Séminaire BOURBAKI Novembre 2016
69e année, 2016–2017, nº 1123, p. 91 à 116
doi:10.24033/ast.1061

PROGRÈS EN IRRATIONALITÉ
[d'après C. Voisin, J.-L. Colliot-Thélène, B. Hassett, A. Kresch, A. Pirutka, B. Totaro, Y. Tschinkel *et al.*]

par **Emmanuel PEYRE**

1. RATIONALITÉ ET IRRATIONALITÉ

1.1. Notions de rationalité

À la base, les questions de rationalité concernent la possibilité de paramétrer les solutions d'équations polynomiales en plusieurs variables à l'aide de fonctions rationnelles. Considérons par exemple la lemniscate de Bernoulli d'équation

$$(X^2+Y^2)^2-X^2+Y^2=0. \tag{1}$$

Pour tout nombre réel t, le cercle de centre $(t/2,t/2)$ et passant par $(0,0)$ rencontre la courbe en le point de coordonnées $(0,0)$ et le point

$$M_t=\left(\frac{t(1+t^2)}{1+t^4},\frac{t(1-t^2)}{1+t^4}\right)$$

et l'application φ donnée par $t\mapsto M_t$ définit une bijection de $\mathbf{R}$ sur les points de la courbe d'équation (1). Ce paramétrage permet en particulier de décrire explicitement l'ensemble des solutions à coordonnées rationnelles de l'équation (1). En effet, l'application réciproque de φ est donnée par

$$\varphi^{-1}(x,y)=\frac{x^2+y^2}{x+y}$$

pour tout point (x,y) de la lemniscate distinct de l'origine et $\varphi^{-1}(0,0)=0$, si bien que l'image par φ d'un nombre réel t a des coordonnées rationnelles si et seulement si t est lui-même un nombre rationnel.

En dimension supérieure, il convient de préciser le type de paramétrage recherché. Considérons l'exemple suivant, dû à M. Ojanguren. On considère la surface de

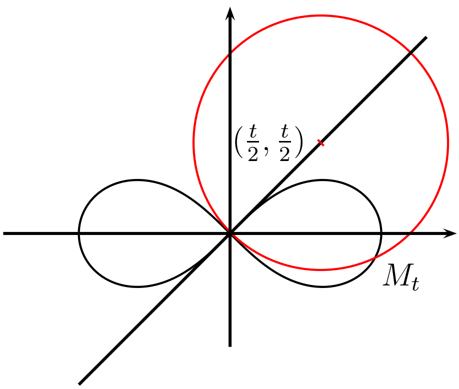

FIGURE 1. Lemniscate de Bernoulli

Châtelet S d'équation

$$Y^2 + Z^2 = 2X(X^2 - 3). \tag{2}$$

Le plan H d'équation $Z = 2$ est tangent à la surface en le point $P_0 = (-1, 0, 2)$. Les droites de H d'équation $Y = s(X + 1)$ rencontrent la surface S en P_0 et en le point $M_s = \frac{1}{2}(s^2 + 4, s^3 + 6s)$. Comme la surface est une surface de révolution autour de l'axe des X, il suffit de choisir un paramétrage du cercle unité tel que $t \mapsto \left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)$ pour obtenir une application φ

$$(s, t) \longmapsto \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2t}{1+t^2} & \frac{-1+t^2}{1+t^2} \\ 0 & \frac{1-t^2}{1+t^2} & \frac{2t}{1+t^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s^2 + 4 \\ s^3 + 6s \\ 4 \end{pmatrix}$$

qui envoie les points de $\mathbf{R}^2$ dans les points réels de S. Cela permet par exemple de trouver certaines des solutions rationnelles de l'équation ou d'exhiber des courbes paramétrées par des fonctions rationnelles contenues dans la surface (figure 2). Cette

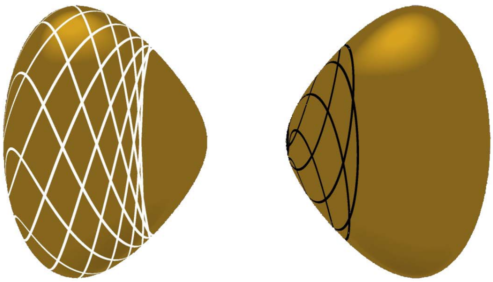

FIGURE 2. Surface de Châtelet

application n'est cependant ni injective ni surjective. En effet, soit $P = (x, y, z)$ une solution de l'équation (2). Si $x > 2$, le point P a deux antécédents par φ, il en a un si $x = 2$ et aucun si $x < 2$. En fait, il n'est pas possible de trouver des applications rationnelles induisant une bijection ψ d'un ouvert dense U de $\mathbf{R}^2$ sur un ouvert dense de la surface. En effet, notons $\widetilde{S}$ une compactification projective et lisse de S. Étant donnés deux points distincts P et Q de U la restriction de ψ à l'intersection $U \cap (PQ)$ s'étend en un morphisme de la droite projective sur $\mathbf{R}$ dans $\widetilde{S}$. Il en résulte que l'image de ψ est contenue dans une des deux composantes connexes de $\tilde{S}$.

