

# Concours SMF Junior 2018

## Enoncés des problèmes et solutions

Vous trouverez ci-dessous les 10 problèmes de la session 2018 du concours SMF junior, et pour chacun d'entre eux la solution du ou des auteurs, et lorsqu'il y en a une, celle que le jury a jugée la plus remarquable parmi celles proposées par les candidat.e.s.

### Problème 1

Pour une fonction continue  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  on note  $\Gamma_f = \{(x, f(x)), x \in [0, 1]\}$  son graphe. Soit  $C \subset \mathbb{R}^2$  le flocon de Von Koch. Existe-t-il un nombre dénombrable de fonctions continues  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  et d'isométries du plan  $T_n : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  telles que l'on ait l'inclusion suivante ?

$$C \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n(\Gamma_{f_n}).$$

Une référence pour le flocon de Von Koch peut être :  
<http://staff.math.su.se/lenb/dok/von-Koch-1904.pdf>.

**Solution de l'auteur :** la réponse est non. Soit  $K$  l'unique ensemble compact non vide auto-similaire vérifiant  $K = \bigcup_{i=1}^4 \phi_i(K)$ , où  $\phi_1(z) = z/3$ ,  $\phi_2(z) = (e^{i\pi/3}z + 1)/3$ ,  $\phi_3(z) = (e^{-i\pi/3}z + e^{i\pi/3} + 1)/3$ , et  $\phi_4(z) = (z + 2)/3$ . La courbe  $\mathcal{C}$  est l'ensemble connexe obtenu en posant sur chacun des côtés d'un triangle équilatéral de côté 1 une copie de  $K$ , de sorte que  $\mathcal{C}$  soit à l'extérieur du triangle. On munit  $\mathcal{C}$  de la topologie induite par la distance euclidienne sur le plan. On peut toujours supposer sans perte de généralité que  $K \subset \mathcal{C}$ , ce que nous ferons.

Nous allons démontrer que pour toute fonction continue  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  et toute isométrie  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , l'ensemble  $\mathcal{C} \cap T(\Gamma_f)$  (qui est fermé dans  $\mathcal{C}$ ) est nulle part dense dans  $\mathcal{C}$ . Alors, par le théorème de Baire, toute union dénombrable d'ensembles de la forme  $\mathcal{C} \cap T_n(\Gamma_{f_n})$  est également nulle part dense dans  $\mathcal{C}$  qui est complet; elle ne peut donc pas recouvrir  $\mathcal{C}$ .

Supposons que  $\mathcal{C} \cap T(\Gamma_f)$  ne soit pas nulle part dense dans  $\mathcal{C}$ . Dans ce cas, comme  $T(\Gamma_f)$  est fermé, il existe un point  $c \in \mathcal{C}$  et une boule  $B(c, r)$  (avec  $r > 0$ ) tels que  $\mathcal{C} \cap B(c, r) \subset T(\Gamma_f)$ . Sans perte de généralité on peut supposer que  $\emptyset \neq K \cap B(c, r) \subset T(\Gamma_f)$ . Aussi, il existe un entier  $j$  tel que l'image de  $K$  par une similitude  $S_j$  de rapport  $3^{-j}$  soit contenue dans  $K \cap B(c, r)$ .

Montrons que dans toute direction du plan on peut trouver une droite intersectant  $K$  en au moins deux points, et donc par similitude une droite intersectant  $S_j(K)$  en au moins deux points. Cela contredira la propriété de  $\Gamma_f$  d'être un graphe puisque  $S_j(K) \subset \Gamma_f$ , et il sera établi que  $\mathcal{C} \cap T(\Gamma_f)$  est nulle part dense dans  $\mathcal{C}$ .

Constatons alors que les images de 0 et de 1 par les itérées du système  $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4\}$  sont toutes dans  $K$ . C'est en particulier le cas de  $P_1 = \phi_1(0)$ ,  $Q_1 = \phi_1(1) = \phi_2(0)$  et  $Q_2 = \phi_2(1)$ . Soit  $g$  l'application de  $\phi_2(K)$  (qui ne contient pas  $P_1$ ) dans  $\mathbb{S}^1$  qui à  $Q$  associe  $\frac{P_1 \vec{Q}}{\|P_1 \vec{Q}\|}$ . Comme  $\phi_2(K)$  est connexe, l'image de  $g$  contient les directions comprises entre 0 et  $\pi/6$ , valeurs prises par l'argument de  $g$  en  $Q_1$  et  $Q_2$  respectivement. On peut opérer de même avec  $P'_1 = \phi_2(P_1)$ ,  $Q'_1 = \phi_2(Q_1)$ ,  $Q'_2 = \phi_2(Q_2)$  et  $\phi_2(\phi_2(K))$  pour obtenir des droites coupant  $K$  en au moins deux points dans toutes les directions comprises entre  $\pi/3$  et  $\pi/2$ . Pour couvrir l'intervalle  $[\pi/6, \pi/3]$ , il suffit de considérer  $P_1'' = \phi_2(1)$ ,  $Q_1'' = \phi_2 \circ \phi_3(0)$ ,  $Q_2'' = \phi_2 \circ \phi_3(1)$  et l'application qui à  $Q$  dans  $\phi_2 \circ \phi_3(K)$  associe  $\frac{Q_1'' \vec{Q}}{\|Q_1'' \vec{Q}\|}$ . Ensuite,  $K$  possédant un axe

de symétrie vertical, on complète avec les directions d'angles compris entre  $-\pi/2$  et  $0$ , ce qui établit la propriété souhaitée.

**Solution de l'équipe ramarov2 n'utilisant pas le théorème de Baire :**

On suppose par l'absurde qu'on dispose de telles suites  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Comme expliqué dans la référence apportée, la transformation  $\Omega$  d'un segment est la courbe obtenue en remplaçant son tiers du milieu par un triangle équilatéral dirigé vers l'extérieur.  $\Omega$  peut s'appliquer à une ligne brisée en l'appliquant simplement à chaque segment de la ligne. C'est cette transformation qui permet de construire la suite de lignes brisées  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge vers  $C$ . Autrement dit,  $C_0$  est un triangle équilatéral de côté 1 quelconque et  $C_{n+1} = \Omega(C_n)$ . On sait que  $C_n$  est composé de  $4^n$  segments longueurs  $3^{-n}$ .

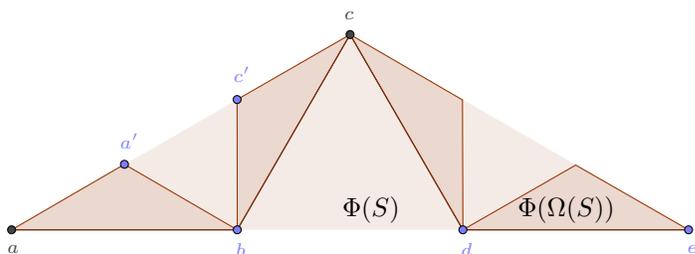
On définit une transformation  $\Phi$  qui transforme un segment en le triangle isocèle fermé (en tant que surface) dont les sommets sont les extrémités dudit segment et le sommet du triangle équilatéral rajouté par  $\Omega$  (celui qui n'est pas sur le segment d'origine).  $\Phi$  s'applique à une ligne brisée en donnant l'union des triangles obtenus en appliquant  $\Phi$  à chacun des segments de la ligne. On note  $F_n = \Phi(C_n)$ .

**Lemme.** Si  $S$  est un segment de taille  $r$  alors  $\Phi(S)$  est un triangle isocèle de base  $S$  et de hauteur  $r\sqrt{3}/6$ , donc de diamètre  $r$ .

$\Omega(S) \subset \Phi(S)$  et  $\Phi(\Omega(S)) \subset \Phi(S)$ .

De plus, les triangles composant  $\Phi(\Omega(S))$  ne peuvent s'intersecter qu'aux extrémités de leur base situés sur  $\Omega(S)$  et  $\Phi(\Omega(S))$  contient tous les sommets de  $\Phi(S)$ .

*Démonstration.* On note  $a, b, c, d, e$  les points consécutifs de  $\Omega(S)$ , avec  $S = [a, e]$ .  $\Phi(S)$  est la surface délimité par le triangle de sommets  $a, c, e$ . En appliquant  $\Omega$  aux segments  $[a, b]$  et  $[b, c]$ , on obtient respectivement des points  $a'$  et  $c'$ .



Si on prouve que les points  $a'$  et  $c'$  se trouvent sur le segment  $[a, c]$  alors les triangles  $aa'b$  et  $bc'c$  seront inclus dans le triangle  $ace$  par convexité. Les autres cas se traitent par symétrie axiale.

On peut supposer que  $a = (0, 0)$  et  $e = (6, 0)$ , et alors par simple application du théorème de Pythagore,  $c = (3, \sqrt{3})$  et  $b = (2, 0)$ . De plus,  $a' = (1, 1/\sqrt{3})$  et  $c' = (2, 2/\sqrt{3})$ . Donc,  $a', c' \in [a, c]$ .

On a donc prouvé que pour tout segment  $S$ ,  $\Phi(\Omega(S)) \subset \Phi(S)$ . De plus, par convexité,  $\Omega(S) \subset \Phi(S)$ . Le reste du lemme se déduit simplement en remarquant que l'intersection de  $aa'b$  avec  $bc'c$  est réduite à  $b$ , sans oublier que  $\{c\}$  est aussi l'intersection de  $bc'c$  et du triangle de base  $[c, d]$ .

□

**Lemme.**  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite décroissante de compacts connexes par arcs tels que  $C \subset F_n$ .

*Démonstration.* Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $C_n$  est composé d'un nombre fini de segments, donc  $F_n$  est une union finie de compacts, donc est compact.

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $(S_i)_{i \in I}$  la famille finie de segments qui décrit  $C_n$ .

$$C_{n+1} = \Omega(C_n) = \bigcup_{i \in I} \Omega(S_i) \subset \bigcup_{i \in I} \Phi(S_i) = \Phi(C_n) = F_n$$

$$F_{n+1} = \Phi(\Omega(C_n)) = \bigcup_{i \in I} \Phi(\Omega(S_i)) \subset \bigcup_{i \in I} \Phi(S_i) = \Phi(C_n) = F_n$$

Remarquons que l'égalité  $\Phi(\Omega(C_n)) = \bigcup_{i \in I} \Phi(\Omega(S_i))$  est vraie car les  $\Omega(S_i)$  induisent une partition des segments composant  $\Omega(C_n)$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Comme tout point de  $C$  est limite d'une suite de points  $x_k \in C_k$  d'après la référence, tout point de  $C$  est limite de points de  $F_n$  qui est compact, donc fermé. Donc  $C \subset F_n$ .

La connexité par arcs se montre par récurrence en remarquant que  $F_1$  est connexe par arcs.  $\square$

On commence par observer que les triangles composant  $F_k$  sont des triangles isocèles de base un segment composant  $C_k$ , donc de longueur  $3^{-k}$ , et de hauteur  $3^{-k} \sqrt{3}/6$ . Il existe donc une constante  $c > 0$ , indépendante de  $k$  tel que tout triangle de  $F_k$  contient une boule ouverte de diamètre  $c3^{-k}$ . De plus,  $F_k$  est composé de  $4^n$  triangles. On se donne également  $m \in \mathbb{N}^*$  tq  $c4^m \geq 4 \times 3^m$ .

**Théorème.** *Il existe une suite décroissante  $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de triangles et une suite strictement croissante  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'entiers telles que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\Delta_n$  est un des triangles composant  $F_{a_n}$  et telles que*

$$\Delta_n \cap \bigcup_{i=0}^{n-1} T_i(\Gamma_{f_i}) = \emptyset$$

*Démonstration.* On va construire cette suite par récurrence. On choisit  $a_0 = 0$  et pour  $\Delta_0$  n'importe quel des 3 triangles composant  $F_0$ . Supposant  $\Delta_n$  et  $a_n$  construits :

Par hypothèse de récurrence,  $\Delta_n = \Phi(S)$  pour un certain segment composant  $C_{a_n}$ . On peut supposer que  $S$  est de longueur 1. De ce fait,  $\Phi(\Omega^m(S)) \subset \Delta_n$ , et  $\Phi(\Omega^m(S))$  est composé de  $4^m$  triangles entrant tous dans la composition de  $F_{a_n+m}$ , de bases de longueur  $3^{-m}$ , qui contiennent chacun une boule de rayon  $B_i$ ,  $1 \leq i \leq 4^m$ , de diamètre  $c3^{-m}$ .

Si  $p$  est la projection orthogonale sur la droite  $T_n(\{(x, 0), x \in [0, 1]\})$ ,  $p(\Delta_n)$  est un intervalle de longueur  $\leq 1$  qui contient tous les  $p(B_i)$ . Comme  $p$  est orthogonale et que  $T_n$  est une isométrie,  $p(B_i)$  est un intervalle de longueur  $c3^{-m}$ . Donc au moins 4 des  $p(B_i)$  s'intersectent. En effet, sinon

$$4 \leq \frac{c4^m}{3^m} \leq \sum_{i=1}^{4^m} \int \mathbb{1}_{p(B_i)} d\lambda = \int \sum_{i=1}^{4^m} \mathbb{1}_{p(B_i)} d\lambda \leq 3 \int \mathbb{1}_{p(\Delta_n)} d\lambda \leq 3$$

Cela donne 4 triangles dont les intérieurs sont traversés par une même droite, parallèle à  $T_n(\{(0, x), x \in [0, 1]\})$ . Les triangles composant  $F_{a_n+m}$  ne peuvent s'intersecter qu'aux extrémités de leur base d'après le lemme 1. Donc il existe deux triangles de  $F_{a_n+m}$  inclus dans  $\Delta_n$ , dont les bases sont de longueur  $3^{-m}$  (car on a supposé que celle de  $S$  est de longueur 1) et dont les intérieurs sont traversés par une même droite  $D$  parallèle à  $T_n(\{(0, x), x \in [0, 1]\})$  et à distance  $\varepsilon > 0$  (car les deux triangles sont des compacts disjoints). On les note  $\Phi(U)$  et  $\Phi(V)$ , où  $U$  et  $V$  sont leurs bases respectives.

La fonction  $f_n$  est continue sur  $[0, 1]$  donc est uniformément continue. On dispose d'un  $\eta \leq \varepsilon/2$  tel que si  $|x - y| \leq \eta$  alors  $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon/2$ . On va utiliser l'uniforme continuité pour trouver un petit

triangle que  $f_n$  n'atteint pas.

Soit  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $3^{-m-k} \leq \eta/2$ . Les triangles composant  $\Phi(\Omega^k(U))$  et  $\Phi(\Omega^k(V))$  sont de diamètres inférieurs à  $\eta/2$ .  $\Phi(\Omega^k(U)) \subset \Phi(U)$  est connexe par arcs et contient les sommets de  $\Phi(U)$ .  $D$  traverse l'intérieur de  $\Phi(U)$ , et coupe le plan en deux demi-plans ouverts, donc on dispose d'un couple de sommets de  $\Phi(U)$  dans deux demi-plans distincts.  $\Phi(\Omega^k(U))$  est un connexe qui rencontre chacun des demi-plans ouverts, donc il rencontre leur frontière,  $D$ , d'après le théorème des passages des douanes. Il existe un triangle  $A_U$  entrant dans la composition de  $\Phi(\Omega^k(U)) \subset \Phi(U)$  et qui rencontre  $D$ . De même, on a un triangle  $A_V$  entrant dans la composition de  $\Phi(\Omega^k(U)) \subset \Phi(V)$  et qui rencontre  $D$ .

Supposons par l'absurde qu'il existe  $x, y \in [0, 1]$  tels que  $T_n((x, f_n(x))) \in A_U$  et  $T_n((y, f_n(y))) \in A_V$ .  $T_n$  est une isométrie et  $D$  est parallèle à  $T_n(\{(0, x), x \in [0, 1]\})$ , donc

$$|x - y| \leq d(T_n((x, f_n(x))), D) + d(T_n((y, f_n(y))), D) \leq \text{diam}A_U + \text{diam}A_V \leq \eta$$

Donc  $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon/2$ . Cependant, comme  $A_U$  et  $A_V$  sont à distance au moins  $\varepsilon$

$$|f_n(x) - f_n(y)| \geq d(T_n((x, f_n(x))), T_n((y, f_n(y)))) - |x - y| \geq \varepsilon - \eta \geq \varepsilon/2$$

Ce qui est une contradiction. On peut donc supposer  $A_U \cap T_n(\Gamma_{f_n}) = \emptyset$ . On pose alors  $\Delta_{n+1} = A_U$  et  $a_{n+1} = a_n + m + k > a_n$ .  $\Delta_{n+1}$  est un triangle composant  $\Phi(\Omega^k(U))$ , et comme  $U$  est un segment composant  $C_{a_n+m}$ ,  $\Delta_{n+1}$  est un des triangles composant  $\Phi(\Omega^k(C_{a_n+m})) = F_{a_n+m+k} = F_{a_{n+1}}$ . De plus,

$$\Delta_{n+1} \subset \Phi(\Omega^k(U)) \subset \Phi(U) \subset \Delta_n$$

Pour finir,

$$\Delta_{n+1} \cap \bigcup_{i=0}^{(n+1)-1} T_i(\Gamma_{f_i}) \subset (\Delta_{n+1} \cap T_n(\Gamma_{f_n})) \cup (\Delta_n \cap \bigcup_{i=0}^{n-1} T_i(\Gamma_{f_i})) = \emptyset$$

□

D'après la référence fournie dans l'énoncé,  $C$  est compact comme image continue de  $[0, 1]$  et contient tous les sommets de tous les  $C_n$ . Un des sommets du triangle  $\Delta_n$  est une extrémité d'un des segments composant  $C_{a_n}$ , et est donc un sommet de  $C_{a_n}$ . On en conclut que  $C \cap \Delta_n \neq \emptyset$ , et est compact comme intersection de compacts. De plus,  $(a_n)_{n \geq 0}$  est une suite à valeurs entières strictement croissante, donc diverge.

La suite  $(C \cap \Delta_n)_{n \geq 0}$  est une suite décroissante de compacts non vide dont la suite des diamètres est minorée par  $3^{-a_n}$ , et donc tend vers 0. Par complétude, le théorème des fermés emboîtés implique l'existence d'un point  $z \in \mathbb{R}^2$  tel que

$$\bigcap_{n \geq 0} C \cap \Delta_n = \{z\}$$

Donc  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $z \notin T_n(\Gamma_{f_n})$ , mais  $z \in C$ . Cela contredit bien l'hypothèse initiale  $C \subset \bigcup_{n \geq 0} T_n(\Gamma_{f_n})$ .

