

Problème 4

Pedro et Dilma jouent au jeu suivant dans la boule unité fermée (euclidienne) B de \mathbb{R}^2 . Pedro commence en choisissant un point P_1 de B , auquel Dilma répond en choisissant une droite D_1 passant par P_1 . Pedro joue ensuite un point P_2 de B situé sur D_1 , auquel Dilma répond par une droite D_2 passant par P_2 . Les deux joueurs jouent ainsi une infinité de tours, de manière à produire deux suites $(P_n)_{n \geq 1}$ et $(D_n)_{n \geq 1}$ de points de B et de droites. Dilma est déclarée gagnante si la suite $(P_n)_{n \geq 1}$ converge. Dans le cas contraire, Pedro est déclaré gagnant.

L'un des deux joueurs possède-t-il une stratégie gagnante ? Si oui, lequel ?

Solution de l'auteur : La solution qui suit est tirée de l'article suivant :

J. Malý et M. Zelený, A note on Buczolic's solution of the Weil gradient problem : A construction based on an infinite game, *Acta. Math. Hungar.*, 113(1-2), 2006, 145-158.

On n'attendait pas nécessairement des participants qu'ils puissent élaborer une preuve aussi sophistiquée, et de fait, aucune équipe n'est parvenue à résoudre le problème. En revanche, plusieurs équipes sont parvenues à établir quelques résultats partiels, et ont été récompensées pour cela.

Un exemple de tel résultat est obtenu en étudiant ce qui se passe lorsque Dilma joue systématiquement la droite passant par P_n et perpendiculaire à la droite $(0_{\mathbb{R}^2} P)$. On pourrait s'attendre à ce que cette stratégie soit gagnante pour Dilma car elle semble lui permettre de contraindre Pedro à converger sur le cercle unité. Cependant, on peut alors montrer que Pedro peut s'échapper en tournant indéfiniment.

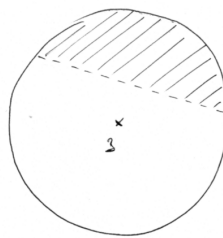
Malgré ce résultat assez contre-intuitif, il est toutefois possible de montrer que Dilma possède bien une stratégie gagnante. Cela signifie que quels que soient les mouvements de Pedro, elle parvient à faire converger la suite $(P_n)_{n \geq 1}$.

On définit, dans le plan euclidien, les notions suivantes :

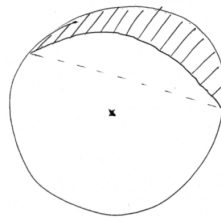
1. $B(x, r)$ (resp. $\bar{B}(x, r)$) la boule ouverte (resp. fermée) centrée en x et de rayon r .
2. Pour $z \in \mathbb{R}^2$, $r > 0$, $w \in B(0_{\mathbb{R}^2}, r) \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}\}$

$$E(z, r, w) = \{x \in \bar{B}(z, r) : (w - z) \cdot w > \|w\|^2\}$$

Une partie de cette forme sera appelée *gommette* par la suite. Elle est obtenue en considérant la boule fermée $B(z, r)$, en prenant une droite qui l'intersecte et ne passant pas par z . Dans la boule, la droite détermine deux composantes connexes. $E(z, r, w)$ est le complémentaire de l'adhérence de la composante connexe de z .



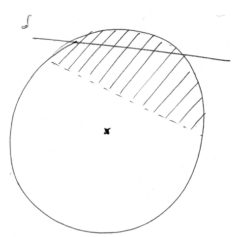
3. La frontière de la gommette se décompose naturellement en un *bord droit* (la corde, formellement $L(z, r, w) = \{x \in \bar{B}(z, r) : (w - z) \cdot w = \|w\|^2\}$) et un *bord courbe* (l'autre partie de la frontière).
4. Si $E(z, r, w) \subset E(z', r', w')$ sont deux gommettes partageant le même bord droit, la différence $E(z', r', w') \setminus E(z, r, w)$ est une *banane*.



5. Une gommelette est *inscrite* dans une banane lorsque son bord courbe est inclus dans le bord externe de la banane, et que son bord droit est tangent au bord interne de la banane.

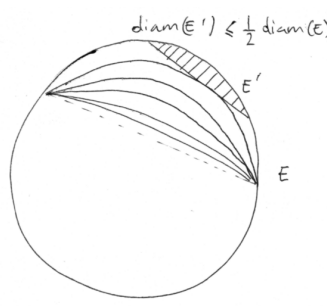


6. Une droite d est *admissible* relativement à une gommelette lorsqu'elle l'intersecte sans intersecter son bord droit.



Le résultat crucial sur lequel s'appuie la démonstration est le lemme suivant (dont la preuve, qui n'est pas présentée ici, est un peu fastidieuse mais pas difficile) :

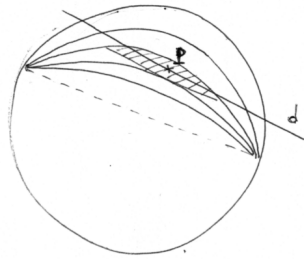
Lemme. Soit E une gommelette. Alors elle peut être partitionnée en une infinité dénombrable de bananes $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suivant le schéma suivant :



de manière à ce que toute gommelette inscrite dans une banane de la partition soit de diamètre au plus $\frac{1}{2} \text{diam}(E)$.

NB : Cette partition est infinie "du côté du bord droit" mais finie "du côté du bord courbe".

La démonstration s'effectue alors comme suit : Considérons une partie jouée par Dilma et Pedro. Pedro souhaite diverger, donc il va, à une étape de jeu, jouer un point P différent de $0_{\mathbb{R}^2}$. Dilma répond alors de la manière suivante : Elle considère une gommelette E dont le bord droit sépare P et $0_{\mathbb{R}^2}$. Elle partitionne ensuite cette gommelette comme le prescrit le lemme. Le point P appartient alors à une certaine banane de la partition, à l'intérieur de laquelle on inscrit une gommelette E' contenant P et telle que $\text{diam}(E') \leq \frac{1}{2} \text{diam}(E)$. Dilma joue enfin une droite d passant par P et admissible pour E' .



Deux options se présentent alors à Pedro : Soit il joue tous ses coups suivants dans E' , soit il en sort. Dans le premier cas, Dilma reproduit la stratégie précédente dans E' , et elle finit par gagner car les points de Pedro sont contenus dans une suite décroissante de compacts dont le diamètre tend vers 0. Dans le second cas, Pedro sort de E' , mais relativement à la partition en bananes effectuée par Dilma, cela le rapproche du bord, et il va donc rester à l'intérieur d'une des bananes extérieures (qui sont en nombre fini) pour jouer tous ses coups. Dilma applique alors, à nouveau, la stratégie précédente. \square

Ce problème n'a été résolu par aucune équipe (cf. le commentaire en début de solution).