

Problème 6

On considère une goutte d'encre sphérique (ou circulaire en dimension 2) immergée dans un fluide. Le fluide est en mouvement, avec un champ de vitesse connu, constant dans le temps, et régulier par rapport à la variable d'espace. On suppose aussi que le fluide est contenu dans une structure bornée et que la vitesse du fluide le long de cette structure est nulle.

La goutte d'encre est transportée et déformée par le champ de vitesse (les effets de diffusion et gravité sont supposés négligeables). Le problème est de décrire des caractéristiques qualitatives et quantitatives de la goutte au fur et à mesure de son évolution. Spécifiquement, on considère les exercices/questions suivantes :

1. Montrer que la goutte ne touche jamais la structure.
2. La connexité de la goutte est-elle préservée au cours de son évolution ? Et sa simple connexité ?
3. Comment le volume de la goutte varie-t-il au cours du temps ?
4. Trouver un exemple de champ de vitesse réaliste (en un sens à justifier) pour lequel la goutte perd, à partir d'un certain temps, son caractère convexe.
5. Montrer que, en dimension 2 et pour des temps petits, la goutte reste convexe. Caractériser, en fonction du champ de vitesse ou de quantités déduites du champ de vitesse, le temps maximal pendant lequel la goutte reste convexe.
6. Le champ de vitesses préserve en tout temps certaines propriétés de la goutte, comme sa compacité, la régularité de son bord, etc. Trouver un (ou plusieurs) champ de vitesses qui, *asymptotiquement* en temps long, font tendre la goutte vers une forme géométrique pour laquelle une ou plusieurs de ces propriétés ne sont plus respectées. On ne demande pas ici de trouver un champ de vitesses 'réaliste'.

Solution de l'auteur : Toute la modélisation repose sur le flot associé au champ de vitesse $\vec{u}$ du fluide, c'est à dire la fonction $t \mapsto F_t(\vec{x})$, pour $\vec{x}$ dans la région couverte par le fluide, solution de l'EDO

$$\frac{dF_t}{dt}(\vec{x}) = u(F_t(\vec{x})) \quad \text{et} \quad F_0(\vec{x}) = \vec{x}.$$

Ce flot décrit le transport d'un matériau par le fluide. Précisément, $F_t(\vec{x})$ est la position au temps t d'un point matériel situé en $\vec{x}$ au temps initial. Si B est le domaine initial de la goutte d'encre, $F_t(B)$ est le domaine qu'elle occupe au temps t et les questions tournent donc autour de la description des propriétés de $F_t(B)$.

1. La goutte ne touche pas la structure

Si Ω est le domaine dans lequel le fluide évolue, $\partial\Omega$ est la structure qui le contient. L'hypothèse dit que $u = 0$ sur $\partial\Omega$. Cela implique, par unicité de la solution de l'EDO,

$$\forall \vec{y} \in \partial\Omega, \forall t \in \mathbb{R}, \quad F_t(\vec{y}) = \vec{y} \quad (5)$$

(i.e. $\vec{y}$ est un point stationnaire du champ de vitesse : $\vec{u}(\vec{y}) = 0$). Ainsi, si $\vec{x} \in \Omega$ il ne peut exister de temps tel que $F_t(\vec{x}) \in \partial\Omega$. Sans ça, on aurait $\vec{y} = F_t(\vec{x}) \in \partial\Omega$ et, par (5) et propriété du flot, $\vec{y} = F_{-t}(\vec{y}) = \vec{x} \in \partial\Omega$, ce qui n'est pas possible.

Ainsi, aucun point de $B \subset \Omega$ ne peut se retrouver transporté par le flot sur la structure, et la goutte reste contenue dans Ω .

Ceci montre aussi que le flot reste contenu dans le compact $\overline{\Omega}$ sur lequel $\vec{u}$ est régulier, et donc que $t \mapsto F_t(\vec{x})$ existe pour tout $t \in \mathbb{R}$.

2. Connexité

La préservation de la connexité est triviale : puisque $\vec{x} \mapsto F_t(\vec{x})$ est continue (propriétés de régularité du flot), $F_t(B)$ est connexe puisque B est connexe.

La simple connexité est moins triviale. En général, l'image par une fonction continue d'un ensemble simplement connexe n'est pas simplement connexe ; par exemple, $[0, 2\pi]$ est simplement connexe mais $\exp(i[0, 2\pi]) = \text{cercle unité dans } \mathbb{R}^2$ n'est pas simplement connexe. Cependant, F_t n'est pas qu'une fonction continue, c'est en fait un homéomorphisme de Ω avec $F_t^{-1} = F_{-t} \dots$

Si on prend une courbe fermée $\gamma : [0, 1] \rightarrow F_t(B)$ alors $F_{-t} \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow B$ est une courbe fermée, pour laquelle (par simple connexité de B) il existe une homotopie $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow B$ telle que $h(0, \cdot) = F_{-t} \circ \gamma$ et $h(1, \cdot) = a$ (point fixé dans B). La fonction $F_t \circ h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow F_t(B)$ est donc bien définie et une homotopie entre $F_t \circ h(0, \cdot) = F_t \circ F_{-t} \circ \gamma = \gamma$ et la fonction constante $F_t \circ h(1, \cdot) = F_t(a) \in F_t(B)$. Cela prouve que $F_t(B)$ est bien simplement connexe.