## Problème 2

Montrer que pour tout triplet  $(p, q, r)$  de nombres premiers deux à deux distincts, il existe une solution  $(x, y, z)$  en entiers strictement positifs à l'équation  $x^p + y^q = z^r$ .

**Solution de l'auteur :** Comme  $pq$  et  $r$  sont premiers entre eux, il existe  $s$  tel que  $pqs$  soit congru à  $-1$  modulo  $r$ . Soit  $t$  tel que  $pqs + 1 = tr$ . D'autre part soit  $a$  et  $b$  deux entiers positifs. On pose  $c = a^p + b^q$  et on prend

$$z = c^t, x = c^{qs}a, y = c^{ps}b.$$

En prenant  $a = b = 1$  on trouve simplement la solution  $(2^{qs})^p + (2^{qs})^q = 2^{pqs+1} = (2^t)^r$ .

N.B. : On conjecture (Beal, Tijdeman, Zagier) qu'il n'y a pas de solution en entiers  $x, y, z$  premiers entre eux quand les trois nombres premiers  $p, q$ , et  $r$  sont impairs.

**Solution de l'équipe Maly :** On commence par un lemme évident.

**Lemme.** Soient  $a$  et  $b$  deux entiers naturels premiers entre eux, il existe deux entiers naturels  $c$  et  $d$  tels que  $ac + 1 = db$

*Démonstration.* Par le théorème de Bézout, il existe  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$  tels que  $\alpha a + \beta b = 1$ , où l'on voit que  $\alpha$  et  $\beta$  sont de signes opposés. Si  $\alpha$  est négatif la preuve est terminée. Sinon, comme le couple  $(\alpha - kb, \beta + ka)$  est solution de l'équation pour tout entier  $k$ , il suffit de choisir  $k$  suffisamment grand pour obtenir la solution souhaitée. □

Soient donc  $c$  et  $d$  des entiers positifs tels que  $pqc + 1 = dr$

**Proposition.** Le triplet  $(2^{qc}, 2^{pc}, 2^d)$  est solution de (1).

*Démonstration.* La vérification est triviale :  $(2^{qc})^p + (2^{pc})^q = 2^{qcp} + 2^{pcq} = 2^{pqc+1} = 2^{dr} = (2^d)^r$  □

### Une généralisation

Nous proposons la généralisation suivante.

**Proposition.** Soient  $a_1, \dots, a_n, r$  des entiers positifs premiers entre eux, avec  $n > 1$ . Alors l'équation

$$x_1^{a_1} + \dots + x_n^{a_n} = z^r \tag{1}$$

possède une infinité de solutions dans  $\mathbb{N}^{n+1}$ .

Tout repose à nouveau sur l'existence d'entiers positifs  $c$  et  $d$  tels que  $ca_1 \dots a_n + 1 = dr$ .

*Démonstration.* Soit  $\alpha$  un entier strictement positif. On pose pour tout  $i$  entre 1 et  $n$  :

$$x_i = n^c \prod_{j \neq i} a_j \cdot \alpha^r \prod_{j \neq i} a_j$$

Le choix de  $z$  est ensuite imposé :  $z = n^d \cdot \alpha^{\prod_j a_j}$

Il est alors facile de vérifier que l'on a bien définie, pour tout  $\alpha$ , une solution de (2). □

**Remarque.** L'infinité des solutions peut s'obtenir, sans introduire un  $\alpha$ , en observant simplement qu'il y a une infinité de couples  $(c, d)$  qui sont solution de  $ca_1 \dots a_n + 1 = dr$ , avec  $c$  et  $d$  positifs.

### Problème 3

Soient  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  un espace de probabilité et  $T : X \rightarrow X$  une application mesurable préservant la mesure  $\mu$ , c'est-à-dire que  $\mu \circ T^{-1} = \mu$ . Le quadruplet  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  est dit système dynamique mesuré.

Un élément  $A$  de  $\mathcal{B}$  est dit invariant s'il vérifie  $T^{-1}(A) = A$ . La sous-tribu de  $\mathcal{B}$  constituée des ensembles invariants sera notée  $\mathcal{I}$ .

Le théorème ergodique de Birkhoff énonce que pour toute fonction  $f \in L^1(\mu)$ , pour  $\mu$ -presque tout  $x$ , on a

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(T^n x) = \mathbb{E}(f|\mathcal{I}).$$

De plus, si  $f \in L^p(\mu)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , la limite ci-dessus existe aussi au sens  $L^p$ .

Une suite de variables aléatoires  $(M_n)_{n \geq 1}$  définies sur  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  est une martingale si

$$\forall n \geq 1, \quad \mathbb{E}(M_{n+1}|M_1, \dots, M_n) = M_n.$$

Le théorème de Doob énonce que si la martingale  $(M_n)_{n \geq 1}$  est telle que  $\sup_{n \geq 1} \mathbb{E}|M_n| < \infty$ , alors  $M_n$  converge presque sûrement. De plus, si  $\sup_{n \geq 1} \mathbb{E}|M_n|^p < \infty$  avec  $1 < p < \infty$ , alors  $M_n$  converge aussi au sens  $L^p$ .

Dans la suite, on se donne  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , une suite décroissante d'éléments de  $[0, 1]$  telle que  $\sum p_n = \infty$ , et indépendamment de  $(X, \mathcal{B}, \mu)$ , une suite  $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de variables aléatoires indépendantes telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\xi_n$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $p_n$ , i.e.  $\mathbb{P}(\xi_n = 1) = p_n = 1 - \mathbb{P}(\xi_n = 0)$ .

On considère l'ensemble aléatoire

$$\chi = \{n \in \mathbb{N} : \xi_n = 1\}.$$

1. Étudier la convergence de  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{(p_1 + \dots + p_n)^c}$  pour  $c > 0$ .
2. Montrer que pour toute  $f \in L^2(\mu)$ , on a presque sûrement, pour  $\mu$ -presque tout  $x$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{|\chi \cap [1, N]|} \sum_{n \in \chi \cap [1, N]} f(T^n x) = \mathbb{E}(f|\mathcal{I}),$$

et que la limite existe aussi au sens de  $L^2(\mu)$ .

**Solution de l'auteur :** 1. Soit  $c > 0$  et  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ , continue et décroissante, telle que  $f(n) = p_n$  pour tout entier  $n \geq 1$ . Soit  $F$  une primitive strictement positive de  $f$ . La fonction  $f/F^c = F'/F^c$  est décroissante. Il vient alors par comparaison successive de  $\sum_{k=1}^n f(k)$  avec  $F(n)$  puis de  $\sum_{k=1}^n f(k)/F(k)^c$  avec n'importe quelle primitive de  $F'/F^c$  évaluée entre 1 et  $n$ , e.g.  $F^{1-c}/(1-c)$  si  $c \neq 1$  et  $\log(F)$  si  $c = 1$ , que  $\lim_{n \rightarrow \infty} F(n) = +\infty$  puis que la série  $\sum_{n=1}^{\infty} p_n/(p_1 + \dots + p_n)^c$  converge si et seulement si  $c > 1$ .

*Autre approche pour le cas  $c > 1$ .* Soit  $s_k = p_1 + \dots + p_k$ . Sans perte de généralité, nous supposons ici que  $p_1 > 1$  de sorte que  $s_k > 1$  pour tout  $k \geq 1$ .

*Cas  $c = 2$  :* La convergence est due à l'inégalité

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k}{s_k^2} \leq \frac{1}{p_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{p_k}{s_k s_{k-1}} = \frac{1}{p_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left( \frac{1}{s_{k-1}} - \frac{1}{s_k} \right) = \frac{2}{p_1}.$$

*Cas  $c = 1 + \frac{1}{m}$  :* Comme le terme général de la série est une fonction décroissante de  $c$ , il suffit de montrer la convergence de la série pour une suite de  $c > 1$  décroissante vers 1. Prenons  $c = 1 + \frac{1}{m}$

( $m = 1, 2, \dots$ ). Nous démontrons la convergence en utilisant une idée similaire à celle utilisé dans le cas  $c = 2$ . La formule

$$a^m - b^m = (a - b)(a^{m-1} + a^{m-2}b + \dots + ab^{m-2} + b^{m-1})$$

permet d'obtenir

$$p_k = s_k - s_{k-1} \leq m s_k^{1-1/m} (s_k^{1/m} - s_{k-1}^{1/m}).$$

On a alors

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{p_k}{s_k^{1+1/m}} \leq m \sum_{k=2}^{\infty} \frac{s_k^{1/m} - s_{k-1}^{1/m}}{s_k^{1/m} s_{k-1}^{1/m}} = m \sum_{k=2}^{\infty} \left( \frac{1}{s_{k-1}^{1/m}} - \frac{1}{s_k^{1/m}} \right) = \frac{m}{p_1}.$$

2. Fixons  $x \in X$  et considérons la martingale

$$X_n^x = \sum_{k=1}^n \frac{(\xi_k - p_k) f(T^k x)}{s_k},$$

qui est une somme de variables aléatoires indépendantes et centrées. Comme  $\mathbb{E}(\xi_n - p_n)^2 = p_n(1 - p_n)$ , on a

$$\mathbb{E}|X_n^x|^2 = \sum_{k=1}^n \frac{|f(T^k x)|^2 p_k(1 - p_k)}{s_k^2}$$

d'où

$$\int \sup_n \mathbb{E}|X_n^x|^2 d\mu(x) \leq \|f\|_2^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k(1 - p_k)}{s_k^2} < \infty.$$

La dernière inégalité est due à (1) et au fait que  $f \in L^2(\mu)$ , et l'avant dernière inégalité utilise la  $T$ -invariance de la mesure  $\mu$ . Par conséquent, pour  $\mu$ -presque tout  $x$ , la martingale  $X_n^x$  est  $L^2$ -bornée, et donc converge p.s. d'après le théorème de Doob. En d'autres termes, la série  $\sum_n \frac{(\xi_n - p_n) f(T^n x)}{s_n}$  converge  $\mu$ -p.p. p.s, et donc p.s.  $\mu$ -p.p. par le théorème de Fubini. Alors, comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$ , d'après le lemme de Kronecker, p.s.  $\mu$ -p.p.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n (\xi_k - p_k) f(T^k x)}{\sum_{k=1}^n p_k} = 0. \quad (2)$$

D'autre part, comme  $p_n \downarrow 0$  et  $\sum p_k = \infty$ , le théorème ergodique de Birkhoff implique que

$$\mu\text{-p.p.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n p_k f(T^k x)}{\sum_{k=1}^n p_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(T^k x) = \mathbb{E}(f|\mathcal{J}) \quad (3)$$

(la première égalité s'obtient à l'aide d'une transformation d'Abel, dans laquelle on injecte le fait que pour tout  $\epsilon > 0$  on a  $n(\mathbb{E}(f|\mathcal{J}) - \epsilon) \leq \sum_{k=1}^n f(T^k x) \leq n(\mathbb{E}(f|\mathcal{J}) + \epsilon)$  pour  $n$  assez grand, puis en prenant la transformé d'Abel dans le sens inverse).

Nous pouvons maintenant conclure pour la limite p.s.  $\mu$ -p.p. à partir de (2), de (3) et des égalités suivantes

$$\sum_{n \in \chi \cap [1, N]} f(T^n x) = \sum_{k=1}^N \xi_k f(T^k x); \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|\chi \cap [1, N]|}{\sum_{k=1}^N p_k} = 1. \quad (4)$$

La dernière égalité correspond au cas particulier de (2) où  $f$  est identiquement égale à 1.

La  $L^2$ -convergence se démontre de même, car (2) et (3) restent vraies pour la  $L^2$ -convergence.

**Remarque.** Le problème suivant reste ouvert : trouver une condition nécessaire et suffisante sur  $(p_n)$  pour que la propriété suivante ait lieu : il existe un évènement  $\Omega_0$  de probabilité 1 telle que pour tout  $\omega \in \Omega_0$ , pour tout système dynamique  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  et pour toute  $f \in L^2(\mu)$ , la limite envisagée au problème 2 existe  $\mu$ -p.p. (resp. au sens de  $L^2$ ).

**Solution de l'équipe ALE :**

**Question 1**

On va traiter les cas  $c > 1$  et  $c \leq 1$ , on note  $S_n = p_1 + \dots + p_n$ .

—  $c > 1$  : On va faire une comparaison série-intégrale. La fonction  $t \mapsto \frac{1}{t}$  est décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ , on

a donc  $\frac{p_n}{S_n^c} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^c} = \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{S_n^c} \leq \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{t^c}$  puis :

$$\sum_{n=1}^N \frac{p_n}{S_n^c} \leq \frac{p_1}{S_1^c} + \int_{S_1}^{S_N} \frac{dt}{t^c} \leq p_1^{1-c} + \int_{S_1}^{\infty} \frac{dt}{t^c} < \infty.$$

La série converge donc.

—  $c \leq 1$  : Comme  $S_n$  tend vers l'infini,  $\frac{p_n}{S_n^c} \geq \frac{p_n}{S_n} \geq 0$  à partir d'un certain rang. On en déduit que si la série diverge pour  $c = 1$ , elle divergera pour tous les  $c \leq 1$ .

On va montrer que la suite des sommes partielles n'est pas de Cauchy :

$$\sum_n^{n+p} \frac{p_n}{S_n} = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{S_k - S_{k-1}}{S_k} \geq \frac{1}{S_{n+p}} \sum_{k=n+1}^{n+p} S_k - S_{k-1} = 1 - \frac{S_n}{S_{n+p}}$$

Or pour tout n on peut prendre p grand pour que  $S_n \leq \frac{S_{n+p}}{2}$  donc

$$\sup_p |S_{n+p} - S_n| \geq \frac{1}{2}$$

La série  $\sum \frac{p_n}{(p_1 + \dots + p_n)^c}$  converge si et seulement si  $c > 1$ .

**Question 2**

On va commencer par ôter l'aspect dynamique au système, et regarder d'abord une version non dynamique et déterministe, puis une version non dynamique mais probabiliste, pour en déduire le résultat.

On commence par un résultat technique qui sera très utile.

**Lemme.** Soient  $(p_n)_{n \geq 1}$  une suite strictement positive décroissante vers 0 et  $(u_n)_{n \geq 1}$  une suite convergant au sens de Césaro vers un réel  $l \in \mathbb{R}$ . Alors

— Si  $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \infty$ , alors

$$\frac{\sum_{k=1}^n p_k u_k}{\sum_{k=1}^n p_k} \rightarrow l.$$

— Si  $\sum_{k=1}^{\infty} p_k < \infty$ , alors la série  $\sum_{k \geq 1} p_k u_k$  est convergente.

*Démonstration.* Clairement, on peut supposer  $l = 0$ . Posons, pour  $n \geq 1$ ,

$$C_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k, S_n = \sum_{k=1}^n u_k, S_0 = 0,$$

On observe que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N p_k u_k &= \sum_{k=1}^N p_k (S_k - S_{k-1}) = \sum_{k=1}^N p_k S_k - \sum_{k=1}^{N-1} p_{k+1} S_k \\ &= p_N S_N + \sum_{k=1}^{N-1} k(p_k - p_{k+1}) C_k \\ &= p_N S_N + Z_n \end{aligned}$$

On suppose que la somme des  $p_n$  est infinie. Comme  $C$  tend vers 0 et comme  $Np_N \leq \sum_{k=1}^n p_k$ ,  $p_N S_N$  est négligeable devant  $\sum_{k=1}^N p_k$ . Observons maintenant que la suite  $k(p_k - p_{k+1})$  est positive et que pour tout  $q \geq 1$ ,

$$\sup_N \sum_{k=1}^N k(p_k - p_{k+1}) = \sup_N \sum_{k=1}^N p_k - p_{N+1} \geq \sup_N \sum_{k=1}^q p_k - qp_{N+1} = \sum_{k=1}^q p_k.$$

Ainsi la série des  $k(p_k - p_{k+1})$  est également divergente donc  $Z_n$  est négligeable devant la somme partielle de la série, qui est elle-même dominée par la somme partielle des  $p_k$ .

Ainsi,

$$\sum_{k=1}^N p_k u_k = o\left(\sum_{k=1}^N p_k\right).$$

On suppose que la somme des  $p_n$  est finie. Alors on sait que  $k(p_k - p_{k+1})$  est positive sommable comme ci-dessus, donc puisque  $C_k = o(1)$ , la famille des  $k(p_k - p_{k+1})C_k$  est sommable. D'autre part, on sait que  $Np_{2N} \leq \sum_{k=N+1}^{2N} p_k = o(1)$ , donc par décroissance de  $p$  et puisque  $C_n = O(1)$ ,  $Np_N C_N = o(1)$ , ce qui conclut.  $\square$

**Lemme.** Soit  $u$  une suite telle que  $u$  et  $u^2$  convergent au sens de Cesaro. Soit  $v_n = (p_1 + \dots + p_n)^{-2/3}$ . Alors presque sûrement

$$\sum_{k=1}^N (\xi_k - p_k)u_k = o\left(\frac{1}{v_n}\right).$$

*Démonstration.* Posons, pour  $n \geq 1$ ,  $T_n = (\xi_n - p_n)u_n v_n$ . Les  $T_n$  sont indépendants centrés et  $\mathbb{E}[T_n^2] = p_n(1 - p_n)v_n^2 u_n^2 \leq p_n v_n^2 u_n^2$ . Comme la suite  $p v^2$  est décroissante et que la somme de la série de terme général  $p_n v_n^2$  est finie, et que  $u^2$  converge au sens de Césaro, on a que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[T_k^2] < \infty.$$

En particulier,  $S_n = \sum_{k=1}^n T_k$  est une martingale qui converge presque sûrement et dans  $L^2$  vers une variable aléatoire  $L^2 S_\infty$ . On a alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{T_k}{v_k} &= \sum_{k=1}^n \frac{S_k - S_{k-1}}{v_k} = \sum_{k=1}^n \frac{S_k}{v_k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{S_k}{v_{k+1}} \\ &= \frac{S_n}{v_n} + \sum_{k=1}^n (-S_k) \left( \frac{1}{v_{k+1}} - \frac{1}{v_k} \right) \end{aligned}$$

La suite des  $v_{k+1}^{-1} - v_k^{-1}$  est positive, décroissante (inégalité des pentes car  $x \mapsto x^{2/3}$  est concave), et la somme des termes de 1 à  $n$  est équivalente à  $v_n^{-1}$  donc diverge vers l'infini. Comme  $S_k \rightarrow S_\infty$  presque sûrement, on a donc presque sûrement

$$\sum_{k=1}^n (-S_k) \left( \frac{1}{v_{k+1}} - \frac{1}{v_k} \right) = \frac{-S_\infty + o(1)}{v_n} = \frac{-S_n + o(1)}{v_n},$$

ce qui conclut.  $\square$

En particulier avec  $u = 1$ , on voit que  $\sum_{k=1}^n \xi_k$  est presque sûrement équivalente à  $p_1 + \dots + p_n$ , et donc  $v_n^{-1}$  est négligeable devant cette somme.

