Problème 5

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ est une suite aléatoire $S = (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $S_0 = 0$ et

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n$$

avec $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$ indépendantes et de même loi, définies sur Ω. On dira que la marche est **symétrique** si

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(X_1 = n) = \mathbb{P}(X_1 = -n).$$

On peut montrer et on admet ici qu'une marche aléatoire ne peut avoir que deux comportements possibles :

— ou bien, presque sûrement, la marche aléatoire passe une infinité de fois par 0, et on dit que la marche est **récurrente**.

— ou bien, presque sûrement, la marche aléatoire ne passe qu'un nombre fini de fois par chacun des sites de $\mathbb{Z}$ et on dit que la marche est **transitoire**.

On se demande dans ce problème si la marche obtenue en sommant deux marches aléatoires indépendantes transitoires peut être récurrente, et si la marche obtenue en sommant deux marches aléatoires indépendantes récurrentes peut être transitoire.

Pour déterminer, suivant la loi de X_1, le comportement de la marche aléatoire, on dispose d'un critère analytique dû à Chung et Fuchs, que nous admettons :

$$\text{la marche aléatoire } S \text{ est transitoire} \iff \Re\left(\int_0^1 \frac{dy}{1-\mathbb{E}[e^{iyX_1}]}\right) < +\infty.$$

Dans le cas d'une marche aléatoire symétrique, ce critère se reformule de la façon suivante :

$$\text{la marche aléatoire } S \text{ est transitoire} \iff \int_0^1 \left(\sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(X_1 = n)(1-\cos(yn))\right)^{-1} dy < +\infty.$$

1. On suppose que X_1 est intégrable.
   Montrer que la marche aléatoire S est récurrente si et seulement si $\mathbb{E}[X_1] = 0$.
2. Dans cette question, on suppose qu'il existe $\alpha > 0$ et $c > 0$ tels que, quand $n \to +\infty$,
   $$\mathbb{P}[X_1 = n] = \mathbb{P}[X_1 = -n] \sim \frac{c}{n^{1+\alpha}}.$$
   Pour quelle(s) valeurs(s) de α la marche aléatoire S est-elle récurrente ?
3. Peut-on construire deux marches aléatoires S et S' sur $\mathbb{Z}$, transitoires, indépendantes mais de lois différentes, telles que $S + S'$ soit récurrente ?
   Est-ce possible si S et S' sont des marches aléatoires symétriques ?
4. Peut-on construire deux marches aléatoires S et S' sur $\mathbb{Z}$, symétriques, récurrentes, indépendantes mais de lois différentes, telles que $S + S'$ soit transitoire ?

Solution de l'auteur : Une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ est une suite aléatoire $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $S_0 = 0$ et

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n$$

avec $(X_i)_{i\geqslant 0}$ une suite de variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$ indépendantes et de même loi. On dira que la marche est symétrique si pour tout n entier, $\mathbb{P}(X_1 = n) = \mathbb{P}(X_1 = -n)$.

Pour étudier le comportement de S on peut s'intéresser au nombre de passages de S en un site $k \in \mathbb{N}$: $N_k^S = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{S_n=k}$. On sait que (selon la loi de X_1) il y a deux possibilités pour le comportement de S :

1. Ou bien, presque sûrement, pour tout k dans $\mathbb{Z}$, $N_k^S = +\infty$. On dit alors que la marche est récurrente. C'est par exemple le cas de la marche aléatoire simple.
2. Ou bien, presque sûrement, pour tout x dans $\mathbb{Z}$, $N_k^S < \infty$ (et même on a alors $\mathbb{E}[N_k^S] < +\infty$). On dit alors que la marche est transitoire (on a alors $\liminf |S_n| = +\infty$ p.s.).

Un critère classique pour déterminer si une marche est récurrente ou transitoire est dû à Chung et Fuchs :

$$\Re\left(\int_0^1 \frac{dy}{1-\mathbb{E}[e^{iyX_1}]} < \infty\right) \Leftrightarrow (S \text{ est transitoire})$$

Dans le cas d'une marche symétrique, on peut le reformuler ainsi :

$$\left(\int_0^1 \frac{dy}{\sum_{n\geqslant 1}\mathbb{P}(X_1=n)(1-\cos(ynt))} < \infty\right) \Leftrightarrow (S \text{ est transitoire})$$

1. Montrer que si X_1 est intégrable. La marche S est récurrente si et seulement si $\mathbb{E}[X_1] = 0$.
2. Dans cette question on suppose qu'il existe $\alpha, c > 0$ tels que $\mathbb{P}(X_1 = n) = \mathbb{P}(X_1 = -n) \sim \frac{c}{n^{1+\alpha}}$ avec c_α une constante. Trouver les valeurs de α pour lesquels la marche est récurrente.
3. Peut-on construire S et S' deux marches aléatoires transitoires sur $\mathbb{Z}$ indépendantes mais de lois différentes telles que $S + S'$ soit récurrente ? Est-ce possible si S et S' sont symétriques ?
4. Peut-on construire S et S' deux marches aléatoires symétriques récurrentes sur $\mathbb{Z}$ indépendantes mais de lois différentes telles que $S + S'$ soit transitoire ?