3. Volume

La question de déterminer l'évolution du volume de $F_t(B)$ est moins évidente. Un théorème de Liouville bien connu en dynamique des fluides dit que les volumes sont préservés par les champ de vitesse à divergence nulle. Mais on ne suppose pas cela ici... il faut établir un theoreme de Liouville généralisé (moins connu que celui à divergence nulle).

En notant $|\cdot|$ le volume, ce théorème dit dans notre situation que

$$\frac{d}{dt}|F_t(B)| = \int_{F_t(B)} \operatorname{div} \vec{u}(\vec{x}) d\vec{x}. \quad (6)$$

Il y a plusieurs approches possibles pour prouver cela. Cela peut être fait de manière très géométrique, en décrivant le mouvement infinitésimal de $F_t(B)$ à sa frontière. Le plus simple est cependant d'utiliser une EDO sur le déterminant Jacobien JF_t de F_t , pour trouver une représentation de ce Jacobien.

Lemme (Représentation de JF_t). *Le déterminant Jacobien du flot F_t satisfait, pour $x \in \Omega$ et $t \in \mathbb{R}$,*

$$JF_t(\vec{x}) = \exp \left(- \int_0^t \operatorname{div} \vec{u}(F_s(\vec{x})) ds \right). \quad (7)$$

Preuve. La différentielle du déterminant en une matrice A est la forme linéaire $D \det_A : \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall H \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}), \quad D \det_A(H) = \operatorname{tr}((A')^T H),$$

où $(A')^T$ est la transposée de la co-matrice de A . Différencier la propriété du flot $\operatorname{Id} = F_{-t} \circ F_t$ montre que DF_t est inversible avec $(DF_t(\vec{x}))^{-1} = (DF_{-t})(F_t(\vec{x}))$. Ainsi, la relation entre la co-matrice et l'inverse donne alors $((DF_t(\vec{x}))')^T = \det(DF_t(\vec{x}))(DF_t(\vec{x}))^{-1}$, et donc, par différentiation de composition $\det$ avec DF_t ,

$$\frac{d}{dt} JF_t(\vec{x}) = \frac{d}{dt} \det(DF_t(\vec{x})) = JF_t(\vec{x}) \operatorname{tr} \left((DF_t(\vec{x}))^{-1} \frac{d}{dt} DF_t(\vec{x}) \right).$$

Différentier en espace l'EDO sur F_t donne

$$\frac{d}{dt} DF_t(\vec{x}) = D\vec{u}(F_t(\vec{x})) DF_t(\vec{x}) \quad (8)$$

et on arrive, par propriété de la trace, à

$$\frac{d}{dt} JF_t(\vec{x}) = JF_t(\vec{x}) \operatorname{tr} \left((DF_t(\vec{x}))^{-1} D\vec{u}(F_t(\vec{x})) DF_t(\vec{x}) \right) = JF_t \operatorname{tr}(D\vec{u}(F_t(\vec{x}))) = JF_t(x) \operatorname{div} \vec{u}(F_t(\vec{x})).$$

Autrement dit, l'EDO sur le déterminant Jacobien de F_t est :

$$\frac{d}{dt} JF_t(\vec{x}) = \operatorname{div} \vec{u}(F_t(\vec{x})) JF_t(\vec{x}). \quad (9)$$

La formule (6) est obtenue en intégrant cette EDO (linéaire homogène d'ordre 1) et en utilisant $JF_0 = \det(DF(0)) = \det \text{Id} = 1$. $\square$

Pour établir (6), on écrit ensuite, par changements de variables (puisque F_t est un difféomorphisme de Ω),

$$\frac{d}{dt}|F_t(B)| = \frac{d}{dt} \int_B JF_t(\vec{x}) d\vec{x} = \int_B \text{div } \vec{u}(F_t(\vec{x})) JF_t(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{F_t(B)} \text{div } \vec{u}(\vec{y}) d\vec{y}.$$

Du coup, $|F_t(B)|$ est obtenu comme

$$|F_t(B)| = |B| + \int_0^t \left(\int_{F_s(B)} \text{div } \vec{u}(\vec{x}) d\vec{x} \right) ds = |B| + \int_B \left(\int_0^t JF_s(\vec{x}) \text{div } \vec{u}(F_s(\vec{x})) ds \right) d\vec{x}.$$

On retrouve $|F_t(B)| = |B|$ si $\text{div } \vec{u} = 0$. Si $\text{div } \vec{u}$ est uniforme sur Ω , donc $\text{div } \vec{u} = C$ pour une constante $C \in \mathbb{R}$, $\frac{d}{dt}|F_t(B)| = C|F_t(B)|$ donne

$$|F_t(B)| = |B|e^{Ct}.$$

4. et 5. Convexité

Pour la perte de convexité, il suffit de considérer un écoulement de Poiseuille. Cet écoulement est utilisé comme prototype dans de nombreuses situations, et son aspect réaliste est justifié par le fait qu'il satisfait les équations de Navier–Stokes incompressibles (avec conditions au bord homogènes).