Il s'ensuit que :

**Proposition.** Soit  $u$  une suite convergeant au sens de Césaro vers  $l \in \mathbb{R}$  telle que  $u^2$  converge également au sens de Césaro. Alors presque sûrement :

$$\frac{\sum_{k=1}^N (\xi_k u_k)}{\sum_{k=1}^N \xi_k} \rightarrow l.$$

*Démonstration.* Il suffit de le montrer, par ce qui précède, lorsque le dénominateur est  $\sum_{k=1}^n p_k$ . Or, par le résultat précédent et le lemme technique, on a

$$\sum_{k=1}^n \xi_k u_k = o(v_n^{-1}) + \sum_{k=1}^n p_k u_k = (l + o(1)) \sum_{k=1}^n p_k.$$

□

Soit maintenant  $f \in L^2(\mu)$ . Soit  $Y$  l'ensemble des  $x$  tels que pour  $g \in \{f, f^2\}$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g(T^k(x)) \rightarrow \mathbb{E}[g|\mathcal{I}](x).$$

Par la proposition, on a presque sûrement

$$\frac{1}{|\chi \cap [1; n]|} \sum_{k=1}^n \xi_k f(T^k(x)) \rightarrow \mathbb{E}[f|\mathcal{I}].$$

Or, l'ensemble  $C$  des  $(x, \xi) \in X \times \{0; 1\}^{\mathbb{N}}$  tels que  $x \in Y$  et la propriété ci-dessus est vérifiée est mesurable pour la tribu produit naturelle. On a vu de plus que pour  $\mu$ -presque tout  $x$ ,  $\{\xi \in \{0; 1\}^{\mathbb{N}}, (x, \xi) \in C\}$  est de mesure pleine. Par conséquent,  $C$  est de mesure (produit !) pleine, et on a donc

$$1 = \int_{\{0; 1\}^{\mathbb{N}}} \mu(C_\xi) dP(\xi)$$

où  $C_\xi = \{x \in Y, (x, \xi) \in C\}$ . Comme  $\mu$  est de masse totale 1, on a donc presque sûrement  $\mu(C_\xi) = 1$ , ie

**On a presque sûrement  $\mu$ -presque partout :**

$$\frac{1}{|\chi \cap [1; n]|} \sum_{k=1}^n \xi_k (f \circ T^k) \rightarrow \mathbb{E}[f|\mathcal{I}].$$

Supposons maintenant  $f \in L^\infty$ . Alors chacun des termes de la suite (de fonctions  $L^2$ ) est majoré par  $\|f\|_{L^\infty}$ , et donc on peut appliquer le théorème de convergence dominée, de sorte que presque sûrement dans  $L^2$  :

$$\frac{1}{|\chi \cap [1; n]|} \sum_{k=1}^n \xi_k (f \circ T^k) \rightarrow \mathbb{E}[f|\mathcal{I}].$$

Enfin, si  $f \in L^2$ ,  $\epsilon > 0$ , il existe  $g \in L^\infty$  avec  $\|g - f\|_{L^2} \leq \epsilon$ . Alors presque sûrement

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{|\chi \cap [1; n]|} \sum_{k=1}^n \xi_k (f \circ T^k) - \mathbb{E}[f|\mathcal{I}] \right\|_{L^2} &\leq \left\| \frac{1}{|\chi \cap [1; n]|} \sum_{k=1}^n \xi_k (f - g) \circ T^k \right\|_{L^2} + \|\mathbb{E}[f - g|\mathcal{I}]\|_{L^2} \\ &+ \left\| \frac{1}{|\chi \cap [1; n]|} \sum_{k=1}^n \xi_k (g \circ T^k) - \mathbb{E}[g|\mathcal{I}] \right\|_{L^2} \\ &\leq 2\epsilon + o(1) \end{aligned}$$

On a donc presque sûrement pour tout  $p$

$$\left\| \frac{1}{|\mathcal{X} \cap [1; n]|} \sum_{k=1}^n \xi_k(f \circ T^k) - \mathbb{E}[f | \mathcal{A}] \right\|_{L^2} \leq 2^{-p} + o(1),$$

et donc presque sûrement

$$\left\| \frac{1}{|\mathcal{X} \cap [1; n]|} \sum_{k=1}^n \xi_k(f \circ T^k) - \mathbb{E}[f | \mathcal{A}] \right\|_{L^2} \rightarrow 0.$$

## Problème 4

Pedro et Dilma jouent au jeu suivant dans la boule unité fermée (euclidienne)  $B$  de  $\mathbb{R}^2$ . Pedro commence en choisissant un point  $P_1$  de  $B$ , auquel Dilma répond en choisissant une droite  $D_1$  passant par  $P_1$ . Pedro joue ensuite un point  $P_2$  de  $B$  situé sur  $D_1$ , auquel Dilma répond par une droite  $D_2$  passant par  $P_2$ . Les deux joueurs jouent ainsi une infinité de tours, de manière à produire deux suites  $(P_n)_{n \geq 1}$  et  $(D_n)_{n \geq 1}$  de points de  $B$  et de droites. Dilma est déclarée gagnante si la suite  $(P_n)_{n \geq 1}$  converge. Dans le cas contraire, Pedro est déclaré gagnant.

L'un des deux joueurs possède-t-il une stratégie gagnante ? Si oui, lequel ?

**Solution de l'auteur :** La solution qui suit est tirée de l'article suivant :

J. Malý et M. Zelený, A note on Buczolic's solution of the Weil gradient problem : A construction based on an infinite game, *Acta. Math. Hungar.*, 113(1-2), 2006, 145-158.

On n'attendait pas nécessairement des participants qu'ils puissent élaborer une preuve aussi sophistiquée, et de fait, aucune équipe n'est parvenue à résoudre le problème. En revanche, plusieurs équipes sont parvenues à établir quelques résultats partiels, et ont été récompensées pour cela.

Un exemple de tel résultat est obtenu en étudiant ce qui se passe lorsque Dilma joue systématiquement la droite passant par  $P_n$  et perpendiculaire à la droite  $(0_{\mathbb{R}^2} P)$ . On pourrait s'attendre à ce que cette stratégie soit gagnante pour Dilma car elle semble lui permettre de contraindre Pedro à converger sur le cercle unité. Cependant, on peut alors montrer que Pedro peut s'échapper en tournant indéfiniment.

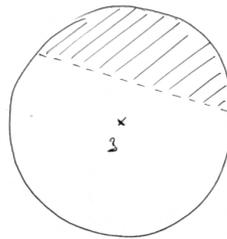
Malgré ce résultat assez contre-intuitif, il est toutefois possible de montrer que Dilma possède bien une stratégie gagnante. Cela signifie que quels que soient les mouvements de Pedro, elle parvient à faire converger la suite  $(P_n)_{n \geq 1}$ .

On définit, dans le plan euclidien, les notions suivantes :

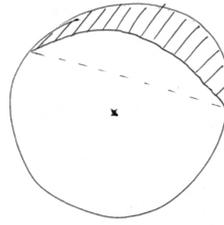
1.  $B(x, r)$  (resp.  $\bar{B}(x, r)$ ) la boule ouverte (resp. fermée) centrée en  $x$  et de rayon  $r$ .
2. Pour  $z \in \mathbb{R}^2$ ,  $r > 0$ ,  $w \in B(0_{\mathbb{R}^2}, r) \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}\}$

$$E(z, r, w) = \{x \in \bar{B}(z, r) : (w - z) \cdot w > \|w\|^2\}$$

Une partie de cette forme sera appelée *gommette* par la suite. Elle est obtenue en considérant la boule fermée  $\bar{B}(z, r)$ , en prenant une droite qui l'intersecte et ne passant pas par  $z$ . Dans la boule, la droite détermine deux composantes connexes.  $E(z, r, w)$  est le complémentaire de l'adhérence de la composante connexe de  $z$ .



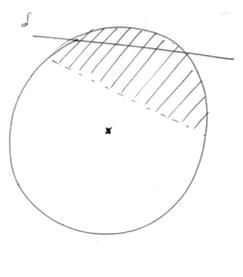
3. La frontière de la gommette se décompose naturellement en un *bord droit* (la corde, formellement  $L(z, r, w) = \{x \in \bar{B}(z, r) : (w - z) \cdot w = \|w\|^2\}$ ) et un *bord courbe* (l'autre partie de la frontière).
4. Si  $E(z, r, w) \subset E(z', r', w')$  sont deux gommettes partageant le même bord droit, la différence  $E(z', r', w') \setminus E(z, r, w)$  est une *banane*.



5. Une gomme est *inscrite* dans une banane lorsque son bord courbe est inclus dans le bord externe de la banane, et que son bord droit est tangent au bord interne de la banane.

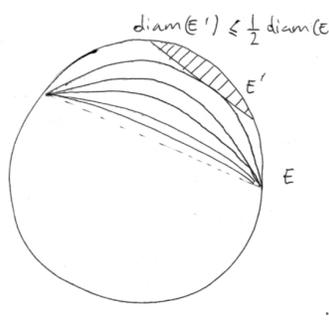


6. Une droite  $d$  est *admissible* relativement à une gomme lorsque'elle l'intersecte sans intersecter son bord droit.



Le résultat crucial sur lequel s'appuie la démonstration est le lemme suivant (dont la preuve, qui n'est pas présentée ici, est un peu fastidieuse mais pas difficile) :

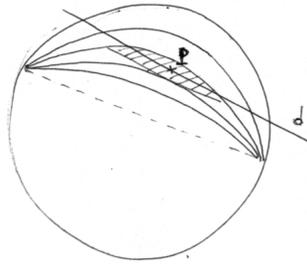
**Lemme.** Soit  $E$  une gomme. Alors elle peut être partitionnée en une infinité dénombrable de bananes  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  suivant le schéma suivant :



de manière à ce que toute gomme inscrite dans une banane de la partition soit de diamètre au plus  $\frac{1}{2} \text{diam}(E)$ .

*NB : Cette partition est infinie "du côté du bord droit" mais finie "du côté du bord courbe".*

La démonstration s'effectue alors comme suit : Considérons une partie jouée par Dilma et Pedro. Pedro souhaite diverger, donc il va, à une étape de jeu, jouer un point  $P$  différent de  $0_{\mathbb{R}^2}$ . Dilma répond alors de la manière suivante : Elle considère une gomme  $E$  dont le bord droit sépare  $P$  et  $0_{\mathbb{R}^2}$ . Elle partitionne ensuite cette gomme comme le prescrit le lemme. Le point  $P$  appartient alors à une certaine banane de la partition, à l'intérieur de laquelle on inscrit une gomme  $E'$  contenant  $P$  et telle que  $\text{diam}(E') \leq \frac{1}{2} \text{diam}(E)$ . Dilma joue enfin une droite  $d$  passant par  $P$  et admissible pour  $E'$ .



Deux options se présentent alors à Pedro : Soit il joue tous ses coups suivants dans  $E'$ , soit il en sort. Dans le premier cas, Dilma reproduit la stratégie précédente dans  $E'$ , et elle finit par gagner car les points de Pedro sont contenus dans une suite décroissante de compacts dont le diamètre tend vers 0. Dans le second cas, Pedro sort de  $E'$ , mais relativement à la partition en bananes effectuée par Dilma, cela le rapproche du bord, et il va donc rester à l'intérieur d'une des bananes extérieures (qui sont en nombre fini) pour jouer tous ses coups. Dilma applique alors, à nouveau, la stratégie précédente.  $\square$

**Ce problème n'a été résolu par aucune équipe (cf. le commentaire en début de solution).**

## Problème 5

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité. Une marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}$  est une suite aléatoire  $S = (S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $S_0 = 0$  et

$$S_n = X_1 + \dots + X_n$$

avec  $(X_i)_{i \geq 1}$  une suite de variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{Z}$  indépendantes et de même loi, définies sur  $\Omega$ . On dira que la marche est **symétrique** si

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(X_1 = n) = \mathbb{P}(X_1 = -n).$$

On peut montrer et on admet ici qu'une marche aléatoire ne peut avoir que deux comportements possibles :

- ou bien, presque sûrement, la marche aléatoire passe une infinité de fois par 0, et on dit que la marche est **récurrente**.
- ou bien, presque sûrement, la marche aléatoire ne passe qu'un nombre fini de fois par chacun des sites de  $\mathbb{Z}$  et on dit que la marche est **transitoire**.

On se demande dans ce problème si la marche obtenue en sommant deux marches aléatoires indépendantes transitoires peut être récurrente, et si la marche obtenue en sommant deux marches aléatoires indépendantes récurrentes peut être transitoire.

Pour déterminer, suivant la loi de  $X_1$ , le comportement de la marche aléatoire, on dispose d'un critère analytique dû à Chung et Fuchs, que nous admettons :

$$\text{la marche aléatoire } S \text{ est transitoire} \iff \Re \left( \int_0^1 \frac{dy}{1 - \mathbb{E}[e^{iyX_1}]} \right) < +\infty.$$

Dans le cas d'une marche aléatoire symétrique, ce critère se reformule de la façon suivante :

$$\text{la marche aléatoire } S \text{ est transitoire} \iff \int_0^1 \left( \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X_1 = n)(1 - \cos(yn)) \right)^{-1} dy < +\infty.$$

1. On suppose que  $X_1$  est intégrable.  
Montrer que la marche aléatoire  $S$  est récurrente si et seulement si  $\mathbb{E}[X_1] = 0$ .
2. Dans cette question, on suppose qu'il existe  $\alpha > 0$  et  $c > 0$  tels que, quand  $n \rightarrow +\infty$ ,

$$\mathbb{P}[X_1 = n] = \mathbb{P}[X_1 = -n] \sim \frac{c}{n^{1+\alpha}}.$$

Pour quelle(s) valeur(s) de  $\alpha$  la marche aléatoire  $S$  est-elle récurrente ?

3. Peut-on construire deux marches aléatoires  $S$  et  $S'$  sur  $\mathbb{Z}$ , transitoires, indépendantes mais de lois différentes, telles que  $S + S'$  soit récurrente ?  
Est-ce possible si  $S$  et  $S'$  sont des marches aléatoires symétriques ?
4. Peut-on construire deux marches aléatoires  $S$  et  $S'$  sur  $\mathbb{Z}$ , symétriques, récurrentes, indépendantes mais de lois différentes, telles que  $S + S'$  soit transitoire ?

**Solution de l'auteur :** Une marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}$  est une suite aléatoire  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $S_0 = 0$  et

$$S_n = X_1 + \dots + X_n$$

avec  $(X_i)_{i \geq 0}$  une suite de variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{Z}$  indépendantes et de même loi. On dira que la marche est symétrique si pour tout  $n$  entier,  $\mathbb{P}(X_1 = n) = \mathbb{P}(X_1 = -n)$ .

Pour étudier le comportement de  $S$  on peut s'intéresser au nombre de passages de  $S$  en un site  $k \in \mathbb{N}$  :  $N_k^S = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{S_n=k}$ . On sait que (selon la loi de  $X_1$ ) il y a deux possibilités pour le comportement de  $S$  :

1. Ou bien, presque sûrement, pour tout  $k$  dans  $\mathbb{Z}$ ,  $N_k^S = +\infty$ . On dit alors que la marche est récurrente. C'est par exemple le cas de la marche aléatoire simple.
2. Ou bien, presque sûrement, pour tout  $x$  dans  $\mathbb{Z}$ ,  $N_k^S < \infty$  (et même on a alors  $\mathbb{E}[N_k^S] < +\infty$ ). On dit alors que la marche est transitoire (on a alors  $\liminf |S_n| = +\infty$  p.s.).

Un critère classique pour déterminer si une marche est récurrente ou transitoire est dû à Chung et Fuchs :

$$\Re \left( \int_0^1 \frac{dy}{1 - \mathbb{E}[e^{iyX_1}]} < \infty \right) \Leftrightarrow (S \text{ est transitoire})$$

Dans le cas d'une marche symétrique, on peut le reformuler ainsi :

$$\left( \int_0^1 \frac{dy}{\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X_1 = n)(1 - \cos(ynt))} < \infty \right) \Leftrightarrow (S \text{ est transitoire})$$

1. Montrer que si  $X_1$  est intégrable. La marche  $S$  est récurrente si et seulement si  $\mathbb{E}[X_1] = 0$ .
2. Dans cette question on suppose qu'il existe  $\alpha, c > 0$  tels que  $\mathbb{P}(X_1 = n) = \mathbb{P}(X_1 = -n) \sim \frac{c}{n^{1+\alpha}}$  avec  $c_\alpha$  une constante. Trouver les valeurs de  $\alpha$  pour lesquels la marche est récurrente.
3. Peut-on construire  $S$  et  $S'$  deux marches aléatoires transitoires sur  $\mathbb{Z}$  indépendantes mais de lois différentes telles que  $S + S'$  soit récurrente? Est-ce possible si  $S$  et  $S'$  sont symétriques?
4. Peut-on construire  $S$  et  $S'$  deux marches aléatoires symétriques récurrentes sur  $\mathbb{Z}$  indépendantes mais de lois différentes telles que  $S + S'$  soit transitoire?

#### Solution :

1. Si  $\mathbb{E}[X_1] = 0$ , on utilise le critère de Chung-Fuchs. Par dérivation sous le signe  $\mathbb{E}$ , on sait que  $\mathbb{E}[e^{iyX_1}]$  est dérivable et sa dérivée en 0 est  $\mathbb{E}[X_1] = 0$  donc  $1 - \mathbb{E}[e^{iyX_1}] =_{y \sim 0} o(y)$  donc la partie réelle de son inverse n'est pas intégrable. La marche est récurrente.  
Si  $\mathbb{E}[X_1] \neq 0$ , la loi forte des grands nombres nous assure que presque sûrement  $S_n \sim_n \mathbb{E}[X_1]n$  et donc  $S_n$  tend vers l'infini, la marche est transitoire.
2. Si  $f \asymp g$  désigne le fait qu'au voisinage de 0, il existe 2 constantes  $c, C > 0$  tels que  $cg(t) \leq f(t) \leq Cg(t)$  alors

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X_1 = n)(1 - \cos(ynt)) \asymp \sum_{1 \leq n \leq [1/t]} \frac{yn^2t^2}{n^{1+\alpha}} + O\left(\sum_{n > [1/t]} \frac{2}{n^{1+\alpha}}\right) \asymp t^\alpha$$

dont l'inverse est intégrable ssi  $\alpha < 1$  ce qui prouve que la marche est récurrente ssi  $\alpha \geq 1$ .