Solution :

1. Si $\mathbb{E}[X_1] = 0$, on utilise le critère de Chung-Fuchs. Par dérivation sous le signe $\mathbb{E}$, on sait que $\mathbb{E}[e^{iyX_1}]$ est dérivable et sa dérivée en 0 est $\mathbb{E}[X_1] = 0$ donc $1 - \mathbb{E}[e^{iyX_1}] =_{y\sim 0} o(y)$ donc la partie réelle de son inverse n'est pas intégrable. La marche est récurrente.
   Si $\mathbb{E}[X_1] \neq 0$, la loi forte des grands nombres nous assure que presque sûrement $S_n \sim_n \mathbb{E}[X_1]n$ et donc S_n tend vers l'infini, la marche est transitoire.
2. Si $f \asymp g$ désigne le fait qu'au voisinage de 0, il existe 2 constantes $c, C > 0$ tels que $cg(t) \leqslant f(t) \leqslant Cg(t)$ alors
   $$\sum_{n\geqslant 1}\mathbb{P}(X_1=n)(1-\cos(ynt)) \asymp \sum_{1\leqslant n\leqslant \lfloor 1/t\rfloor} \frac{yn^2t^2}{n^{1+\alpha}} + O(\sum_{n>\lfloor 1/t\rfloor}\frac{2}{n^{1+\alpha}}) \asymp t^\alpha$$
   dont l'inverse est intégrable ssi $\alpha < 1$ ce qui prouve que la marche est récurrente ssi $\alpha \geqslant 1$.
3. $S_n = n$ et $S'_n = -n$ sont deux marches aléatoires indépendantes transitoires dont la somme est la marche récurrente $S_n = 0$.
   Dans le cas symétrique, montrons que c'est impossible. Pour une marche symétrique, $\mathbb{E}[e^{itX_1}]$ est automatiquement un nombre réel dans $[-1;1]$ qui est positif pour t assez petit par convergence dominée ($\mathbb{E}[e^{itX_1}] \to \mathbb{E}[e^{i0X_1}] = 1$). Pour des nombres entre 0 et 1 on a toujours $1 - ab \geqslant \frac{1-a+1-b}{2}$ donc pour t assez petit,
   $$1 - \mathbb{E}[e^{it(X_1+X_1')}] = 1 - \mathbb{E}[e^{itX_1}]\mathbb{E}[e^{itX_1'}] \geqslant (1/2)(1-\mathbb{E}[e^{itX_1}]).$$
   Si la première marche est transitoire, ce dernier terme est d'inverse intégrable et donc c'est aussi le cas pour le premier terme. Ainsi, si elles sont symétriques, dès que l'une des deux marches est transitoire, la somme des 2 l'est aussi.
4. Nous allons construire deux marches S de pas $(X_i)_{i\geqslant 1}$ et S' de pas $(X_i')_{i\geqslant 1}$ indépendantes symétriques. Telle que pour deux constante c et c',
   $$c\mathbb{P}(X_i = n) + c'\mathbb{P}(X_i' = n) = \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Cela garantit déjà que $S+S'$ est transitoire, en effet :

$$1-\mathbb{E}[e^{it(X_1+X_1')}] \geqslant (1/2)(1-\mathbb{E}[e^{itX_1}]+1-\mathbb{E}[e^{itX_1}]) \asymp \sum_{n\geqslant 1} n^{-3/2}(1-\cos(ynt)) \asymp t^{3/2}$$

qui est intégrable (on a réutilisé le raisonnement de la question 2)
Il faut maintenant choisir correctement la loi de X_1 et celle de X_1'. On va définir par récurrence une suite d'entiers $1=A_0<A_1<A_2<\dots$ On pose ensuite I la sous partie de $\mathbb{N}$ qui est la réunion des intervalles $\{A_{2i};A_{2i}+1;\dots A_{2i+1}-1\}$ et on pose

$$\mathbb{P}(X_i=-n)=\mathbb{P}(X_i=n)=\frac{c}{n^{3/2}}1_{n\in I}$$

$$\mathbb{P}(X_i'=-n)=\mathbb{P}(X_i'=n)=\frac{c'}{n^{3/2}}1_{n\notin I}$$

où c et c' sont des constantes de normalisations. Ces lois vérifient la bonne condition pour que la somme des deux soit transitoire.
Montrons qu'un bon choix des A_i fait que ces marches sont récurrentes :

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 (\sum_{n\geqslant 1}\mathbb{P}(X_1=n)(1-\cos(ynt)))^{-1}dy\\
&\geqslant \int_0^1 (\sum_{1\leqslant n\leqslant A_{2i-1}}\mathbb{P}(X_1=n)\frac{y^2n^2t^2}{2}+\sum_{n>A_{2i}}\mathbb{P}(X_1=n)2)^{-1}dy\\
&\geqslant \int_0^1 (c\sum_{1\leqslant n\leqslant A_{2i-1}}\frac{yn^2t^2}{n^{3/2}}+c\sum_{n>A_{2i}}\frac{2}{n^{3/2}})^{-1}dy
\end{aligned}$$

mais dans cette dernière expression si on fixe A_{2i-1} lorsqu'on fait partir A_{2i} vers l'infini l'intégrale tend par convergence monotone vers l'infini. Donc on peut fixer la valeur de A_{2i} (en fonction de celle de A_{2i-1}) pour que cette intégrale soit plus grande que i. Si on fait ça pour tout i l'intégrale sera plus grande que i pour tout i et donc sera infinie. Il faut suivre la même démarche simultanément pour s'assurer que X_1' sera récurrente cela fixera les A_{2i+1} en fonction des A_{2i}.
Intuitivement : la marche des pas de taille $<A_{2i-1}$ est récurrente (car à support fini) donc quitte à augmenter A_{2i} on diminue la proba qu'un saut plus grand ait lieu mais on peut diminuer la proba tellement qu'il sera très improbable qu'il y ait un de ces grands sauts avant que la marche A_{2i} n'ait fait de multiples passage en 0. Chaque échelle de saut a le temps de "récurrer" avant que l'échelle suivante bouge.

Ce problème n'a été résolu complètement par aucune équipe ; aucune n'a répondu de façon satisfaisante à la question 4.