Si le tube est horizontal entre $y = -1$ et $y = 1$, on a donc $u(x, y) = (V(1 - y^2), 0)$ pour un $V > 0$ constant. Si on considère la boule $B = B(0, 1/2)$, à partir d'un certain temps, le segment joignant $(0, 1/3)$ et $(0, -1/3)$ n'est plus contenu dans la boule, car le point extrême à droite $(-1/2, 0)$ est passé à droite du segment joignant $F_t(0, 1/3)$ et $F_t(0, -1/3)$. La figure 1 illustre ceci (voir aussi la figure 2 pour une simulation numérique).

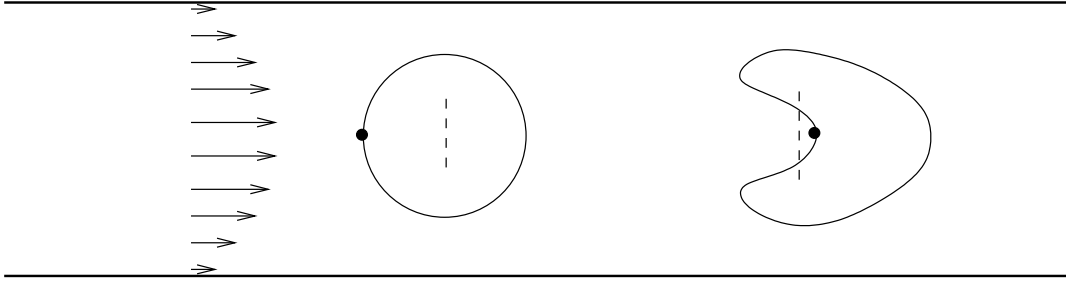


FIGURE 1 – Écoulement de Poiseuille, boule initiale et boule déformée par l'écoulement en un domaine non-convexe.

Cela se voit plus rigoureusement en constatant que, pour cet écoulement, $F_t(x, y) = (x + V(1 - y^2)t, y)$. Ainsi, $F_t(-1/2, 0) = (-1/2 + Vt, 0)$ et $F_t(0, \pm 1/3) = (V(1 - (1/3)^2)t, \pm 1/3)$. Ainsi, tous les points du segment $[F_t(0, 1/3), F_t(0, -1/3)]$ ont pour abscisse $V(1 - (1/3)^2)t = \frac{8}{9}Vt$, qui est plus petit que l'abscisse $-1/2 + Vt$ de $F_t(-1/2, 0)$ dès que $t > 9/2V$.

La préservation de convexité de $F_t(B)$ peut être étudiée en 2D à l'aide de la courbure de son bord (qui est une courbe fermée simple puisque F_t est un difféomorphisme). On constate d'abord que $F_t(\partial B) = \partial F_t(B)$ puisque F_t est un difféomorphisme [quelques détails de plus à donner peut-être].

Une paramétrisation du bord de $F_t(B)$ est obtenue en envoyant par F_t une paramétrisation du bord de B (supposée de rayon r et centrée en 0), par exemple,

$$\gamma_t : s \in [0, 2\pi] \rightarrow F_t(\mu(s)) \in \mathbb{R}^2$$



FIGURE 2 – Evolution d’une boule dans un écoulement de Poiseuille : en haut, position et forme initiale ; en bas, position et forme finale.

où $\mu(s) = re^{is}$. Comme F_t préserve l’orientation (car $JF_t > 0$ par (7)), γ_t parcourt $\partial F_t(B)$ dans le sens trigonométrique et la convexité de $F_t(B)$ est donc assurée si $\det(\gamma'_t(s), \gamma''_t(s)) \geq 0$ pour tout $s \in [0, 2\pi]$. On a $\gamma'_t(s) = DF_t(\mu(s))\mu'(s)$ et $\gamma''_t(s) = DF_t(\mu(s))\mu''(s) + D^2F_t(\mu(s))(\mu'(s), \mu'(s))$ donc

$$\begin{aligned} \det(\gamma'_t(s), \gamma''_t(s)) &= \det(DF_t(\mu(s))\mu'(s), DF_t(\mu(s))\mu''(s)) \\ &\quad + \det[DF_t(\mu(s))\mu', D^2F_t(\mu(s))(\mu'(s), \mu'(s))] \\ &= \det(DF_t(\mu(s))) \det(\mu'(s), \mu''(s)) \\ &\quad + \det[DF_t(\mu(s))\mu'(s), D^2F_t(\mu(s))(\mu'(s), \mu'(s))] \\ &= r^2 JF_t(\mu(s)) + \det[DF_t(\mu(s))\mu'(s), D^2F_t(\mu(s))(\mu'(s), \mu'(s))] \end{aligned} \quad (10)$$

car $\det(\mu'(s), \mu''(s)) = r^2$ puisque $\mu(s) = re^{is}$.