3.  $S_n = n$  et  $S'_n = -n$  sont deux marches aléatoires indépendantes transitoires dont la somme est la marche récurrente  $S_n = 0$ .

Dans le cas symétrique, montrons que c'est impossible. Pour une marche symétrique,  $\mathbb{E}[e^{itX_1}]$  est automatiquement un nombre réel dans  $[-1; 1]$  qui est positif pour  $t$  assez petit par convergence dominée ( $\mathbb{E}[e^{itX_1}] \rightarrow \mathbb{E}[e^{i0X_1}] = 1$ ). Pour des nombres entre 0 et 1 on a toujours  $1 - ab \geq \frac{1-a+1-b}{2}$  donc pour  $t$  assez petit,

$$1 - \mathbb{E}[e^{it(X_1+X'_1)}] = 1 - \mathbb{E}[e^{itX_1}]\mathbb{E}[e^{itX'_1}] \geq (1/2)(1 - \mathbb{E}[e^{itX_1}]).$$

Si la première marche est transitoire, ce dernier terme est d'inverse intégrable et donc c'est aussi le cas pour le premier terme. Ainsi, si elles sont symétriques, dès que l'une des deux marches est transitoire, la somme des 2 l'est aussi.

4. Nous allons construire deux marches  $S$  de pas  $(X_i)_{i \geq 1}$  et  $S'$  de pas  $(X'_i)_{i \geq 1}$  indépendantes symétriques. Telle que pour deux constante  $c$  et  $c'$ ,

$$c\mathbb{P}(X_i = n) + c'\mathbb{P}(X'_i = n) = \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Cela garantit déjà que  $S + S'$  est transitoire, en effet :

$$1 - \mathbb{E}[e^{it(X_1+X'_1)}] \geq (1/2)(1 - \mathbb{E}[e^{itX_1}] + 1 - \mathbb{E}[e^{itX'_1}]) \asymp \sum_{n \geq 1} n^{-3/2}(1 - \cos(ynt)) \asymp t^{3/2}$$

qui est intégrable (on a réutilisé le raisonnement de la question 2)

Il faut maintenant choisir correctement la loi de  $X_1$  et celle de  $X'_1$ . On va définir par récurrence une suite d'entiers  $1 = A_0 < A_1 < A_2 < \dots$ . On pose ensuite  $I$  la sous partie de  $\mathbb{N}$  qui est la réunion des intervalles  $\{A_{2i}; A_{2i} + 1; \dots A_{2i+1} - 1\}$  et on pose

$$\mathbb{P}(X_i = -n) = \mathbb{P}(X_i = n) = \frac{c}{n^{3/2}} 1_{n \in I}$$

$$\mathbb{P}(X'_i = -n) = \mathbb{P}(X'_i = n) = \frac{c'}{n^{3/2}} 1_{n \notin I}$$

où  $c$  et  $c'$  sont des constantes de normalisations. Ces lois vérifient la bonne condition pour que la somme des deux soit transitoire.

Montrons qu'un bon choix des  $A_i$  fait que ces marches sont récurrentes :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left( \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X_1 = n)(1 - \cos(ynt)) \right)^{-1} dy \\ & \geq \int_0^1 \left( \sum_{1 \leq n \leq A_{2i-1}} \mathbb{P}(X_1 = n) \frac{y^2 n^2 t^2}{2} + \sum_{n > A_{2i}} \mathbb{P}(X_1 = n) 2 \right)^{-1} dy \\ & \geq \int_0^1 \left( c \sum_{1 \leq n \leq A_{2i-1}} \frac{y n^2 t^2}{n^{3/2}} + c \sum_{n > A_{2i}} \frac{2}{n^{3/2}} \right)^{-1} dy \end{aligned}$$

mais dans cette dernière expression si on fixe  $A_{2i-1}$  lorsqu'on fait partir  $A_{2i}$  vers l'infini l'intégrale tend par convergence monotone vers l'infini. Donc on peut fixer la valeur de  $A_{2i}$  (en fonction de celle de  $A_{2i-1}$ ) pour que cette intégrale soit plus grande que  $i$ . Si on fait ça pour tout  $i$  l'intégrale sera plus grande que  $i$  pour tout  $i$  et donc sera infinie. Il faut suivre la même démarche simultanément pour s'assurer que  $X'_1$  sera récurrente cela fixera les  $A_{2i+1}$  en fonction des  $A_{2i}$ .

Intuitivement : la marche des pas de taille  $< A_{2i-1}$  est récurrente (car à support fini) donc quitte à augmenter  $A_{2i}$  on diminue la proba qu'un saut plus grand ait lieu mais on peut diminuer la proba tellement qu'il sera très improbable qu'il y ait un de ces grands sauts avant que la marche  $A_{2i}$  n'ait fait de multiples passages en 0. Chaque échelle de saut a le temps de "récurrer" avant que l'échelle suivante bouge.

**Ce problème n'a été résolu complètement par aucune équipe ; aucune n'a répondu de façon satisfaisante à la question 4.**

## Problème 6

On considère une goutte d'encre sphérique (ou circulaire en dimension 2) immergée dans un fluide. Le fluide est en mouvement, avec un champ de vitesse connu, constant dans le temps, et régulier par rapport à la variable d'espace. On suppose aussi que le fluide est contenu dans une structure bornée et que la vitesse du fluide le long de cette structure est nulle.

La goutte d'encre est transportée et déformée par le champ de vitesse (les effets de diffusion et gravité sont supposés négligeables). Le problème est de décrire des caractéristiques qualitatives et quantitatives de la goutte au fur et à mesure de son évolution. Spécifiquement, on considère les exercices/questions suivantes :

1. Montrer que la goutte ne touche jamais la structure.
2. La connexité de la goutte est-elle préservée au cours de son évolution ? Et sa simple connexité ?
3. Comment le volume de la goutte varie-t-il au cours du temps ?
4. Trouver un exemple de champ de vitesse réaliste (en un sens à justifier) pour lequel la goutte perd, à partir d'un certain temps, son caractère convexe.
5. Montrer que, en dimension 2 et pour des temps petits, la goutte reste convexe. Caractériser, en fonction du champ de vitesse ou de quantités déduites du champ de vitesse, le temps maximal pendant lequel la goutte reste convexe.
6. Le champ de vitesses préserve en tout temps certaines propriétés de la goutte, comme sa compacité, la régularité de son bord, etc. Trouver un (ou plusieurs) champ de vitesses qui, *asymptotiquement* en temps long, font tendre la goutte vers une forme géométrique pour laquelle une ou plusieurs de ces propriétés ne sont plus respectées. On ne demande pas ici de trouver un champ de vitesses 'réaliste'.

**Solution de l'auteur :** Toute la modélisation repose sur le flot associé au champ de vitesse  $\vec{u}$  du fluide, c'est à dire la fonction  $t \mapsto F_t(\vec{x})$ , pour  $\vec{x}$  dans la région couverte par le fluide, solution de l'EDO

$$\frac{dF_t}{dt}(\vec{x}) = u(F_t(\vec{x})) \quad \text{et} \quad F_0(\vec{x}) = \vec{x}.$$

Ce flot décrit le transport d'un matériau par le fluide. Précisément,  $F_t(\vec{x})$  est la position au temps  $t$  d'un point matériel situé en  $\vec{x}$  au temps initial. Si  $B$  est le domaine initial de la goutte d'encre,  $F_t(B)$  est le domaine qu'elle occupe au temps  $t$  et les questions tournent donc autour de la description des propriétés de  $F_t(B)$ .

### 1. La goutte ne touche pas la structure

Si  $\Omega$  est le domaine dans lequel le fluide évolue,  $\partial\Omega$  est la structure qui le contient. L'hypothèse dit que  $u = 0$  sur  $\partial\Omega$ . Cela implique, par unicité de la solution de l'EDO,

$$\forall \vec{y} \in \partial\Omega, \forall t \in \mathbb{R}, \quad F_t(\vec{y}) = \vec{y} \quad (5)$$

(i.e.  $\vec{y}$  est un point stationnaire du champ de vitesse :  $\vec{u}(\vec{y}) = 0$ ). Ainsi, si  $\vec{x} \in \Omega$  il ne peut exister de temps tel que  $F_t(\vec{x}) \in \partial\Omega$ . Sans ça, on aurait  $\vec{y} = F_t(\vec{x}) \in \partial\Omega$  et, par (5) et propriété du flot,  $\vec{y} = F_{-t}(\vec{y}) = \vec{x} \in \partial\Omega$ , ce qui n'est pas possible.

Ainsi, aucun point de  $B \subset \Omega$  ne peut se retrouver transporté par le flot sur la structure, et la goutte reste contenue dans  $\Omega$ .

Ceci montre aussi que le flot reste contenu dans le compact  $\bar{\Omega}$  sur lequel  $\vec{u}$  est régulier, et donc que  $t \mapsto F_t(\vec{x})$  existe pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

## 2. Connexité

La préservation de la connexité est triviale : puisque  $\vec{x} \mapsto F_t(\vec{x})$  est continue (propriétés de régularité du flot),  $F_t(B)$  est connexe puisque  $B$  est connexe.

La simple connexité est moins triviale. En général, l'image par une fonction continue d'un ensemble simplement connexe n'est pas simplement connexe ; par exemple,  $[0, 2\pi]$  est simplement connexe mais  $\exp(i[0, 2\pi]) =$  cercle unité dans  $\mathbb{R}^2$  n'est pas simplement connexe. Cependant,  $F_t$  n'est pas qu'une fonction continue, c'est en fait un homéomorphisme de  $\Omega$  avec  $F_t^{-1} = F_{-t}$ ...

Si on prend une courbe fermée  $\gamma : [0, 1] \rightarrow F_t(B)$  alors  $F_{-t} \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow B$  est une courbe fermée, pour laquelle (par simple connexité de  $B$ ) il existe une homotopie  $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow B$  telle que  $h(0, \cdot) = F_{-t} \circ \gamma$  et  $h(1, \cdot) = a$  (point fixé dans  $B$ ). La fonction  $F_t \circ h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow F_t(B)$  est donc bien définie et une homotopie entre  $F_t \circ h(0, \cdot) = F_t \circ F_{-t} \circ \gamma = \gamma$  et la fonction constante  $F_t \circ h(1, \cdot) = F_t(a) \in F_t(B)$ . Cela prouve que  $F_t(B)$  est bien simplement connexe.

## 3. Volume

La question de déterminer l'évolution du volume de  $F_t(B)$  est moins évidente. Un théorème de Liouville bien connu en dynamique des fluides dit que les volumes sont préservés par les champ de vitesse à divergence nulle. Mais on ne suppose pas cela ici... il faut établir un théorème de Liouville généralisé (moins connu que celui à divergence nulle).

En notant  $|\cdot|$  le volume, ce théorème dit dans notre situation que

$$\frac{d}{dt}|F_t(B)| = \int_{F_t(B)} \operatorname{div} \vec{u}(\vec{x}) d\vec{x}. \quad (6)$$

Il y a plusieurs approches possibles pour prouver cela. Cela peut être fait de manière très géométrique, en décrivant le mouvement infinitésimal de  $F_t(B)$  à sa frontière. Le plus simple est cependant d'utiliser une EDO sur le déterminant Jacobien  $JF_t$  de  $F_t$ , pour trouver une représentation de ce Jacobien.

**Lemme** (Représentation de  $JF_t$ ). *Le déterminant Jacobien du flot  $F_t$  satisfait, pour  $x \in \Omega$  et  $t \in \mathbb{R}$ ,*

$$JF_t(\vec{x}) = \exp\left(-\int_0^t \operatorname{div} \vec{u}(F_s(\vec{x})) ds\right). \quad (7)$$

*Preuve.* La différentielle du déterminant en une matrice  $A$  est la forme linéaire  $D \det_A : \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\forall H \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}), \quad D \det_A(H) = \operatorname{tr}((A')^T H),$$

où  $(A')^T$  est la transposée de la co-matrice de  $A$ . Différencier la propriété du flot  $\operatorname{Id} = F_{-t} \circ F_t$  montre que  $DF_t$  est inversible avec  $(DF_t(\vec{x}))^{-1} = (DF_{-t})(F_t(\vec{x}))$ . Ainsi, la relation entre la co-matrice et l'inverse donne alors  $((DF_t(\vec{x}))')^T = \det(DF_t(\vec{x}))(DF_t(\vec{x}))^{-1}$ , et donc, par différentiation de composition  $\det$  avec  $DF_t$ ,

$$\frac{d}{dt} JF_t(\vec{x}) = \frac{d}{dt} \det(DF_t(\vec{x})) = JF_t(\vec{x}) \operatorname{tr}\left((DF_t(\vec{x}))^{-1} \frac{d}{dt} DF_t(\vec{x})\right).$$

Différencier en espace l'EDO sur  $F_t$  donne

$$\frac{d}{dt} DF_t(\vec{x}) = D\vec{u}(F_t(\vec{x})) DF_t(\vec{x}) \quad (8)$$

et on arrive, par propriété de la trace, à

$$\frac{d}{dt} JF_t(\vec{x}) = JF_t(\vec{x}) \operatorname{tr}\left((DF_t(\vec{x}))^{-1} D\vec{u}(F_t(\vec{x})) DF_t(\vec{x})\right) = JF_t \operatorname{tr}(D\vec{u}(F_t(\vec{x}))) = JF_t(x) \operatorname{div} \vec{u}(F_t(\vec{x})).$$

Autrement dit, l'EDO sur le déterminant Jacobien de  $F_t$  est :

$$\frac{d}{dt} JF_t(\vec{x}) = \operatorname{div} \vec{u}(F_t(\vec{x})) JF_t \vec{x}. \quad (9)$$

La formule (6) est obtenue en intégrant cette EDO (linéaire homogène d'ordre 1) et en utilisant  $JF_0 = \det(DF(0)) = \det \text{Id} = 1$ .  $\square$

Pour établir (6), on écrit ensuite, par changements de variables (puisque  $F_t$  est un difféomorphisme de  $\Omega$ ),

$$\frac{d}{dt}|F_t(B)| = \frac{d}{dt} \int_B JF_t(\vec{x}) d\vec{x} = \int_B \text{div } \vec{u}(F_t(\vec{x})) JF_t(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{F_t(B)} \text{div } \vec{u}(\vec{y}) d\vec{y}.$$

Du coup,  $|F_t(B)|$  est obtenu comme

$$|F_t(B)| = |B| + \int_0^t \left( \int_{F_s(B)} \text{div } \vec{u}(\vec{x}) d\vec{x} \right) ds = |B| + \int_B \left( \int_0^t JF_s(\vec{x}) \text{div } \vec{u}(F_s(\vec{x})) ds \right) d\vec{x}.$$

On retrouve  $|F_t(B)| = |B|$  si  $\text{div } \vec{u} = 0$ . Si  $\text{div } \vec{u}$  est uniforme sur  $\Omega$ , donc  $\text{div } \vec{u} = C$  pour une constante  $C \in \mathbb{R}$ ,  $\frac{d}{dt}|F_t(B)| = C|F_t(B)|$  donne

$$|F_t(B)| = |B|e^{Ct}.$$

## 4. et 5. Convexité

Pour la perte de convexité, il suffit de considérer un écoulement de Poiseuille. Cet écoulement est utilisé comme prototype dans de nombreuses situations, et son aspect réaliste est justifié par le fait qu'il satisfait les équations de Navier–Stokes incompressibles (avec conditions au bord homogènes).

Si le tube est horizontal entre  $y = -1$  et  $y = 1$ , on a donc  $u(x, y) = (V(1 - y^2), 0)$  pour un  $V > 0$  constant. Si on considère la boule  $B = B(0, 1/2)$ , à partir d'un certain temps, le segment joignant  $(0, 1/3)$  et  $(0, -1/3)$  n'est plus contenu dans la boule, car le point extrême à droite  $(-1/2, 0)$  est passé à droite du segment joignant  $F_t(0, 1/3)$  et  $F_t(0, -1/3)$ . La figure 1 illustre ceci (voir aussi la figure 2 pour une simulation numérique).

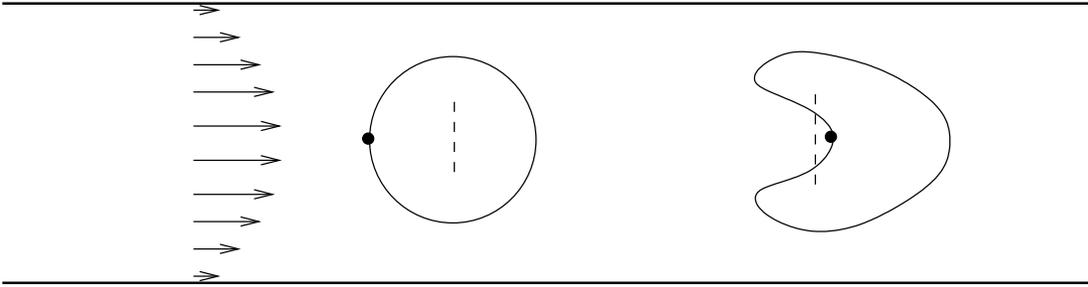


FIGURE 1 – Ecoulement de Poiseuille, boule initiale et boule déformée par l'écoulement en un domaine non-convexe.

Cela se voit plus rigoureusement en constatant que, pour cet écoulement,  $F_t(x, y) = (x + V(1 - y^2)t, y)$ . Ainsi,  $F_t(-1/2, 0) = (-1/2 + Vt, 0)$  et  $F_t(0, \pm 1/3) = (V(1 - (1/3)^2)t, \pm 1/3)$ . Ainsi, tous les points du segment  $[F_t(0, 1/3), F_t(0, -1/3)]$  ont pour abscisse  $V(1 - (1/3)^2)t = \frac{8}{9}Vt$ , qui est plus petit que l'abscisse  $-1/2 + Vt$  de  $F_t(-1/2, 0)$  dès que  $t > 9/2V$ .

La préservation de convexité de  $F_t(B)$  peut être étudiée en 2D à l'aide de la courbure de son bord (qui est une courbe fermée simple puisque  $F_t$  est un difféomorphisme). On constate d'abord que  $F_t(\partial B) = \partial F_t(B)$  puisque  $F_t$  est un difféomorphisme [quelques détails de plus à donner peut-être].

