mathbb{E}[f|\mathscr{I}].$$

Or, l'ensemble C des $(x,\xi) \in X \times \{0;1\}^{\mathbb{N}}|$ tels que $x \in Y$ et la propriété ci-dessus est vérifiée est mesurable pour la tribu produit naturelle. On a vu de plus que pour μ-presque tout x, $\{\xi \in \{0;1\}^{\mathbb{N}},\ (x,\xi) \in C\}$ est de mesure pleine. Par conséquent, C est de mesure (produit !) pleine, et on a donc

$$1 = \int_{\{0;1\}^{\mathbb{N}}} \mu(C_\xi)dP(\xi)$$

où$C_\xi = \{x \in Y,\ (x,\xi) \in C\}$. Comme μ est de masse totale 1, on a donc presque sûrement $\mu(C_\xi) = 1$, ie

On a presque sûrement μ-presque partout :

$$\frac{1}{|\chi \cap [1;n]|}\sum_{k=1}^{n}\xi_k (f \circ T^k) \to \mathbb{E}[f|\mathscr{I}].$$

Supposons maintenant $f \in L^\infty$. Alors chacun des termes de la suite (de fonctions L^2) est majoré par $\|f\|_{L^\infty}$, et donc on peut appliquer le théorème de convergence dominée, de sorte que presque sûrement dans L^2 :

$$\frac{1}{|\chi \cap [1;n]|}\sum_{k=1}^{n}\xi_k (f \circ T^k) \to \mathbb{E}[f|\mathscr{I}].$$

Enfin, si $f \in L^2$, $\epsilon > 0$, il existe $g \in L^\infty$ avec $\|g - f\|_{L^2} \leqslant \epsilon$. Alors presque sûrement

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{|\chi \cap [1;n]|}\sum_{k=1}^{n}\xi_k (f \circ T^k) - \mathbb{E}[f|\mathscr{I}]\right\|_{L^2} &\leqslant \left\|\frac{1}{|\chi \cap [1;n]|}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\,(f-g)\circ T^k\right\|_{L^2} + \|\mathbb{E}[f-g|\mathscr{I}]\|_{L^2} \\ &+ \left\|\frac{1}{|\chi \cap [1;n]|}\sum_{k=1}^{n}\xi_k (g \circ T^k) - \mathbb{E}[g|\mathscr{I}]\right\|_{L^2} \\ &\leqslant 2\epsilon + o(1)\end{aligned}$$

On a donc presque sûrement pour tout p

$$\left\| \frac{1}{|\chi \cap [1;n]|} \sum_{k=1}^{n} \xi_k (f \circ T^k) - \mathbb{E}[f|\mathscr{I}] \right\|_{L^2} \leqslant 2^{-p} + o(1),$$

et donc presque sûrement

$$\left\| \frac{1}{|\chi \cap [1;n]|} \sum_{k=1}^{n} \xi_k (f \circ T^k) - \mathbb{E}[f|\mathscr{I}] \right\|_{L^2} \to 0.$$