On a $D^2F_0(\vec{x}) = D^2\text{Id} = 0$ et donc, pour t petit, $D^2F_t(\vec{x})$ reste petit, uniformément en $\vec{x}$ (par continuité de $(t, \vec{x}) \rightarrow D^2F_t(\vec{x})$). Comme $JF_0(\vec{x}) = 1$, le membre de droite de (10) reste bien positif, pour tout s , dès que t est assez petit. Le premier temps où ce terme de droite devient négatif pour un certain s (temps qui peut être déterminé à partir de $\vec{u}$ uniquement, puisque F_t est donné par ce champ de vecteurs) correspond au temps de perte de convexité de la goutte.

6. Comportement asymptotique

On peut considérer un champ de vitesse qui transforme la goutte en carré (dont le bord n’est pas régulier, contrairement à celui de la boule). Par exemple, dans l’ouvert $(-1.5, 1.5)^2$,

$$u(x, y) = (x+1)(1-x)(y+1)(1-y) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

étendu par 0 en dehors du carré $[-1, 1]^2$. Voir Figure 3. Ce champ n’est que Lipschitz-continu, mais une option lisse peut être aisément obtenu par un changement du facteur de troncation $(x+1)(1-x)(y+1)(1-y)$.

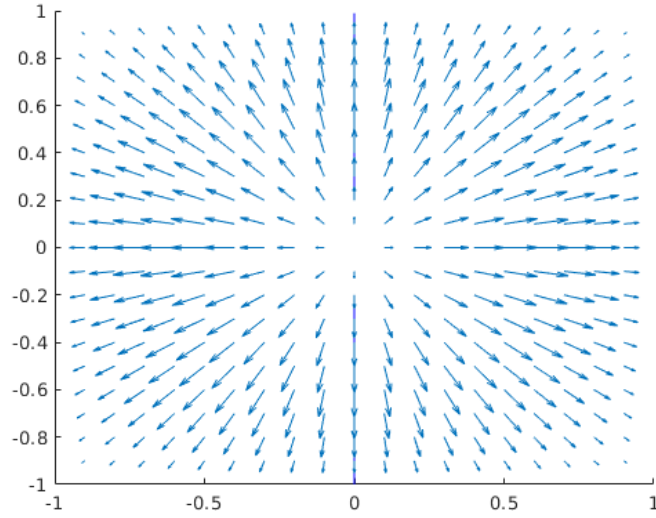


FIGURE 3 – Champ de vitesse transformant une boule en carré.

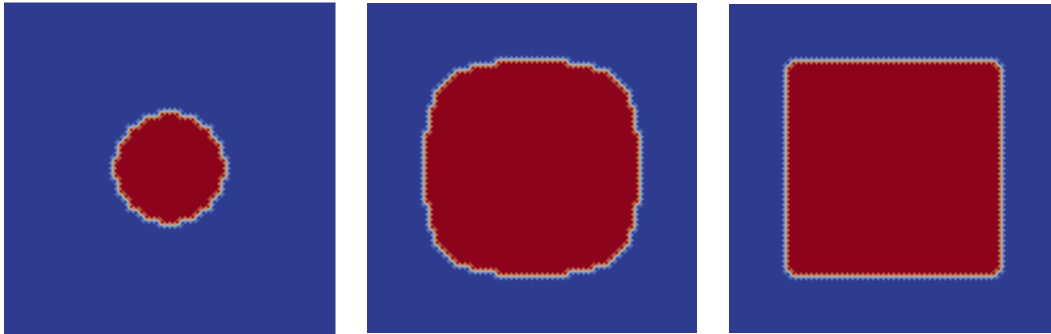


FIGURE 4 – Evolution de la boule aux temps 0, 2, 6.

Solution de l'équipe Oubama : Dans un premier temps il convient de décrire le modèle mathématique sur lequel nous allons travailler dans la suite afin de nous intéresser aux propriétés qualitatives de la goutte d'encre. Pour cela, nous allons dénoter par Ω la structure, vue comme un sous-ensemble borné (et que nous allons supposer ouvert) de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, et modéliser les mouvements de la goutte de la manière suivante sous la forme d'un système d'équations différentielles :

- Pour une particule $x \in \Omega$ du fluide contenu dans la structure, on note $v(x) \in \mathbb{R}^d$ la vitesse du fluide à ce point. On supposera que l'influence de la goutte d'encre sur la vitesse du fluide est négligeable, si bien que le champ de vitesse considéré restera constant au cours du temps.
- On considère alors qu'une particule de la goutte d'encre va évoluer selon le fluide, c'est-à-dire que si $x(t)$ est la position d'une certaine particule de la goutte d'encre, son évolution spatiale sera décrite par l'équation différentielle

$$\dot{x}(t) = v(x(t)) \quad (11)$$

On va supposer que le champ de vitesse est régulier. Plus précisément, on va demander les propriétés suivantes à v : v est lisse (de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur l'adhérence $\bar{\Omega}$ de la structure ; son extension par zéro en-dehors de la structure est également lisse. Sous ces conditions, le théorème de Cauchy-Lipschitz (voir Demailly,

Analyse numérique et équations différentielles par exemple) nous permet d'affirmer que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, il existe une unique solution au problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v(x(t)) \\ x(0) = x \end{cases}$$

Comme les solutions de cette équation restent contenues dans un compact, (dans l'adhérence de Ω pour $x_0 \in \Omega$ qui est compact ; sinon la solution est constante), on en déduit donc que ces solutions sont définies en tout temps positif (par le lemme de sortie des compacts).