Une paramétrisation du bord de  $F_t(B)$  est obtenue en envoyant par  $F_t$  une paramétrisation du bord de  $B$  (supposée de rayon  $r$  et centrée en 0), par exemple,

$$\gamma_t : s \in [0, 2\pi] \rightarrow F_t(\mu(s)) \in \mathbb{R}^2$$

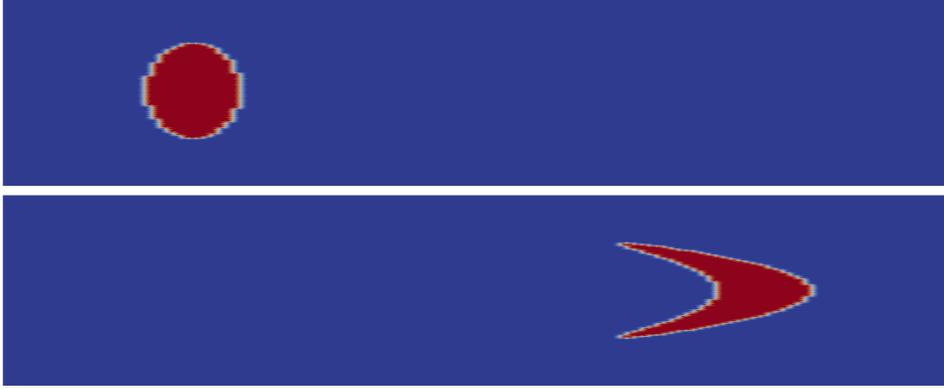


FIGURE 2 – Evolution d’une boule dans un écoulement de Poiseuille : en haut, position et forme initiale ; en bas, position et forme finale.

où  $\mu(s) = re^{is}$ . Comme  $F_t$  préserve l’orientation (car  $JF_t > 0$  par (7)),  $\gamma_t$  parcourt  $\partial F_t(B)$  dans le sens trigonométrique et la convexité de  $F_t(B)$  est donc assurée si  $\det(\gamma'_t(s), \gamma''_t(s)) \geq 0$  pour tout  $s \in [0, 2\pi]$ . On a  $\gamma_t(s)' = DF_t(\mu(s))\mu'(s)$  et  $\gamma_t''(s) = DF_t(\mu(s))\mu''(s) + D^2F_t(\mu(s))(\mu'(s), \mu'(s))$  donc

$$\begin{aligned}
 \det(\gamma'_t(s), \gamma''_t(s)) &= \det(DF_t(\mu(s))\mu'(s), DF_t(\mu(s))\mu''(s)) \\
 &\quad + \det[DF_t(\mu(s))\mu', D^2F_t(\mu(s))(\mu'(s), \mu'(s))] \\
 &= \det(DF_t(\mu(s))) \det(\mu'(s), \mu''(s)) \\
 &\quad + \det[DF_t(\mu(s))\mu'(s), D^2F_t(\mu(s))(\mu'(s), \mu'(s))] \\
 &= r^2 JF_t(\mu(s)) + \det[DF_t(\mu(s))\mu'(s), D^2F_t(\mu(s))(\mu'(s), \mu'(s))] \quad (10)
 \end{aligned}$$

car  $\det(\mu'(s), \mu''(s)) = r^2$  puisque  $\mu(s) = re^{is}$ .

On a  $D^2F_0(\vec{x}) = D^2\text{Id} = 0$  et donc, pour  $t$  petit,  $D_t^F(\vec{x})$  reste petit, uniformément en  $\vec{x}$  (par uniforme continuité de  $(t, \vec{x}) \rightarrow D^2F_t(\vec{x})$ ). Comme  $JF_0(\vec{x}) = 1$ , le membre de droite de (10) reste bien positif, pour tout  $s$ , dès que  $t$  est assez petit. Le premier temps où ce terme de droite devient négatif pour un certain  $s$  (temps qui peut être déterminé à partir de  $\vec{u}$  uniquement, puisque  $F_t$  est donné par ce champ de vecteurs) correspond au temps de perte de convexité de la goutte.

## 6. Comportement asymptotique

On peut considérer un champ de vitesse qui transforme la goutte en carré (dont le bord n’est pas régulier, contrairement à celui de la boule). Par exemple, dans l’ouvert  $(-1.5, 1.5)^2$ ,

$$u(x, y) = (x + 1)(1 - x)(y + 1)(1 - y) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

étendu par 0 en dehors du carré  $[-1, 1]^2$ . Voir Figure 3. Ce champ n’est que Lipschitz-continu, mais une option lisse peut être aisément obtenu par un changement du facteur de troncation  $(x + 1)(1 - x)(y + 1)(1 - y)$ .

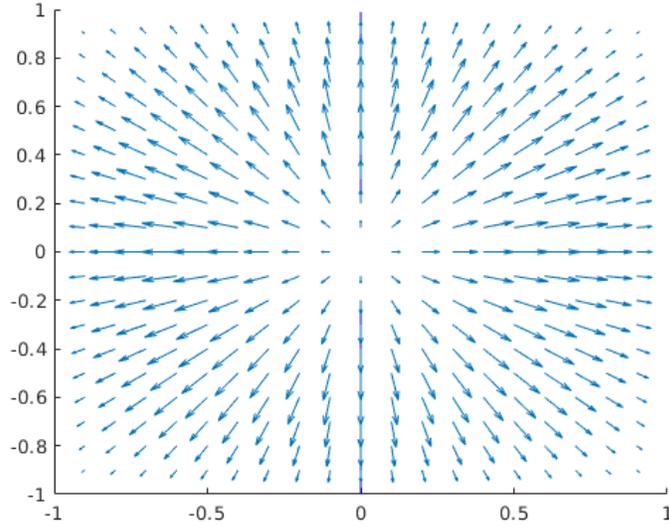


FIGURE 3 – Champ de vitesse transformant une boule en carré.

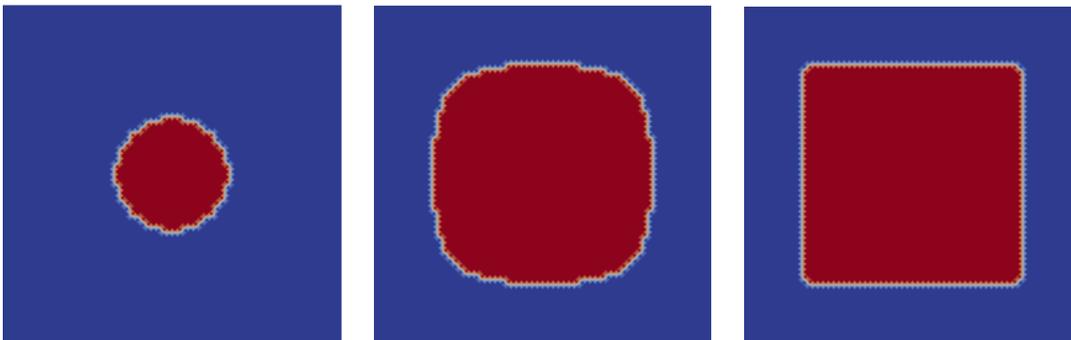


FIGURE 4 – Evolution de la boule aux temps 0, 2, 6.

**Solution de l'équipe Oubama :** Dans un premier temps il convient de décrire le modèle mathématique sur lequel nous allons travailler dans la suite afin de nous intéresser aux propriétés qualitatives de la goutte d'encre. Pour cela, nous allons dénoter par  $\Omega$  la structure, vue comme un sous-ensemble borné (et que nous allons supposer ouvert) de  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ , et modéliser les mouvements de la goutte de la manière suivante sous la forme d'un système d'équations différentielles :

- Pour une particule  $x \in \Omega$  du fluide contenu dans la structure, on note  $v(x) \in \mathbb{R}^d$  la vitesse du fluide à ce point. On supposera que l'influence de la goutte d'encre sur la vitesse du fluide est négligeable, si bien que le champ de vitesse considéré restera constant au cours du temps.
- On considère alors qu'une particule de la goutte d'encre va évoluer selon le fluide, c'est-à-dire que si  $x(t)$  est la position d'une certaine particule de la goutte d'encre, son évolution spatiale sera décrite par l'équation différentielle

$$\dot{x}(t) = v(x(t)) \tag{11}$$

On va supposer que le champ de vitesse est régulier. Plus précisément, on va demander les propriétés suivantes à  $v$  :  $v$  est lisse (de classe  $C^\infty$ ) sur l'adhérence  $\bar{\Omega}$  de la structure ; son extension par zéro en-dehors de la structure est également lisse. Sous ces conditions, le théorème de Cauchy-Lipschitz (voir Demailly,

Analyse numérique et équations différentielles par exemple) nous permet d'affirmer que pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$ , il existe une unique solution au problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v(x(t)) \\ x(0) = x \end{cases}$$

Comme les solutions de cette équation restent contenues dans un compact, (dans l'adhérence de  $\Omega$  pour  $x_0 \in \Omega$  qui est compacte ; sinon la solution est constante), on en déduit donc que ces solutions sont définies en tout temps positif (par le lemme de sortie des compacts).

Il est donc possible de définir le flot  $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$  associé à l'équation différentielle, c'est-à-dire la famille d'applications de  $\Omega$  dans  $\bar{\Omega}$  qui à  $x$  associe  $\phi_t(x)$  définie comme  $y(t)$  où  $y$  est l'unique solution de l'équation différentielle telle que  $y(0) = x$  (pour  $t$  négatif on considère l'équation  $\dot{x}(t) = -v(x(t))$ ). Cette famille d'applications va être cruciale dans la suite puisqu'elle va nous permettre d'étudier la goutte d'encre dans sa globalité au lieu de suivre chaque particule individuellement.

## Évolution des propriétés de la goutte

Nous allons tout d'abord étudier quelques propriétés du flot de l'équation différentielle. De ces propriétés de régularité du flot on obtiendra alors des propriétés géométriques de la goutte d'encre.

### Propriétés du flot

Comme le champ de vitesse est supposé lisse, nous pouvons tout d'abord donner des propriétés de régularité pour le flot :

**Proposition.** *Pour tout temps  $t$  positif ou négatif, le flot  $\phi_t$  vu comme fonction de  $\mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{R}^d$  est un difféomorphisme global.*

*Démonstration.* Remarquons tout d'abord que l'unicité de la solution au problème de Cauchy nous donne que pour tous réels  $t$  et  $s$ , on a  $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$ . Par conséquent le flot  $\phi_t$  est bien une application bijective de  $\mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{R}^d$ , d'inverse  $\phi_{-t}$ .

De plus cette application est lisse et différentiable de différentielle inversible en tout point : pour la régularité du flot, ceci s'ensuit de la régularité du champ de vitesse en montrant par récurrence sur  $k \geq 1$  que le flot est de classe  $C^k$ . De plus, on a que pour tous  $x \in \mathbb{R}^d$  et  $t$  tel que  $D\phi_t(x)$  soit différentiable (où  $D\phi_t(x)$  est la différentielle de  $\phi_t$  au point  $x$ ),

$$\frac{d}{dt} \det(D\phi_t(x)) = \det(D\phi_t(x)) \text{Tr}(D\phi_t(x)^{-1} Dv(x))$$

puisque l'application déterminant est différentiable en toute matrice  $M$  inversible, avec  $D \det(M) \cdot H = \det(M) \text{Tr}(M^{-1} H)$  (ici  $M$  est la matrice  $D\phi_t(x)$  et  $H$  est la matrice  $Dv(x)$ ).

Comme  $\phi_0 = Id$  est différentiable on en déduit que  $\det(D\phi_t(x)) > 0$  pour tout temps  $t$ , et donc que  $D\phi_t(x)$  est inversible pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}^d$ . Par le théorème d'inversion globale on obtient bien que  $\phi_t$  est un difféomorphisme global.  $\square$

De ces propriétés de régularité il est possible de déduire des propriétés topologiques d'ensembles, comme le montre le résultat suivant :

**Proposition.** *Soit  $\psi$  un difféomorphisme local. Alors :*

- l'image directe par  $\psi$  d'un espace connexe est connexe
- l'image directe par  $\psi$  d'un espace simplement connexe est simplement connexe
- l'image directe par  $\psi$  d'un espace compact est compacte
- l'image directe par  $\psi$  d'un ouvert borné à bord lisse est un ouvert borné à bord lisse

*Démonstration.* On sait que si  $f$  est une application continue (resp. continue à valeurs dans un espace séparé), et que  $C$  est connexe (resp. compact), alors  $f(C)$  est connexe (resp. compact).

Si  $f$  est de plus un homéomorphisme ( $f^{-1}$  est continue) et  $C$  est simplement connexe, alors  $f(C)$  est simplement connexe également, puisqu'alors  $f$  induit un isomorphisme entre les groupes fondamentaux de  $C$  (qui est trivial) et de  $f(C)$ , avec  $f_* : [\gamma] \mapsto [f \circ \gamma]$ .

Pour la dernière assertion, il convient tout d'abord de définir la notion de domaine à bord lisse. Nous adoptons la convention qu'un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  possède un bord de classe  $C^k$  lorsque pour tout  $x \in \overline{\Omega}$  il existe  $U$  un voisinage de  $x$  dans  $\mathbb{R}^d$ ,  $V$  un ouvert de  $\mathbb{R}^d$  et  $\phi$  un difféomorphisme de classe  $C^k$  entre  $U$  et  $V$  tels que  $\phi(U \cap \Omega) = V \cap \{y_n > 0\}$  et  $\phi(U \cap \partial\Omega) = V \cap \{y_n = 0\}$ . Dans ce cas le résultat est clair en prenant  $\phi \circ \psi^{-1}$  sur  $\psi(\Omega)$ .  $\square$

## Propriétés géométriques de la goutte d'encre

Notons  $S$  l'étendue initiale de la goutte d'encre. Par définition du flot, la goutte d'encre plongée dans le fluide occupera, en temps  $t$ , l'étendue  $\phi_t(S)$ . En combinant les propriétés vues précédemment, on en déduit donc que :

**Proposition.** *Les caractéristiques suivantes de la goutte d'encre sont conservées en temps fini : sa connexité et sa simple connexité ; sa compacité ; la régularité de son bord.*

Il est intéressant de voir que ces propriétés sont conservées indépendamment de la forme sphérique/circulaire initiale de la goutte d'encre.

Une autre propriété géométrique de la goutte d'encre qu'il est également pertinent de considérer est sa convexité. Mais dans ce cas on n'a pas de conservation de cette propriété au cours du temps, comme le montre l'exemple suivant :

**Exemple.** *Considérons un fleuve dans lequel on a une force de courant. En règle générale, ce courant est plus fort au centre du fleuve que sur le bord du fleuve. On considère alors l'évolution de la goutte d'encre lorsque posée en surface du fleuve en adoptant la modélisation suivante : on considère comme structure une bande  $[-l, l] \times [-L, L]$  dans laquelle le champ de vitesse est décrit par  $v(x, y) = (0, -v_0(l^2 - x^2))$ .*

*Il est alors clair que l'on a pour toute particule  $(x, y)$  initialement dans la goutte d'encre (qui est le disque unité)  $\phi_t(x, y) = (x, y - v_0 t(l^2 - x^2))$ , et donc en particulier une particule  $(x, y)$  avec  $x, y > 0$  initialement sur le bord de sphère traversera le segment entre les points initialement en  $(-1, 0)$  et  $(1, 0)$  en temps  $t = \frac{1 - (1 - x^2)^{1/2}}{v_0(1 - x^2)}$ , rompant ainsi la convexité de la goutte d'eau dès que  $t > \frac{1 - (1 - x^2)^{1/2}}{v_0(1 - x^2)}$  (puisque pour tout  $t > \frac{1 - (1 - x^2)^{1/2}}{v_0(1 - x^2)}$  la particule initialement en  $(x, 0)$  n'appartient pas à la goutte d'encre mais appartient cependant à son enveloppe convexe). La convexité n'est donc pas conservée au cours du temps.*

On voit donc que la connexité de la goutte d'eau est une propriété géométrique qui n'est pas conservée au cours du temps. Il est toutefois possible d'estimer la durée pendant laquelle la goutte reste convexe, dans le sens de la proposition suivante :

**Proposition.** *Considérons  $\Omega$  ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$  et  $S$  disque contenu dans  $\Omega$ . Soient  $a, b$  et  $c$  trois points distincts sur le bord de  $S$  et  $\cos \theta_0 = \langle \frac{b-a}{\|b-a\|}, \frac{x-a}{\|x-a\|} \rangle$  le cosinus de l'angle  $\widehat{BAX}$ .*

*Alors la particule initialement en  $x$  ne traverse le segment reliant les particules initialement en  $a$  et  $b$  qu'en temps supérieur à*

$$T_{conv} = \frac{\theta_0}{2\|\nabla v\|}$$

où  $\|\nabla v\| = \sup_{x \neq y \in \Omega} \frac{|v(x) - v(y)|}{|x - y|}$ , qui est fini puisque  $v$  est lipschitzienne.

Il est intéressant de noter que cette propriété ne dépend pas non plus de la forme initiale de la goutte d'encre.

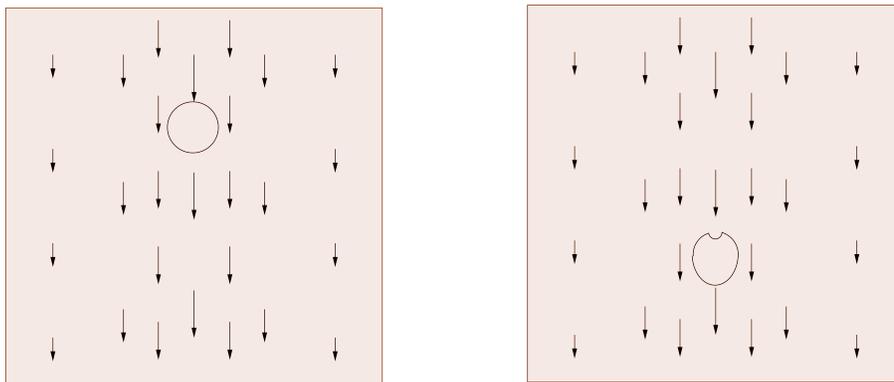


FIGURE 5 – La goutte d'eau peut perdre son caractère convexe

*Démonstration.* Posons

$$\cos(\theta_t) = \left\langle \frac{\phi_t(b) - \phi_t(a)}{\|\phi_t(b) - \phi_t(a)\|}, \frac{\phi_t(x) - \phi_t(a)}{\|\phi_t(x) - \phi_t(a)\|} \right\rangle$$

le cosinus de l'angle formé par ces trois points. Par construction  $x$  ne peut traverser le segment formé par  $a$  et  $b$  tant que  $\cos \theta_t < 1$ .

Or  $\cos \theta_t$  est différentiable avec

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \cos \theta_t &= -\cos \theta_t \left( \left\langle \frac{v(\phi_t(b)) - v(\phi_t(a))}{\|\phi_t(b) - \phi_t(a)\|}, \frac{\phi_t(b) - \phi_t(a)}{\|\phi_t(b) - \phi_t(a)\|} \right\rangle + \left\langle \frac{v(\phi_t(x)) - v(\phi_t(a))}{\|\phi_t(x) - \phi_t(a)\|}, \frac{\phi_t(x) - \phi_t(a)}{\|\phi_t(x) - \phi_t(a)\|} \right\rangle \right) \\ &+ \left\langle \frac{v(\phi_t(b)) - v(\phi_t(a))}{\|\phi_t(b) - \phi_t(a)\|}, \frac{\phi_t(x) - \phi_t(a)}{\|\phi_t(x) - \phi_t(a)\|} \right\rangle + \left\langle \frac{v(\phi_t(x)) - v(\phi_t(a))}{\|\phi_t(x) - \phi_t(a)\|}, \frac{\phi_t(b) - \phi_t(a)}{\|\phi_t(b) - \phi_t(a)\|} \right\rangle \end{aligned}$$

et donc

$$\frac{d}{dt} \cos \theta_t = \sin \theta_t (\langle V_b, U_x \rangle + \langle V_x, U_b \rangle)$$

où  $V_b = \frac{v(\phi_t(b)) - v(\phi_t(a))}{\|\phi_t(b) - \phi_t(a)\|}$ ,  $U_x$  de norme 1 et colinéaire à  $\frac{\phi_t(x) - \phi_t(a)}{\|\phi_t(x) - \phi_t(a)\|} - \frac{\phi_t(b) - \phi_t(a)}{\|\phi_t(b) - \phi_t(a)\|} \cos \theta_t$  (et de même pour  $V_x$  et  $U_b$ ) puisque  $\left\| \frac{\phi_t(x) - \phi_t(a)}{\|\phi_t(x) - \phi_t(a)\|} - \frac{\phi_t(b) - \phi_t(a)}{\|\phi_t(b) - \phi_t(a)\|} \cos \theta_t \right\|^2 = 1 - \cos(\theta_t)^2 = \sin(\theta_t)^2$ .

On en déduit donc que

$$\frac{d}{dt} \theta_t = \langle V_b, U_x \rangle + \langle V_x, U_b \rangle$$

puis que, dans le cas  $\theta_0 > 0$ ,  $\theta_t \geq \theta_0 - 2\|\nabla v\|t$ , et par conséquent on a que  $\theta_t = 0$  impose d'avoir  $t \geq \frac{\theta_0}{2\|\nabla v\|}$ . On en déduit donc le résultat souhaité.  $\square$

## Propriétés quantitatives de la goutte d'encre

On va dans cette partie s'intéresser à des propriétés plus quantitatives de la goutte d'encre, comme la taille de l'étendue de sa surface. l'évolution de ces quantités peut être mesuré à l'aide d'une certaine fonction du champ des vitesses de la manière suivante :

**Proposition.** Notons  $V_t = \text{vol}(\phi_t(S))$  le volume de la goutte d'encre au temps  $t$  et  $P_t$  son périmètre.

Alors

$$\frac{d}{dt} V_t = \int_{\phi_t(S)} \text{div}(v)(x) d\lambda(x) \quad (12)$$

où  $\lambda$  est la mesure de Lebesgue et  $\text{div}(v) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$  est la divergence du champ de vitesse.

En particulier si le champ de vitesse est à divergence nulle alors le volume de la goutte d'encre est conservé.

*Démonstration.* Par la formule de changement de variable,

$$V_t = \int_{\phi_t(S)} d\lambda(x) = \int_S |\det(\frac{\partial(\phi_t)_i}{\partial x_j})| d\lambda(x)$$

où  $\det(\frac{\partial(\phi_t)_i}{\partial x_j})$  est le jacobien de  $\phi_t$ . Or on sait que  $\frac{d}{dt} \det(\frac{\partial(\phi_t)_i}{\partial x_j}) = \det(\frac{\partial(\phi_t)_i}{\partial x_j}) \text{Tr}((\frac{\partial v_i}{\partial x_j}) \circ \phi_t) = \det(\frac{\partial(\phi_t)_i}{\partial x_j}) \text{div}(v) \circ \phi_t$  puisque l'application déterminant est différentiable en toute matrice  $M$  inversible, avec  $D \det(M) \cdot H = \det(M) \text{Tr}(M^{-1}H)$  (ici  $M$  est la matrice  $(\frac{\partial(\phi_t)_i}{\partial x_j})$  et  $H$  est la matrice  $(\frac{\partial(v \circ \phi_t)_i}{\partial x_j}) = M(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}) \circ \phi_t$ ).

On en déduit donc que  $\frac{d}{dt} V_t = \int_S |\det(\frac{\partial(\phi_t)_i}{\partial x_j})| \text{div}(v) \circ \phi_t d\lambda(x) = \int_{\phi_t(S)} \text{div}(v)(x) d\lambda(x)$ . □

Une autre quantité qu'il pourrait être intéressant de considérer est le diamètre de la goutte d'encre, est-à-dire la distance maximale entre deux points de la goutte d'encre :

**Proposition.** Notons, pour tout temps  $t$ ,  $D_t = \sup_{a,b \in S} |\phi_t(b) - \phi_t(a)|$  le diamètre de la goutte d'encre. Alors

$$D_0 e^{-\|\nabla v\|t} \leq D_t \leq D_0 e^{\|\nabla v\|t} \quad (13)$$

*Démonstration.* Soient  $a, b$  deux points de la goutte d'encre. Alors

$$\frac{d}{dt} \|\phi_t(b) - \phi_t(a)\| = \langle \frac{v(\phi_t(b)) - v(\phi_t(a))}{\|\phi_t(b) - \phi_t(a)\|}, \phi_t(b) - \phi_t(a) \rangle \leq \|\nabla v\| \cdot \|\phi_t(b) - \phi_t(a)\|$$

Par le lemme de Gronwall on obtient donc les estimations  $\|b - a\| e^{-\|\nabla v\|t} \leq \|\phi_t(b) - \phi_t(a)\| \leq \|b - a\| e^{\|\nabla v\|t}$ . Par conséquent on a bien le résultat attendu. □

Avec la même preuve, on peut de la même manière quantifier la distance entre le bord de la structure et la goutte d'encre :

**Proposition.** Notons, pour tout temps  $t$ ,  $d_t = \inf_{a \in S, b \in \partial\Omega} |b - \phi_t(a)|$  la distance entre la goutte d'encre et le bord de la structure. Alors

$$d_0 e^{-\|\nabla v\|t} \leq d_t \leq d_0 e^{\|\nabla v\|t} \quad (14)$$

En particulier la goutte d'encre ne touchera pas le bord de la structure en temps fini.

## Généralisation des résultats

Dans l'étude précédente, nous nous sommes intéressés au cas d'une goutte plongée dans un fluide contenu dans une structure plane ou tri-dimensionnelle. Il peut également être pertinent de se demander si ces résultats restent vrais lorsque l'on considère que le fluide n'est plus contenu dans une telle structure, mais sur une surface quelconque ou dans un solide quelconque, ou plus généralement dans une variété réelle (lisse) de dimension 2 ou 3, notée  $M$ .

Dans ce contexte, le problème se modélise de la même façon à ceci près que le champ de vitesse  $v : \Omega \rightarrow \Omega$  sera changé en un champ de vecteurs lisse  $X : M \rightarrow TM$  où  $TM$  désigne l'espace tangent de  $M$ . Les propriétés de régularité du flot restent alors valables dans ce contexte (ces propriétés étant de nature locale on peut se ramener à l'aide de cartes locales à  $\mathbb{R}^d$ , auquel cas les résultats ont été vu plus haut). On peut donc appliquer la même démarche que celle effectuée plus haut pour obtenir que

**Proposition.** Dans le cas de variétés lisses, les caractéristiques géométriques suivantes de la goutte d'encre sont conservées en temps fini : sa connexité et sa simple connexité ; sa compacité ; la régularité de son bord. L'évolution de quantités telles que le volume ou le diamètre sont décrites par des équations

$$\frac{d}{dt} \text{vol}(\phi_t(S)) = \int_{\phi_t(S)} \text{div} X dg \quad (15)$$

où  $X$  est la divergence du champ de vecteur  $X$ , et

$$D_0 e^{-\|\nabla v\|t} \leq D_t \leq D_0 e^{\|\nabla v\|t} \quad (16)$$

## Étude asymptotique de la forme de la goutte d'encre

Les propriétés que nous avons étudié dans la partie précédente concernaient l'état en temps fini de la goutte d'encre. On est donc en droit de se demander que deviennent ces propriétés lorsque l'on s'intéresse à l'asymptotique de la goutte d'encre. On va en fait montrer que les propriétés que l'on a vues précédemment ne restent plus valables lorsque l'on considère le système en temps infini, en s'appuyant sur les exemples suivants.

**Exemple.** On suppose que le fluide est contenu dans une structure symétrique par rotation autour de l'origine, avec un col à l'origine et un val sur le cercle de rayon 2, puis de nouveau un col sur le cercle de rayon 4.

Dans cette structure, le champ de vitesse du fluide est décrit par une fonction radiale et orientée depuis l'origine vers le cercle de rayon 2, on peut par exemple penser à une fonction du type  $v(r) = r(2-r)$  pour  $r < 2$  ou  $v(r) = \sin(\pi r)$ .

Dans ce cas il est clair que si la goutte d'eau occupe initialement le disque centré en l'origine et de rayon  $1/2$ , toutes ses particules exceptée celle au centre vont migrer vers le val, seule position d'équilibre stable de la structure. Par conséquent la goutte d'encre obtenue asymptotiquement est décrite par la réunion du cercle de rayon 2 centré à l'origine et de l'origine. Cet objet n'est pas connexe (en particulier n'est simplement connexe) et son bord intérieur n'est pas régulier.

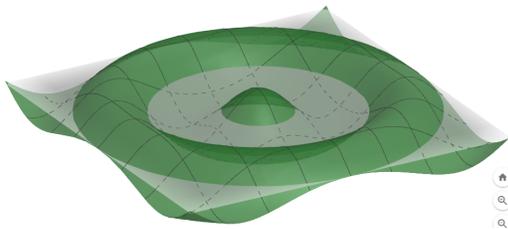


FIGURE 6 – La goutte d'encre occupe la tache verte centrale

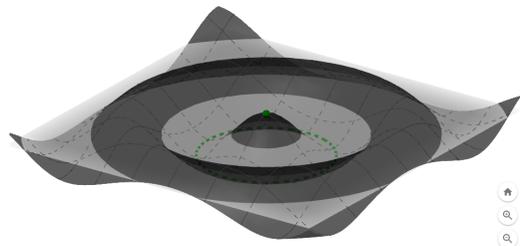


FIGURE 7 – État de la goutte d'encre après un temps infini, en vert

## Problème 7

Existe-t-il une mesure de probabilité sur le plan euclidien qui favorise les triangles acutangles (i.e. dont les trois angles sont strictement aigus)? Autrement dit, existe-t-il une mesure de probabilité sur le plan telle que trois points choisis au hasard et de manière indépendante forment un triangle acutangle non dégénéré avec une probabilité qui dépasse  $\frac{1}{2}$ ?

**Solution de l’auteur :** La réponse est “oui”.

Étant donnée une configuration  $S = \{x_1, \dots, x_N\}$  de  $N$  points du plan, soit  $a(S)$  le nombre de triangles acutangles dont les sommets sont dans  $S$ . Considérons la mesure de comptage  $\mu(S) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \delta_{x_k}$ , où  $\delta_x$  est la distribution de Dirac. Alors trois points choisis au hasard et de manière indépendante selon cette mesure seront à des endroits différents avec une probabilité  $(N-1)(N-2)/N^2$ , donc forment un triangle acutangle avec une probabilité

$$p(S) = \frac{(N-1)(N-2)}{N^2 \binom{N}{3}} a(S) = \frac{6}{N^3} a(S).$$

On construit dans la suite une configuration  $S$  de  $N = 3n$  points pour tout entier  $n \geq 4$  telle que

$$a(S) = 3 \binom{n}{2} n + n^3 \sim \frac{5}{2} n^3 = \frac{5}{9} \frac{N^3}{6},$$

donc avec  $p(S)$  arbitrairement proche de  $5/9$  si  $n$  est assez grand. J’explique dans un commentaire à la fin que, si la plus connue des conjectures sur les hypergraphes est vraie, alors  $5/9$  est optimal. Après avoir proposé la question au concours de la SMF, j’ai eu connaissance de la référence [2], qui contient une construction très voisine. Cette référence propose aussi (Theorem 4) la majoration  $P \leq \frac{2}{3}$ . Curieusement, les auteurs de [1] ne font pas le lien avec cette conjecture, alors qu’ils la connaissaient forcément et qu’elle leur aurait permis d’améliorer cette majoration.

**Notations.** Le plan est  $\mathbb{R}^2$ , muni de sa norme euclidienne  $\| \cdot \|$ .

Pour  $X \subset \mathbb{R}^2$  on note  $\text{Int } X$  l’intérieur de  $X$ ,  $\text{bd } X$  sa frontière,  $\text{conv } X$  son enveloppe convexe et  $\text{aff } X$  son enveloppe affine (le plus petit sous-espace affine contenant  $X$ ).

Le segment  $\text{conv } \{x, y\}$  est noté  $xy$  et le triangle  $\text{conv } \{x, y, z\}$  est noté  $xyz$ . Un triangle est dit *non dégénéré* si son intérieur est non vide. Un angle est dit *aigu* si sa mesure est strictement inférieure à  $\pi/2$ .

Étant donné  $\omega \in \mathbb{R}^2$  et  $r > 0$ ,  $\mathcal{D}(\omega, r)$  désigne le disque fermé de centre  $\omega$  et de rayon  $r$ .

Pour  $x \neq y \in \mathbb{R}^2$ , on note  $\mathcal{S}(x, y)$  la bande ouverte de largeur  $\|x - y\|$  et contenant  $x$  et  $y$  sur son bord.

Soit  $\mathcal{H}(x, y) = \mathcal{S}(x, y) \setminus \mathcal{D}\left(\frac{x+y}{2}, \frac{\|x-y\|}{2}\right)$ . De cette manière, on a pour tout  $z \in \mathbb{R}^2$  :

le triangle  $xyz$  est acutangle si et seulement si  $z \in \mathcal{H}(x, y)$ .

L’angle orienté entre les segments orientés  $xy$  et  $xz$  est noté  $\widehat{y\hat{x}z}$ . Les mesures d’angles seront toutes choisies dans  $] -\pi, \pi]$ . Pour plus de fluidité dans le discours, on confondra parfois “angle” et “mesure d’angle”.

Pour  $p, q \in \mathbb{R}^2$  et  $\delta > 0$ , soit

$$\mathcal{A}(p, q, \delta) = \{m \in \mathbb{R}^2 : \|m - p\| = \|q - p\| \text{ et } |\widehat{mpq}| \leq \delta\};$$

$\mathcal{A}(p, q, \delta)$  est un arc de cercle fermé d’ouverture angulaire  $2\delta$ ;  $p$  est le centre du cercle, et  $q$  est le milieu de l’arc.

Soit  $p_1 p_2 p_3$  un triangle acutangle, d’angles en  $p_i$  notés  $\alpha_i$  et de longueurs de côtés  $r_i = \|p_{i+1} - p_i\|$  ( $i$  est pris mod 3).

Avec  $\delta_1 > 0$  assez petit, on choisit les  $n$  premiers points  $x_1, \dots, x_n$  équidistants sur l’arc  $\mathcal{A}(p_2, p_1, \delta_1)$ , avec  $x_1$  et  $x_n$  aux extrémités. En posant  $\varepsilon_1 = \frac{\delta_1}{n-1}$  et  $h_1 = r_1 \sin \varepsilon_1$ , on a  $\|x_{k+1} - x_k\| = 2h_1$ .

Sur la droite aff  $(p_1 p_2)$ , soit  $p'_2 \neq p''_2$  tels que  $\|p_2 - p'_2\| = \|p_2 - p''_2\| = \frac{h_1}{\sin(\delta_1 - \varepsilon_1)}$ , disons, avec  $p'_2 \in p_1 p_2$  (et donc  $p_2 \in p_1 p'_2$ ).

Soit  $R_2$  la figure de type "losange" définie par

$$R_2 = \text{Int conv} \left( \{p'_2, p''_2\} \cup \mathcal{D}(p_2, h_1) \right).$$

On choisit  $n \geq 4$  et  $\delta_1$  assez petit pour que  $\frac{\sin \varepsilon_1}{\sin(\delta_1 - \varepsilon_1)} \leq \cos \delta_1 - \sin \delta_1$ . Ceci entraîne que  $R_2$  ne rencontre pas  $\mathcal{D}\left(\frac{x_1 + x_n}{2}, \frac{\|x_1 - x_n\|}{2}\right)$ , le disque de diamètre  $x_1 x_n$ . Ainsi, pour tous  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  distincts,  $\mathcal{H}(x_i, x_j)$  contient  $R_2$ .