Il est donc possible de définir le flot $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ associé à l'équation différentielle, c'est-à-dire la famille d'applications de Ω dans $\overline{\Omega}$ qui à x associe $\phi_t(x)$ définie comme $y(t)$ où y est l'unique solution de l'équation différentielle telle que $y(0) = x$ (pour t négatif on considère l'équation $\dot{x}(t) = -v(x(t))$). Cette famille d'applications va être cruciale dans la suite puisqu'elle va nous permettre d'étudier la goutte d'encre dans sa globalité au lieu de suivre chaque particule individuellement.

Évolution des propriétés de la goutte

Nous allons tout d'abord étudier quelques propriétés du flot de l'équation différentielle. De ces propriétés de régularité du flot on obtiendra alors des propriétés géométriques de la goutte d'encre.

Propriétés du flot

Comme le champ de vitesse est supposé lisse, nous pouvons tout d'abord donner des propriétés de régularité pour le flot :

Proposition. *Pour tout temps t positif ou négatif, le flot ϕ_t vu comme fonction de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$ est un difféomorphisme global.*

Démonstration. Remarquons tout d'abord que l'unicité de la solution au problème de Cauchy nous donne que pour tous réels t et s , on a $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$. Par conséquent le flot ϕ_t est bien une application bijective de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$, d'inverse ϕ_{-t} .

De plus cette application est lisse et différentiable de différentielle inversible en tout point : pour la régularité du flot, ceci s'ensuit de la régularité du champ de vitesse en montrant par récurrence sur $k \geq 1$ que le flot est de classe C^k . De plus, on a que pour tous $x \in \mathbb{R}^d$ et t tel que $D\phi_t(x)$ soit différentiable (où $D\phi_t(x)$ est la différentielle de ϕ_t au point x),

$$\frac{d}{dt} \det(D\phi_t(x)) = \det(D\phi_t(x)) \operatorname{Tr}(D\phi_t(x)^{-1} Dv(x))$$

puisque l'application déterminant est différentiable en toute matrice M inversible, avec $D \det(M) \cdot H = \det(M) \operatorname{Tr}(M^{-1}H)$ (ici M est la matrice $D\phi_t(x)$ et H est la matrice $Dv(x)$).

Comme $\phi_0 = Id$ est différentiable on en déduit que $\det(D\phi_t(x)) > 0$ pour tout temps t , et donc que $D\phi_t(x)$ est inversible pour tout x dans $\mathbb{R}^d$. Par le théorème d'inversion globale on obtient bien que ϕ_t est un difféomorphisme global. $\square$

De ces propriétés de régularité il est possible de déduire des propriétés topologiques d'ensembles, comme le montre le résultat suivant :

Proposition. *Soit ψ un difféomorphisme local. Alors :*

- *l'image directe par ψ d'un espace connexe est connexe*
- *l'image directe par ψ d'un espace simplement connexe est simplement connexe*
- *l'image directe par ψ d'un espace compact est compacte*
- *l'image directe par ψ d'un ouvert borné à bord lisse est un ouvert borné à bord lisse*

Démonstration. On sait que si f est une application continue (resp. continue à valeurs dans un espace séparé), et que C est connexe (resp. compact), alors $f(C)$ est connexe (resp. compact).

Si f est de plus un homéomorphisme (f^{-1} est continue) et C est simplement connexe, alors $f(C)$ est simplement connexe également, puisqu'alors f induit un isomorphisme entre les groupes fondamentaux de C (qui est trivial) et de $f(C)$, avec $f_* : [\gamma] \mapsto [f \circ \gamma]$.

Pour la dernière assertion, il convient tout d'abord de définir la notion de domaine à bord lisse. Nous adoptons la convention qu'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ possède un bord de classe $\mathcal{C}^k$ lorsque pour tout $x \in \overline{\Omega}$ il existe U un voisinage de x dans $\mathbb{R}^d$, V un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et ϕ un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^k$ entre U et V tels que $\phi(U \cap \Omega) = V \cap \{y_n > 0\}$ et $\phi(U \cap \partial\Omega) = V \cap \{y_n = 0\}$. Dans ce cas le résultat est clair en prenant $\phi \circ \psi^{-1}$ sur $\psi(\Omega)$. $\square$

Propriétés géométriques de la goutte d'encre

Notons S l'étendue initiale de la goutte d'encre. Par définition du flot, la goutte d'encre plongée dans le fluide occupera, en temps t , l'étendue $\phi_t(S)$. En combinant les propriétés vues précédemment, on en déduit donc que :

Proposition. *Les caractéristiques suivantes de la goutte d'encre sont conservées en temps fini : sa connexité et sa simple connexité ; sa compacité ; la régularité de son bord.*

Il est intéressant de voir que ces propriétés sont conservées indépendamment de la forme sphérique/circulaire initiale de la goutte d'encre.