A présent on cherche  $\delta_2 > 0$  tel que  $R_2$  contienne l'arc  $\mathcal{A}(p_3, p_2, \delta_2)$ . Soit  $u$  l'extrémité de la portion circulaire de bd  $R_2$  telle que  $\widehat{p'_2 u p_2} = \frac{\pi}{2}$  et soit  $v$  le point d'intersection de bd  $R_2$  et bd  $\mathcal{D}(p_3, r_2)$ , avec  $v \in p'_2 u$ . Posons  $\delta = \widehat{p_2 p_3 v}$ . Alors le triangle  $u v p_2$  est rectangle en  $u$ , a un angle  $\widehat{u p_2 v} = \alpha_2 - \frac{\delta}{2} - \delta_1 + \varepsilon_1$ , un côté  $u p_2$  de longueur  $h_1$ , et une hypoténuse  $v p_2$  de longueur  $2r_2 \sin \frac{\delta}{2}$ , donc

$$2r_2 \sin \frac{\delta}{2} \cos \left( \alpha_2 - \frac{\delta}{2} - \delta_1 + \varepsilon_1 \right) = h_1 = r_1 \sin \varepsilon_1.$$

Comme  $\varepsilon_1 = \frac{\delta_1}{n-1} < \frac{\delta_1}{2}$  et que la fonction  $u \mapsto \frac{\sin u}{u}$  décroît sur  $[0, \pi]$ , on a

$$\frac{1}{\varepsilon_1} \sin \varepsilon_1 > \frac{2}{\delta_1} \sin \frac{\delta_1}{2}.$$

On obtient

$$\frac{2r_1}{n-1} \sin \frac{\delta_1}{2} < h_1 < 2r_2 \sin \frac{\delta}{2} \cos \alpha_2.$$

On choisit donc  $\delta_2$  tel que

$$\frac{r_1}{n-1} \sin \frac{\delta_1}{2} = r_2 \sin \frac{\delta_2}{2} \cos \alpha_2. \quad (17)$$

Sur l'arc  $\mathcal{A}(p_3, p_2, \delta_2)$ , on choisit les points  $x_{n+1}, \dots, x_{2n}$  comme précédemment (i.e. équidistants, avec  $x_{n+1}$  et  $x_{2n}$  aux extrémités de l'arc). Alors, pour tous  $i, j \in \{n+1, \dots, 2n\}$  distincts,  $\mathcal{H}(x_i, x_j)$  contient

$$R_3 = \text{Int conv} \left( \{p'_3, p''_3\} \cup \mathcal{D}(p_3, h_2) \right)$$

où  $h_2 = r_2 \sin \varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_2 = \frac{\delta_2}{n-1}$ ,  $p'_3 \in p_2 p_3$ ,  $p_3 \in p'_3 p''_3$  et  $\|p_3 - p'_3\| = \|p_3 - p''_3\| = \frac{h_2}{\sin(\delta_2 - \varepsilon_2)}$ . Soit  $\delta_3$  tel que

$$\frac{r_2}{n-1} \sin \frac{\delta_2}{2} = r_3 \sin \frac{\delta_3}{2} \cos \alpha_3; \quad (18)$$

alors  $R_3$  contient l'arc  $\mathcal{A}(p_1, p_3, \delta_3)$ . Sur  $\mathcal{A}(p_1, p_3, \delta_3)$ , on choisit les points  $x_{2n+1}, \dots, x_{3n}$  comme avant, et  $\mathcal{H}(x_i, x_j)$  contiendra  $\{x_1, \dots, x_n\}$  pour tous  $i, j \in \{2n+1, \dots, 3n\}$  distincts dès que

$$\frac{r_3}{n-1} \sin \frac{\delta_3}{2} \geq r_1 \sin \frac{\delta_1}{2} \cos \alpha_1. \quad (19)$$

En multipliant (17), (18) et (19), on obtient que cette condition est satisfaite dès que

$$\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 \leq \frac{1}{(n-1)^3}.$$

On choisit par exemple  $\alpha_1 = n^{-3/2}$ ,  $\alpha_2 = \alpha_3 = \frac{\pi - \alpha_1}{2}$ , et  $\delta_1 > 0$  assez petit. Les points  $x_i x_j x_k$  forment un triangle acutangle dans les quatre cas suivants (et seulement dans ces cas) :

- (i)  $0 < i, j \leq n < k \leq 2n$ ,
  - (ii)  $n < i, j \leq 2n < k \leq 3n$ ,
  - (iii)  $0 < k \leq n < 2n < i, j \leq 3n$  et
  - (iv)  $0 < i \leq n < j \leq 2n < k \leq 3n$ ,
- ce qui montre que  $a(S) = 3 \binom{n}{2} n + n^3$ .

**Commentaire.** La (3,4)-conjecture de Turán [7] est sans doute la conjecture la plus connue dans le domaine des hypergraphes. L'objet de ce commentaire est de rappeler cette conjecture et de montrer que la

construction présentée ci-dessus est optimale si cette conjecture est vraie dans le sens suivant : le maximum, sur toutes les configurations  $S$  à  $n$  points, du nombre  $a(S)$  de triangles acutangles est égal à  $3 \binom{n}{2} n + n^3$ .

Une conséquence est que  $5/9$  est optimal dans le sens suivant. Étant donnée une mesure de probabilité  $\mu$  sur le plan et trois points  $a, b, c$  pris au hasard de manière indépendante, notons  $P(\mu)$  la probabilité que le triangle  $abc$  soit acutangle. Alors le supremum de  $P(\mu)$  sur toutes les mesures de probabilité  $\mu$  sur  $\mathbb{R}^2$  est égal  $5/9$  si la (3,4)-conjecture de Turàn est vraie.

**1.** Étant donné un entier  $n \geq 3$ , soit  $A_n$  le maximum de  $a(S)$  pour toutes les configurations  $S$  à  $n$  points. Une configuration  $S$  sera dite *optimale* si  $a(S) = A_n$ .

Pour chaque  $n \geq 3$ , soit  $p_n$  la proportion de triangles acutangles d'une configuration optimale à  $n$  points :  $p_n = A_n / \binom{n}{3}$ . On montre facilement que la suite  $(p_n)_{n \geq 3}$  est décroissante au sens large ; l'argument est le même que dans la preuve ci-après. Posons  $p = \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$ .

Alors j'affirme que  $P(\mu) \leq p$  pour toute mesure de probabilité  $\mu$  sur  $\mathbb{R}^2$ . En effet, soit  $\mu$  une mesure de probabilité arbitraire sur le plan. Pour  $n$  arbitrairement grand, choisissons  $n$  points au hasard et de manière indépendante. Par linéarité, l'espérance du nombre de triangles acutangles est  $\binom{n}{3} P(\mu)$ , et ce nombre est au plus le maximum  $A_n$ , ce qui montre que  $P(\mu) \leq p_n$  pour tout entier  $n$ .

**2.** Un *3-hypergraphe uniforme*, ou *3-graphe* pour faire court, est la donnée d'un ensemble  $V$  (les sommets) est d'un ensemble  $E$  de parties de  $V$  à 3 éléments (les arêtes). Soit  $t_3(n, 4)$  le nombre maximal d'arêtes d'un 3-graphe à  $n$  sommets ne contenant pas le 3-graphe complet sur 4 sommets comme sous-graphe induit. Un exemple de 3-graphe à  $n$  sommets contenant beaucoup d'arêtes sans contenir le 3-graphe complet sur 4 sommets peut être construit ainsi : on divise  $V$  en trois parties  $A, B, C$  les plus égales possibles, c'est-à-dire de cardinaux respectivement  $a, b, c$  tels que  $|a - b|, |b - c|$  et  $|c - a|$  sont tous au plus 1. On met maintenant une arête à chaque triplet  $(x, y, z)$  — et seulement à ceux-là — tel que, ou bien  $(x \neq y \in A \text{ et } z \in B)$ , ou bien  $(x \neq y \in B \text{ et } z \in C)$ , ou bien  $(x \neq y \in C \text{ et } z \in A)$ , ou bien  $(x \in A, y \in B \text{ et } z \in C)$ . En additionnant, on obtient

$$t_3(n, 4) \geq T_n := \max_{a+b+c=n} \left( \binom{a}{2} b + \binom{b}{2} c + \binom{c}{2} a + abc \right).$$

La (3, 4)-conjecture de Turàn est que  $t_3(n, 4) = T_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Elle a été vérifiée pour tout  $n \leq 13$  [6]. Cette conjecture impliquerait

$$L := \lim_{n \rightarrow +\infty} t_3(n, 4) / \binom{n}{3} = \frac{5}{9} \approx 0.555.$$

La meilleure borne publiée pour  $L$  est  $\frac{3+\sqrt{17}}{12} \approx 0.597$  [1]. La borne 0.561666 est annoncée dans [5]. Une difficulté est que, si  $n \geq 7$ , alors plusieurs autres 3-graphes atteignent ce maximum putatif [3, 4].

Notre construction ci-dessus montre que  $A_n \geq T_n$  pour tout entier  $n \geq 3$  (prendre un plus petit nombre de points si  $n$  n'est pas un multiple de 3, ou si  $n \leq 12$ ). Réciproquement, la borne  $A_n \leq t_3(n, 4)$  est immédiate : étant donnés quatre points  $a, b, c, d$  dans le plan euclidien, au moins un des triangles  $abc, abd, acd$  ou  $bcd$  n'est pas acutangle.

## Références

- [1] F. Chung, L. Lu, An upper bound for the Turàn number  $t_3(n, 4)$ , *J. Combin. Th.* 87 (1999) 381–389.
- [2] P. Erdős, M.J.T. Guy, J.H. Conway, and H. T. Croft, On the distribution of values of angles determined by coplanar points, *J. London Math Soc.* 19, 1979.
- [3] D. G. Fon-Der-Flaass, Method for construction of (3, 4)-graphs, *Mat. Zametki* 44 (4), 546–550 (1988) [*Math. Notes* 44 (4), 781–783 (1988)].
- [4] A. V. Kostochka, A class of constructions for Turàn's (3, 4)-problem, *Combinatorica* 2 (1982) 187–192.
- [5] A. A. Razborov, On 3-hypergraphs with forbidden 4-vertex configurations, *SIAM J. Discrete Math.* 24 (2010) 946–963.

- [6] T. H. Spencer, On the size of independent sets in hypergraphs, *Coding theory, design theory, group theory*, Wiley-Intersci. Publ., Wiley, New York (1993) 263–273.
- [7] P. Turán, Eine Extremalaufgabe aus der Graphentheorie, *Mat. Fiz. Lapok* 48 (1941) 436–452. [8] P. Turán, Research problem.

**Ce problème n'a été résolu de façon complètement satisfaisante par aucune équipe, même si plusieurs ont donné des éléments de réponse corrects et substantiels.**

## Problème 8

Un polynôme  $P$  de degré  $n \geq 1$  est dit antisymétrique si  $P(-x) = x^n P(\frac{1}{x})$  pour tout nombre réel non nul  $x$ . Montrer qu'un polynôme antisymétrique avec des coefficients entiers impairs n'a pas de racine sur le cercle unité de  $\mathbb{C}$ .

**Solution de l'auteur :** En écrivant

$$P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n,$$

on déduit de l'antisymétrie les relations

$$a_{n-k} = (-1)^k a_k \quad \text{pour tout } k = 0, \dots, n. \quad (20)$$

En particulier,  $a_n = a_0 = (-1)^n a_n$ ; comme  $a_n \neq 0$ , on en déduit que  $n$  est pair.

Ensuite, nous avons  $a_{n/2} = (-1)^{n/2} a_{n/2}$ ; comme  $a_{n/2} \neq 0$ , on en déduit que  $n/2$  est aussi pair. On a donc  $n = 4m$  avec un entier  $m$  strictement positif.

En raisonnant par l'absurde, supposons qu'il existe une racine  $u$  du module un de  $P$ . Alors, en utilisant (20), l'égalité suivante a lieu :

$$0 = u^{-2m} P(u) = a_{2m} + \sum_{j=1}^m a_{2m+2j} (u^{2j} + u^{-2j}) + \sum_{j=1}^m a_{2m+2j-1} (u^{2j-1} - u^{-2j+1}). \quad (21)$$

Comme la première somme est réelle et la seconde est purement imaginaire, on a nécessairement

$$a_{2m} + \sum_{j=1}^m a_{2m+2j} (u^{2j} + u^{-2j}) = \sum_{j=1}^m a_{2m+2j-1} (u^{2j-1} - u^{-2j+1}) = 0,$$

d'où  $u$  est une racine commune des polynômes

$$Q(z) := \sum_{j=0}^{2m} a_{2j} z^{2j} \quad \text{et} \quad R(z) := \sum_{j=1}^{2m} a_{2j-1} z^{2j-1}.$$

Par conséquent, ils ont un commun diviseur  $M(z)$  de degré  $\geq 1$  : le polynôme minimal de  $u$ .

En choisissant  $M$  tel que le plus grand commun diviseur de ses coefficients soit égal à 1, son coefficient principal est impair, donc  $\deg M \geq 1$ , même si  $M$  est considéré comme un polynôme à coefficients dans le corps  $\mathbb{F}_2 := \{0, 1\}$  à deux éléments.

Comme polynômes dans  $\mathbb{F}_2[z]$ ,  $Q$  et  $R$  s'écrivent sous la forme

$$Q(z) = \sum_{j=0}^{2m} z^{2j} \quad \text{et} \quad R(z) = \sum_{j=1}^{2m} z^{2j-1}.$$

Par conséquent,  $M(z)$  divise  $zR(z) - Q(z) = 1$ , contredisant la relation  $\deg M \geq 1$ .

**Remarque.** Une fin de preuve alternative, sans utiliser le corps  $\mathbb{F}_2[z]$  a été proposée par Pál Péter Pálffy : Comme  $u$  est une racine de  $Q(z)$  et de  $R(z)/z$ , il est aussi une racine de  $Q(z) + R(z)/z$  et de  $Q(z) - R(z)/z$ . Leur coefficient principal est impair, les autres sont pairs, et le terme constant d'un des deux n'est pas un multiple de 4. Celui-ci est le polynôme minimal de  $u$  d'après le critère de Schönemann–Eisenstein. Mais il ne peut pas être un diviseur de  $R(z)/z$ , parce que le degré du dernier est plus petit. Cette contradiction prouve le résultat cherché.

**Solution de l'équipe Tigré :** Soit  $P$  un polynôme antisymétrique à coefficients impairs. Supposons par l'absurde que  $P$  admet une racine  $z$  de module 1.

On a :

$$\begin{aligned}
P(X) &= (-X)^{\deg P} P\left(-\frac{1}{X}\right) \\
&= (-X)^{\deg P} \left(\frac{1}{X}\right)^{\deg P} P(X) \\
&= (-1)^{\deg P} P(X).
\end{aligned}$$

Ainsi, comme  $P$  est non identiquement nul, il est de degré pair, qu'on notera  $2n$ .

Notons  $Q := (P(X) + P(-X))/2$  et  $R := (P(X) - P(-X))/2$ . Les polynômes  $Q$  et  $R$  sont respectivement pair de degré  $2n$  et impair de degré  $2n - 1$ . De plus  $P = Q + R$ , et donc :

$$Q(z) + R(z) = 0.$$

Or  $z$  est de module 1, et  $P$  antisymétrique à coefficients réels, et donc :

$$\begin{aligned}
P(-z) &= P\left(-\frac{1}{\bar{z}}\right) \\
&= \frac{1}{\bar{z}^n} P(\bar{z}) \\
&= \frac{1}{\bar{z}^n} \overline{P(z)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Donc  $-z$  est également une racine de  $P$ , ainsi  $Q(z) - R(z) = 0$ . On en déduit que  $z$  est une racine commune de  $Q + R$  et  $Q - R$ , puis que  $z$  est à la fois une racine de  $Q$  et de  $R$ .

Or  $Q$  et  $X^{-1}R$  sont deux polynômes pairs (au sens où leurs coefficients d'indices impairs sont nuls), dont les coefficients d'indices pairs sont impairs, car ceux-ci font partie de la suite des coefficients de  $P$ . Autrement dit, il existe deux polynômes  $\tilde{Q}$  (de degré  $n$ ) et  $\tilde{R}$  (de degré  $n-1$ ) à coefficients impairs vérifiant :

$$Q(X) = \tilde{Q}(X^2) \text{ et } X^{-1}R(X) = \tilde{R}(X^2).$$

En évaluant ces égalités en  $z$ , on voit que  $z^2$  est une racine commune à  $\tilde{Q}$  et  $\tilde{R}$ .

Par ailleurs, l'imparité des coefficients s'écrit :

$$\tilde{Q} \equiv \sum_{k=0}^n X^k \pmod{2} \text{ et } \tilde{R} \equiv \sum_{k=0}^{n-1} X^k \pmod{2}.$$

Donc on peut écrire (les résultants étant considérés dans  $\mathbb{Z}[X]$ ) d'une part :

$$\text{Res}(\tilde{R}, \tilde{Q}) \equiv \text{Res}\left(\sum_{k=0}^{n-1} X^k, \sum_{k=0}^n X^k\right) \pmod{2}$$

(il suffit de passer modulo 2 matriciellement, coefficient par coefficient)

Et d'autre part :

$$\begin{aligned}
\text{Res}\left(\sum_{k=0}^{n-1} X^k, \sum_{k=0}^n X^k\right) &= \prod_{k=1}^{n-1} \prod_{l=1}^n \left(e^{\frac{2ik\pi}{n}} - e^{\frac{2il\pi}{n+1}}\right) \\
&= \prod_{k=1}^{n-1} \sum_{l=0}^n \left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^l \\
&= \prod_{k=1}^{n-1} \frac{e^{\frac{2ik(n+1)\pi}{n}} - 1}{e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1} \\
&= 1,
\end{aligned}$$

Ainsi, le résultant  $\text{Res}(\tilde{R}, \tilde{Q})$  est impair, en particulier il est non-nul. Donc  $\tilde{Q}$  et  $\tilde{R}$  n'ont pas de racine commune. Ce qui nous donne la contradiction voulue.

## Problème 9

Soit  $A$  un ensemble fini. Un mot fini sur  $A$  est une suite finie  $u = (u_n)_{1 \leq n \leq l}$  d'éléments de  $A$ ; on le note plus communément par concaténation  $u = u_1 \dots u_l$ . L'entier  $l$  est la longueur de  $u$ ; on la note  $|u|$ . Un mot infini sur  $A$  est une suite  $\mathbf{a} = (a_n)_{n \geq 1}$  avec  $a_n \in A$ . Un mot fini  $u$  est un facteur d'un mot (fini ou infini)  $v$  s'il existe un entier  $j$  tel que  $u = v_j \dots v_{j+|u|-1}$ .

Un mot infini  $\mathbf{a}$  est à lacunes bornées si pour tout facteur  $u$  de  $\mathbf{a}$ , il existe un entier  $l$  tel que pour tout facteur  $v$  de longueur  $l$  de  $\mathbf{a}$ ,  $u$  est un facteur de  $v$ .

Un mot infini  $\mathbf{a}$  est un  $T$ -mot s'il satisfait à la propriété suivante

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \forall k \in \mathbb{N}, a_{n+kp} = a_p.$$

Soient  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  deux mots infinis sur des alphabets  $A$  et  $B$  respectivement. Le produit de  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  est le mot infini  $\mathbf{c}$  sur l'alphabet  $A \times B$  tel que  $c_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que tout  $T$ -mot est à lacunes bornées.
2. Soit  $\mathbf{d}$  le mot infini défini par

$$d_n = \begin{cases} 1 & \text{si } s_2(n) \not\equiv s_2(n+1) \pmod{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $s_2(n)$  est la somme des chiffres de la représentation de  $n$  en base 2. Montrer que  $\mathbf{d}$  est un  $T$ -mot.

3. Montrer que si  $\mathbf{a} \in A^{\mathbb{N}}$  est un  $T$ -mot et si  $\mathbf{b} \in B^{\mathbb{N}}$  est à lacunes bornées, alors  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  est à lacunes bornées.

**Solution des auteurs :** 1. Soit  $\mathbf{a} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$  un  $T$ -mot et soit  $u = u_1 \dots u_\ell$  un facteur de  $\mathbf{a}$ . Il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $a_n a_{n+1} \dots a_{n+\ell-1} = u$ .

Le mot  $\mathbf{a}$  étant un  $T$ -mot, pour tout  $i \in \{n, n+1, \dots, n+\ell-1\}$ , il existe  $p_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  tel que

$$a_{i+kp_i} = a_i \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

On considère  $p = \text{ppcm}(\{p_n, p_{n+1}, \dots, p_{n+\ell-1}\})$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a donc

$$a_{n+kp} a_{n+kp+1} \dots a_{n+kp+\ell-1} = u.$$

Par conséquent, pour  $L = \max\{p, n\} + \ell$ , tout facteur de longueur  $L$  de  $\mathbf{a}$  contient une occurrence du mot  $u$ .

2. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , notons  $\text{rep}_2(n)$  le mot  $a_\ell a_{\ell-1} \dots a_0$  sur l'alphabet  $\{0, 1\}$  tel que  $a_\ell \neq 0$  et

$$n = \sum_{i=0}^{\ell} a_i 2^i.$$

Notons également  $\varepsilon$  l'unique mot de longueur 0; on a  $\text{rep}_2(0) = \varepsilon$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Notons  $k$  le plus grand entier tel que  $1^k$  est suffixe de  $\text{rep}_2(n)$ . On a donc  $\text{rep}_2(n) = 1^k$  ou  $\text{rep}_2(n) = u01^k$  pour un mot  $u$  sur  $\{0, 1\}$ . On a alors, respectivement,  $\text{rep}_2(n+1) = 10^k$  et  $\text{rep}_2(n+1) = u10^k$ . Par conséquent, on obtient

$$d_n = \begin{cases} 1, & \text{si } k \text{ est pair;} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Prenons alors  $p = 2^{k+1}$ , de sorte que  $\text{rep}_2(p) = 10^{k+1}$  et, pour tout entier  $m > 0$ ,  $0^{k+1}$  est suffixe de  $\text{rep}_2(mp)$ . Pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , il existe alors un mot  $v$  sur  $\{0, 1\}$  tel que  $\text{rep}_2(n+mp) = v10^k$ . On en déduit  $d_{n+mp} = d_n$  pour tout  $m \in \mathbb{N}$ .

3. Soit  $u = (v, w)$  un facteur de longueur  $\ell$  de  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ . Soit  $N \in \mathbb{N}$  la première position de  $u$  dans  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ , i.e.,  $N$  est le plus petit entier tel que

$$a_N a_{N+1} \cdots a_{N+\ell-1} = v \quad \text{et} \quad b_N b_{N+1} \cdots b_{N+\ell-1} = w.$$

Le mot  $\mathbf{b}$  étant un  $T$ -mot, les mêmes arguments que pour le point 1 montrent qu'il existe une constante  $p > 0$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$b_{N+np} b_{N+np+1} \cdots b_{N+np+\ell-1} = w.$$

On va montrer l'existence d'une constante  $K$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , si  $v$  apparaît dans  $\mathbf{a}$  à la position  $N + np$ , alors il existe  $0 < n' < K$  tel que  $v$  apparaît encore à une position  $N + np + n'p$ . Dans ce cas, le facteur  $u$  apparaît dans tout facteur de  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  de longueur  $|u| + \max\{N, Kp\}$ .

On définit le mot infini  $\mathbf{d} = (d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sur  $\{0, 1\}$  par

$$d_n = \begin{cases} 1, & \text{si } a_n \cdots a_{n+\ell-1} = v; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a  $d_N = 1$  et, le mot  $\mathbf{a}$  étant à lacunes bornées, le mot  $\mathbf{d}$  l'est également.

Considérons un entier  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $d_{N+np} = 1$ . Le mot  $\mathbf{d}$  étant à lacunes bornées, il existe une constante  $K(p)$  telle que tout facteur de  $\mathbf{d}$  de longueur  $p$  apparaît dans tout facteur de  $\mathbf{d}$  de longueur  $K(p)$ . Par conséquent, le facteur  $d_{[N+np, N+np+p-1]}$  apparaît au moins deux fois dans le facteur  $d_{[N+np, N+np+K(p)]}$ . En itérant cet argument, on construit une suite de mots  $u_0, u_1, \dots, u_p$  tels que

- $u_0 = d_{[N+np, N+np+p-1]}$ ;
- pour tout  $i \geq 1$ ,  $u_i$  est le plus petit préfixe de  $(d_{N+np+m})_{m \in \mathbb{N}}$  qui contient deux occurrences de  $u_{i-1}$ .

On définit également une suite de constantes  $K_0, K_1, \dots, K_p$  telles que

- $K_0 = p - 1$ ;
- pour tout  $i \geq 1$ ,  $K_i$  est le plus petit entier tel que tout facteur de longueur  $1 + K_{i-1}$  de  $\mathbf{d}$  apparaît dans tout facteur de longueur  $K_i$  de  $\mathbf{d}$ .

Observons que la suite de constantes  $K_0, K_1, \dots, K_p$  ne dépend pas de la suite de mots  $u_0, u_1, \dots, u_p$ , mais uniquement de  $p$ . Autrement dit, la constante  $K_p$  ne dépend pas de la position  $N + np$  initialement choisie. De plus, pour tout  $i \in \{0, 1, 2, \dots, p\}$ , le facteur  $u_i$  est de longueur au plus  $1 + K_i$ . En effet, le préfixe de longueur  $1 + K_i$  de  $(d_{N+np+m})_{m \in \mathbb{N}}$  contient au moins deux occurrences de  $u_{i-1}$  : une occurrence comme préfixe et une occurrence dans le facteur  $d_{[N+np+1, N+np+K_i]}$ .

Pour tous  $p \geq j \geq i \geq 0$ , notons  $m(i, j)$  le plus grand entier tel que

$$d_{[N+np+m(i,j), N+np+m(i,j)+|u_i|-1]} = u_i \quad \text{et} \quad m(i, j) + |u_i| \leq |u_j|.$$

Autrement dit,  $m(i, j)$  est la dernière position de  $u_i$  comme facteur du préfixe  $u_j$  de  $(d_{N+np+m})_{m \in \mathbb{N}}$ . Le mot  $u_i$  étant suffixe de  $u_j$  pour tous  $i \leq j$ , on a, pour tous  $k \leq i \leq j$ ,

$$m(k, j) = m(k, i) + m(i, j).$$

Par le principe des tiroirs, il existe  $0 \leq I < J \leq p$  tels que

$$m(0, I) \equiv m(0, J) \pmod{p}.$$

Par conséquent, on a, pour tout  $k \leq I$ ,

$$m(k, I) = m(0, I) - m(0, k) \quad \text{et} \quad m(k, J) = m(0, J) - m(0, k),$$

et donc

$$m(k, I) \equiv m(k, J) \pmod{p}.$$

En particulier, pour  $k = I$ , on a

$$0 = m(I, I) \equiv m(I, J) \pmod{p}.$$

Comme  $J > 0$ , on a  $m(I, J) = n'p$  pour un entier  $n' > 0$ . Par définition, le mot  $u_I$ , apparaît dans  $\mathbf{d}$  à la position  $N + np + n'p$  avec  $n'p \leq K_p$ .

On a donc montré que la constante  $K = K_p/p$  est telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , si  $d_N + np = 1$ , alors il existe un entier  $0 < n' \leq K$  tel que  $d_{N+np+n'p} = 1$ , ce qui conclut la preuve.

### Solution de l'équipe Team Parc :

#### Question 1

Soit  $\mathbf{a}$  un  $T$ -mot, et  $u = a_n a_{n+1} \cdots a_{n+r}$  un facteur de  $\mathbf{a}$ . Pour chaque  $i \in \llbracket 0, r \rrbracket$ , il existe un entier strictement positif  $p_i$  tel que, pour tout  $k_i \in \mathbb{N}$ , on ait  $a_{n+i+k_i p_i} = a_{n+i}$ . Posons  $p = \prod_{i=0}^r p_i$ . En particulier, en choisissant  $k_i = c \frac{p}{p_i}$ , où  $c$  est un entier positif arbitraire, on remarque que  $a_{n+i+cp} = a_{n+i}$  pour tout  $i \in \llbracket 0, r \rrbracket$ .

Posons  $l = n + p + r$ . Soit  $v$  un facteur de  $\mathbf{a}$  de longueur  $l$ , et montrons que  $u$  est un facteur de  $v$ . Tout d'abord, commençons par ignorer les  $n$  premières lettres de  $v$ , sur lesquelles on peut potentiellement n'avoir aucune information. On dispose d'un facteur de  $v$  de la forme  $a_{n+k_0} \cdots a_{n+k_0+p+r-1}$  pour un certain entier positif  $k_0$ . Parmi les  $p$  entiers  $\{k_0, k_0 + 1, \dots, k_0 + p - 1\}$ , notons  $k_1$  celui qui est divisible par  $p$ . De cette manière,  $a_{n+k_1} \cdots a_{n+r+k_1}$  est un facteur de  $v$ . En notant  $c$  l'entier positif tel que  $k_1 = cp$ , on remarque que :

$$a_{n+k_1} \cdots a_{n+r+k_1} = a_{n+cp} \cdots a_{n+r+cp} = a_n \cdots a_{n+r} = u.$$

En définitive,  $u$  est un facteur de  $v$ , ce qui prouve que  $\mathbf{a}$  est à lacunes bornées.

#### Question 2

Montrons tout d'abord que  $d_n = 1$  si et seulement si la représentation binaire de  $n$  se termine par un nombre pair de 1. Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $\overline{c_d c_{d-1} \cdots c_0}^2$  son écriture en base 2. On suppose qu'au moins un des chiffres est zéro, quitte à en rajouter un au début du nombre. Notons  $r$  l'indice du dernier zéro, de telle sorte que :

$$n = \overline{c_d \cdots c_{r+1} 0 \underbrace{1 \cdots 1}_{r \text{ chiffres "1"}}}^2.$$

On remarque que  $n + 1$  s'écrit :

$$n + 1 = \overline{c_d \cdots c_{r+1} 1 \underbrace{0 \cdots 0}_{r \text{ chiffres "0"}}}^2.$$

Il est alors clair que les sommes des chiffres de  $n$  et  $n + 1$  écrits en base 2 sont distinctes modulo 2 si et seulement si  $r$  est pair.

A présent, montrons que  $\mathbf{d}$  est un  $T$ -mot. Soit  $n \in \mathbb{N}$ , et posons  $p = 2(n + 1)$ . On va prouver que  $d_{n+kp} = d_n$  pour  $k \in \mathbb{N}$ . Sans prendre en compte les chiffres situés avant le dernier zéro, on écrit :

$$n = \overline{\cdots 0 \underbrace{1 \cdots 1}_{r \text{ chiffres "1"}}}^2.$$

On constate alors que, pour  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} n + kp &= n + 2k(n + 1) = \overline{\cdots 0 \underbrace{1 \cdots 1}_{r \text{ chiffres "1"}}}^2 + 2k \times \overline{\cdots 1 \underbrace{0 \cdots 0}_{r \text{ chiffres "0"}}}^2 \\ &= \overline{\cdots 0 \underbrace{1 \cdots 1}_{r \text{ chiffres "1"}}}^2 + k \times \overline{\cdots 1 \underbrace{0 \cdots 0}_{r+1 \text{ chiffres "0"}}}^2 \\ &= \overline{\cdots 0 \underbrace{1 \cdots 1}_{r \text{ chiffres "1"}}}^2 + \overline{\cdots 0 \underbrace{0 \cdots 0}_{r+1 \text{ chiffres "0"}}}^2 \\ &= \overline{\cdots 0 \underbrace{1 \cdots 1}_{r \text{ chiffres "1"}}}^2. \end{aligned}$$

Ainsi, le nombre de 1 à la fin de l'écriture binaire est le même pour  $n$  et pour  $n + kp$ , ce qui prouve que  $d_{n+kp} = d_n$ , et donc que  $\mathbf{d}$  est un  $T$ -mot.

### Question 3

Soit  $\mathbf{a} \in A^{\mathbb{N}}$  un  $T$ -mot et  $\mathbf{b} \in B^{\mathbb{N}}$  à lacunes bornées. Soit  $u = (a_n, b_n)(a_{n+1}, b_{n+1}) \cdots (a_{n+r}, b_{n+r})$  un facteur de  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ . On a prouvé à la question 1 l'existence d'un entier strictement positif  $p$  qui vérifie, pour tout entier naturel  $k$  :

$$a_{n+kp} \cdots a_{n+r+kp} = a_n \cdots a_{n+r}.$$

Notons  $P$  l'ensemble des classes  $\omega \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  pour lesquelles il existe un indice  $i \geq n$  dont la classe est  $\omega$  et qui vérifie  $b_i \cdots b_{i+r} = b_n \cdots b_{n+r}$ . En particulier,  $\bar{n} \in P$ . Notons  $m$  le cardinal de  $P$ . On choisit  $m$  indices de classes distinctes  $n = i_0 < \cdots < i_{m-1}$  tels que, pour chaque  $j \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$  :

$$b_{i_j} \cdots b_{i_j+r} = b_n \cdots b_{n+r}.$$

De cette façon,  $\{\overline{i_0}, \cdots, \overline{i_{m-1}}\} = P$ .

Puisque  $\mathbf{b}$  est à lacunes bornées, il existe  $l_0 \in \mathbb{N}$  tel que tout facteur de longueur  $l_0$  de  $\mathbf{b}$  admette  $b_{i_0} b_{i_0+1} \cdots b_{i_{m-1}+r}$  comme facteur. Posons  $l = n + l_0$  et considérons un facteur  $v$  de longueur  $l$  de  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ . Nous allons montrer que  $u$  est un facteur de  $v$ . En premier lieu, ignorons les  $n$  premières lettres de  $v$ . On obtient un facteur de  $v$  de longueur  $l_0$ . Il existe donc un entier positif  $d$  tel que :

$$b_{i_0+d} \cdots b_{i_{m-1}+r+d} = b_{i_0} \cdots b_{i_{m-1}+r},$$

où  $(a_{i_0+d}, b_{i_0+d}) \cdots (a_{i_{m-1}+r+d}, b_{i_{m-1}+r+d})$  est un facteur de  $v$ .

Remarquons que  $\{\overline{i_0+d}, \overline{i_1+d}, \cdots, \overline{i_{m-1}+d}\} = P$ . En effet, l'égalité ci-dessus indique que, pour  $j \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$  :

$$b_{i_j+d} \cdots b_{i_j+r+d} = b_{i_j} \cdots b_{i_j+r},$$

qui est égal, par définition, à  $b_n \cdots b_{n+r}$ . Ainsi,  $\overline{i_j+d} \in P$ , ce qui montre que  $\{\overline{i_0+d}, \overline{i_1+d}, \cdots, \overline{i_{m-1}+d}\} \subset P$ . L'inclusion réciproque est alors automatique par cardinalité.

Puisque  $\bar{n} \in P$ , on déduit de l'égalité précédente qu'il existe  $j \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$  tel que  $\overline{i_j+d} = \bar{n}$ . Notons  $k$  l'entier positif vérifiant  $i_j + d = n + kp$ . On remarque alors que, d'une part :

$$a_{i_j+d} \cdots a_{i_j+r+d} = a_{n+kp} \cdots a_{n+r+kp} = a_n \cdots a_{n+r},$$

et que d'autre part :

$$b_{i_j+d} \cdots b_{i_j+r+d} = b_n \cdots b_{n+r}.$$

En définitive, on trouve :

$$(a_{i_j+d}, b_{i_j+d}) \cdots (a_{i_j+r+d}, b_{i_j+r+d}) = u,$$

où  $(a_{i_j+d}, b_{i_j+d}) \cdots (a_{i_j+r+d}, b_{i_j+r+d})$  est un facteur de  $v$ . Cela prouve que  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  est à lacunes bornées.

## Problème 10

Peut-on trouver une configuration finie de points blancs et noirs dans  $\mathbb{R}^2$  telle que les propriétés suivantes soient vérifiées ?

1. Pour tout point blanc, il y a exactement 10 points noirs qui se trouvent à distance 1 de ce point.
2. Le nombre de points blancs est strictement supérieur au nombre de points noirs.

**Solution de l'auteur :** Oui, une telle configuration existe.

Pour chaque configuration finie  $C$  de points blancs et de points noirs dans  $\mathbb{R}^2$ , on va s'intéresser au rapport  $r(C)$  entre le nombre de points blancs de  $C$  et le nombre de points noirs de  $C$ .

Soit  $C$  une configuration finie de points blancs et de points noirs dans  $\mathbb{R}^2$  telle que  $C$  vérifie la première condition imposée. (Par exemple, on peut prendre pour  $C$  une configuration  $C_1$  formée par un point blanc et 10 points noirs à la distance 1 de ce point blanc ; on a  $r(C_1) = \frac{1}{10}$ .) Considérons une collection générique  $v_1, \dots, v_{10}$  de vecteurs de longueur 1 de  $\mathbb{R}^2$  (la notion de généricité sera précisée ci-dessous) et construisons une nouvelle configuration  $C'$  de la façon suivante :

- pour tout point blanc  $P \in C$ , considérons 10 points blancs

$$P, t_{v_2-v_1}(P), \dots, t_{v_{10}-v_1}(P),$$

où  $t_v$  est la translation de vecteur  $v$  ;

- pour tout point noir  $Q \in C$ , considérons 10 points noirs

$$Q, t_{v_2-v_1}(Q), \dots, t_{v_{10}-v_1}(Q),$$

et un point blanc supplémentaire qui est le centre du cercle ayant le rayon 1 et contenant les points  $Q, t_{v_2-v_1}(Q), \dots, t_{v_{10}-v_1}(Q)$ .

La nouvelle configuration  $C'$  vérifie la première propriété imposée (par construction, pour tout point blanc de  $C'$ , il y a au moins 10 points noirs qui se trouvent à la distance 1 de ce point, et la généricité des vecteurs choisis  $v_1, \dots, v_{10}$  assure que, pour tout point blanc de  $C'$ , le nombre de points noirs qui se trouvent à la distance 1 de ce point est exactement égal à 10).

De plus,  $r(C') = r(C) + \frac{1}{10}$ . Donc, en répétant 10 fois cette construction (en commençant, par exemple, par la configuration  $C_1$ ), on obtient une configuration qui vérifie les deux conditions imposées.

**Ce problème a été traité par plusieurs équipes ; le jury a considéré que parmi les solutions correctes proposées par les équipes, aucune ne se distinguait particulièrement.**