Une autre propriété géométrique de la goutte d'encre qu'il est également pertinent de considérer est sa convexité. Mais dans ce cas on n'a pas de conservation de cette propriété au cours du temps, comme le montre l'exemple suivant :

Exemple. *Considérons un fleuve dans lequel on a une force de courant. En règle générale, ce courant est plus fort au centre du fleuve que sur le bord du fleuve. On considère alors l'évolution de la goutte d'encre lorsque posée en surface du fleuve en adoptant la modélisation suivante : on considère comme structure une bande $[-l, l] \times [-L, L]$ dans laquelle le champ de vitesse est décrit par $v(x, y) = (0, -v_0(l^2 - x^2))$.*

Il est alors clair que l'on a pour toute particule (x, y) initialement dans la goutte d'encre (qui est le disque unité) $\phi_t(x, y) = (x, y - v_0 t(l^2 - x^2))$, et donc en particulier une particule (x, y) avec $x, y > 0$ initialement sur le bord de sphère traversera le segment entre les points initialement en $(-1, 0)$ et $(1, 0)$ en temps $t = \frac{1 - (1 - x^2)^{1/2}}{v_0(1 - x^2)}$, rompant ainsi la convexité de la goutte d'eau dès que $t > \frac{1 - (1 - x^2)^{1/2}}{v_0(1 - x^2)}$ (puisque pour tout $t > \frac{1 - (1 - x^2)^{1/2}}{v_0(1 - x^2)}$ la particule initialement en $(x, 0)$ n'appartient pas à la goutte d'encre mais appartient cependant à son enveloppe convexe). La convexité n'est donc pas conservée au cours du temps.

On voit donc que la connexité de la goutte d'eau est une propriété géométrique qui n'est pas conservée au cours du temps. Il est toutefois possible d'estimer la durée pendant laquelle la goutte reste convexe, dans le sens de la proposition suivante :

Proposition. *Considérons Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ et S disque contenu dans Ω . Soient a, b et c trois points distincts sur le bord de S et $\cos \theta_0 = \langle \frac{b-a}{\|b-a\|}, \frac{x-a}{\|x-a\|} \rangle > 0$ le cosinus de l'angle $\widehat{BAX}$.*

Alors la particule initialement en x ne traverse le segment reliant les particules initialement en a et b qu'en temps supérieur à

$$T_{conv} = \frac{\theta_0}{2\|\nabla v\|}$$

où $\|\nabla v\| = \sup_{x \neq y \in \Omega} \frac{|v(x) - v(y)|}{|x - y|}$, qui est fini puisque v est lipschitzienne.

Il est intéressant de noter que cette propriété ne dépend pas non plus de la forme initiale de la goutte d'encre.

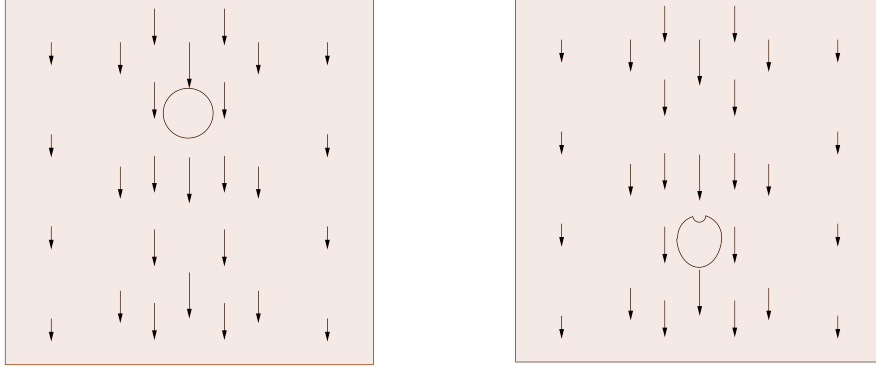


FIGURE 5 – La goutte d’eau peut perdre son caractère convexe

Démonstration. Posons

$$\cos(\theta_t) = \left\langle \frac{\phi_t(b) - \phi_t(a)}{\|\phi_t(b) - \phi_t(a)\|}, \frac{\phi_t(x) - \phi_t(a)}{\|\phi_t(x) - \phi_t(a)\|} \right\rangle$$

le cosinus de l’angle formé par ces trois points. Par construction x ne peut traverser le segment formé par a et b tant que $\cos \theta_t < 1$.

Or $\cos \theta_t$ est différentiable avec

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \cos \theta_t &= -\cos \theta_t \left(\left\langle \frac{v(\phi_t(b)) - v(\phi_t(a))}{\|\phi_t(b) - \phi_t(a)\|}, \frac{\phi_t(b) - \phi_t(a)}{\|\phi_t(b) - \phi_t(a)\|} \right\rangle + \left\langle \frac{v(\phi_t(x)) - v(\phi_t(a))}{\|\phi_t(x) - \phi_t(a)\|}, \frac{\phi_t(x) - \phi_t(a)}{\|\phi_t(x) - \phi_t(a)\|} \right\rangle \right) \\ &\quad + \left\langle \frac{v(\phi_t(b)) - v(\phi_t(a))}{\|\phi_t(b) - \phi_t(a)\|}, \frac{\phi_t(x) - \phi_t(a)}{\|\phi_t(x) - \phi_t(a)\|} \right\rangle + \left\langle \frac{v(\phi_t(x)) - v(\phi_t(a))}{\|\phi_t(x) - \phi_t(a)\|}, \frac{\phi_t(b) - \phi_t(a)}{\|\phi_t(b) - \phi_t(a)\|} \right\rangle \end{aligned}$$

et donc

$$\frac{d}{dt} \cos \theta_t = \sin \theta_t (< V_b, U_x > + < V_x, U_b >)$$

où $V_b = \frac{v(\phi_t(b)) - v(\phi_t(a))}{\|\phi_t(b) - \phi_t(a)\|}$, U_x de norme 1 et colinéaire à $\frac{\phi_t(x) - \phi_t(a)}{\|\phi_t(x) - \phi_t(a)\|} - \frac{\phi_t(b) - \phi_t(a)}{\|\phi_t(b) - \phi_t(a)\|} \cos \theta_t$ (et de même pour V_x et U_b) puisque $\left\| \frac{\phi_t(x) - \phi_t(a)}{\|\phi_t(x) - \phi_t(a)\|} - \frac{\phi_t(b) - \phi_t(a)}{\|\phi_t(b) - \phi_t(a)\|} \cos \theta_t \right\|^2 = 1 - \cos(\theta_t)^2 = \sin(\theta_t)^2$.

On en déduit donc que

$$\frac{d}{dt} \theta_t = < V_b, U_x > + < V_x, U_b >$$

puis que, dans le cas $\theta_0 > 0$, $\theta_t \geq \theta_0 - 2\|\nabla v\|t$, et par conséquent on a que $\theta_t = 0$ impose d’avoir $t \geq \frac{\theta_0}{2\|\nabla v\|}$. On en déduit donc le résultat souhaité. $\square$

Propriétés quantitatives de la goutte d’encre

On va dans cette partie s’intéresser à des propriétés plus quantitatives de la goutte d’encre, comme la taille de l’étendue de sa surface. l’évolution de ces quantités peut être mesuré à l’aide d’une certaine fonction du champ des vitesses de la manière suivante :

Proposition. Notons $V_t = \text{vol}(\phi_t(S))$ le volume de la goutte d’encre au temps t et P_t son périmètre.

Alors

$$\frac{d}{dt} V_t = \int_{\phi_t(S)} \text{div}(v)(x) d\lambda(x) \quad (12)$$

où λ est la mesure de Lebesgue et $\text{div}(v) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$ est la divergence du champ de vitesse.

En particulier si le champ de vitesse est à divergence nulle alors le volume de la goutte d'encre est conservé.

Démonstration. Par la formule de changement de variable,

$$V_t = \int_{\phi_t(S)} d\lambda(x) = \int_S |\det(\frac{\partial(\phi_t)_i}{\partial x_j})| d\lambda(x)$$

où $\det(\frac{\partial(\phi_t)_i}{\partial x_j})$ est le jacobien de ϕ_t . Or on sait que $\frac{d}{dt} \det(\frac{\partial(\phi_t)_i}{\partial x_j}) = \det(\frac{\partial(\phi_t)_i}{\partial x_j}) \text{Tr}((\frac{\partial v_i}{\partial x_j}) \circ \phi_t) = \det(\frac{\partial(\phi_t)_i}{\partial x_j}) \text{div}(v) \circ \phi_t$ puisque l'application déterminant est différentiable en toute matrice M inversible, avec $D\det(M) \cdot H = \det(M) \text{Tr}(M^{-1}H)$ (ici M est la matrice $(\frac{\partial(\phi_t)_i}{\partial x_j})$ et H est la matrice $(\frac{\partial(v \circ \phi_t)_i}{\partial x_j}) = M(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}) \circ \phi_t$).

On en déduit donc que $\frac{d}{dt} V_t = \int_S |\det(\frac{\partial(\phi_t)_i}{\partial x_j})| \text{div}(v) \circ \phi_t d\lambda(x) = \int_{\phi_t(S)} \text{div}(v)(x) d\lambda(x)$.

□

Une autre quantité qu'il pourrait être intéressant de considérer est le diamètre de la goutte d'encre, est-à-dire la distance maximale entre deux points de la goutte d'encre :

Proposition. Notons, pour tout temps t , $D_t = \sup_{a,b \in S} |\phi_t(b) - \phi_t(a)|$ le diamètre de la goutte d'encre. Alors

$$D_0 e^{-\|\nabla v\|t} \leq D_t \leq D_0 e^{\|\nabla v\|t} \quad (13)$$

Démonstration. Soient a, b deux points de la goutte d'encre. Alors

$$\frac{d}{dt} \|\phi_t(b) - \phi_t(a)\| = \frac{v(\phi_t(b)) - v(\phi_t(a))}{\|\phi_t(b) - \phi_t(a)\|} \cdot \|\phi_t(b) - \phi_t(a)\| \leq \|\nabla v\| \cdot \|\phi_t(b) - \phi_t(a)\|$$

Par le lemme de Gronwall on obtient donc les estimations $\|b - a\| e^{-\|\nabla v\|t} \leq \|\phi_t(b) - \phi_t(a)\| \leq \|b - a\| e^{\|\nabla v\|t}$. Par conséquent on a bien le résultat attendu. □

Avec la même preuve, on peut de la même manière quantifier la distance entre le bord de la structure et la goutte d'encre :

Proposition. Notons, pour tout temps t , $d_t = \inf_{a \in S, b \in \partial\Omega} |b - \phi_t(a)|$ la distance entre la goutte d'encre et le bord de la structure. Alors

$$d_0 e^{-\|\nabla v\|t} \leq d_t \leq d_0 e^{\|\nabla v\|t} \quad (14)$$

En particulier la goutte d'encre ne touchera pas le bord de la structure en temps fini.

Généralisation des résultats

Dans l'étude précédente, nous nous sommes intéressés au cas d'une goutte plongée dans un fluide contenu dans une structure plane ou tri-dimensionnelle. Il peut également être pertinent de se demander si ces résultats restent vrais lorsque l'on considère que le fluide n'est plus contenu dans une telle structure, mais sur une surface quelconque ou dans un solide quelconque, ou plus généralement dans une variété réelle (lisse) de dimension 2 ou 3, notée M .

Dans ce contexte, le problème se modélise de la même façon à ceci près que le champ de vitesse $v : \Omega \rightarrow \Omega$ sera changé en un champ de vecteurs lisse $X : M \rightarrow TM$ où TM désigne l'espace tangent de M . Les propriétés de régularité du flot restent alors valables dans ce contexte (ces propriétés étant de nature locale on peut se ramener à l'aide de cartes locales à $\mathbb{R}^d$, auquel cas les résultats ont été vu plus haut). On peut donc appliquer la même démarche que celle effectuée plus haut pour obtenir que

Proposition. Dans le cas de variétés lisses, les caractéristiques géométriques suivantes de la goutte d'encre sont conservées en temps fini : sa connexité et sa simple connexité ; sa compacité ; la régularité de son bord.

L'évolution de quantités telles que le volume ou le diamètre sont décrites par des équations

$$\frac{d}{dt} \text{vol}(\phi_t(S)) = \int_{\phi_t(S)} \text{div} X dg \quad (15)$$

où X est la divergence du champ de vecteur X , et

$$D_0 e^{-\|\nabla v\|t} \leq D_t \leq D_0 e^{\|\nabla v\|t} \quad (16)$$

Étude asymptotique de la forme de la goutte d'encre

Les propriétés que nous avons étudié dans la partie précédente concernaient l'état en temps fini de la goutte d'encre. On est donc en droit de se demander que deviennent ces propriétés lorsque l'on s'intéresse à l'asymptotique de la goutte d'encre. On va en fait montrer que les propriétés que l'on a vues précédemment ne restent plus valables lorsque l'on considère le système en temps infini, en s'appuyant sur les exemples suivants.

Exemple. On suppose que le fluide est contenu dans une structure symétrique par rotation autour de l'origine, avec un col à l'origine et un val sur le cercle de rayon 2, puis de nouveau un col sur le cercle de rayon 4.

Dans cette structure, le champ de vitesse du fluide est décrit par une fonction radiale et orientée depuis l'origine vers le cercle de rayon 2, on peut par exemple penser à une fonction du type $v(r) = r(2 - r)$ pour $r < 2$ ou $v(r) = \sin(\pi r)$.

Dans ce cas il est clair que si la goutte d'eau occupe initialement le disque centré en l'origine et de rayon $1/2$, toutes ses particules exceptée celle au centre vont migrer vers le val, seule position d'équilibre stable de la structure. Par conséquent la goutte d'encre obtenue asymptotiquement est décrite par la réunion du cercle de rayon 2 centré à l'origine et de l'origine. Cet objet n'est pas connexe (en particulier n'est simplement connexe) et son bord intérieur n'est pas régulier.

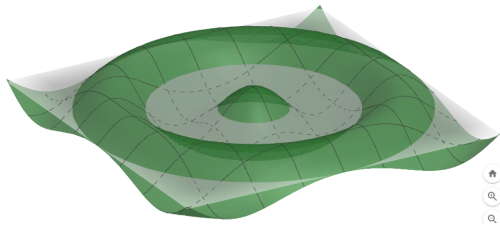


FIGURE 6 – La goutte d'encre occupe la tache verte centrale

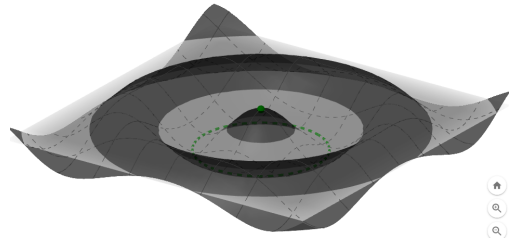


FIGURE 7 – État de la goutte d'encre après un temps infini, en vert