D'un point de vue plus algébrique, l'application φ induit un morphisme du corps $\mathbf{K} = \mathbf{R}(X, Y)[Z]/(Y^2 + Z^2 - 2X(X^2 - 3))$ dans le corps $\mathbf{R}(s, t)$, définissant ainsi une extension de corps de degré 2, mais la $\mathbf{R}$-algèbre $\mathbf{K}$ n'est pas isomorphe à $\mathbf{R}(s, t)$.

Dans la suite de cet exposé, une variété est supposée irréductible et une *belle* variété sur un corps $\mathbf{K}$ est une variété projective, lisse et géométriquement intègre sur $\mathbf{K}$.

DÉFINITIONS 1.1. — *Soit V une belle variété sur un corps $\mathbf{K}$. Soit $\mathbf{K}(V)$ le corps des fonctions de V. La variété V est dite*

a) $\mathbf{K}$-rationnelle *s'il existe un entier n et un isomorphisme de $\mathbf{K}$-algèbres du corps $\mathbf{K}(V)$ sur le corps $\mathbf{K}(T_1, \ldots, T_n)$;*
b) $\mathbf{K}$-stablement rationnelle *s'il existe des entiers m et n et un isomorphisme de $\mathbf{K}$-algèbres du corps $\mathbf{K}(V)(X_1, \ldots, X_m)$ sur le corps $\mathbf{K}(T_1, \ldots, T_n)$;*
c) $\mathbf{K}$-rétractilement rationnelle *s'il existe un ouvert dense U de V, un ouvert W d'un espace projectif $\mathbf{P}^n_{\mathbf{K}}$ et des morphismes de variétés $f : U \to W$ et $g : W \to U$ de sorte que la composée $g \circ f$ soit l'application identité de U.*
d) $\mathbf{K}$-unirationnelle *s'il existe un entier n et un morphisme de $\mathbf{K}$-algèbres du corps $\mathbf{K}(V)$ dans $\mathbf{K}(T_1, \ldots, T_n)$;*
e) Rationnellement connexe par chaînes *si pour toute extension $\mathbf{L}$ de $\mathbf{K}$ qui est algébriquement close, deux points de $V(\mathbf{L})$ peuvent être reliés par une chaîne de courbes rationnelles.*

On peut démontrer les implications suivantes :

$$\text{a)} \implies \text{b)} \implies \text{c)} \implies \text{d)} \implies \text{e)}.$$

Si V est de dimension 1 et possède un point rationnel, le théorème de Lüroth [**33**] implique l'équivalence entre ces cinq conditions. Sur le corps des nombres complexes $\mathbf{C}$, il résulte du théorème de G. Castelnuovo [**9**] que toutes ces implications sont des équivalences lorsque la variété V est de dimension 2 (cf. [**24**, §1.4]). Par exemple, la surface de Châtelet ci-dessus devient rationnelle lorsqu'on étend les scalaires à $\mathbf{C}$.

En dimension supérieure, des contre-exemples sont connus pour la réciproque de chacune des implications a) $\Rightarrow$ b) et c) $\Rightarrow$ d), y compris sur le corps des nombres complexes. Ainsi M. Artin et D. Mumford donnent dans [**1**] un exemple de variété unirationnelle V sur $\mathbf{C}$ qui n'est pas rationnelle en utilisant comme invariant le sous-groupe de torsion du groupe de cohomologie singulière $H^3(V(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$, résultat qui fit l'objet d'un exposé dans ce séminaire par P. Deligne [**18**]. Comme la non-trivialité de ce sous-groupe de torsion est en fait une obstruction à la rationalité rétractile, la variété qu'ils considèrent n'est pas rétractilement rationnelle. À la même époque, Yu. Manin et V. A. Iskovskikh donnaient dans [**30**] une famille d'exemples de variétés unirationnelles non rationnelles reposant sur le groupe des automorphismes birationnels et C. H. Clemens et F. A. Griffiths dans [**11**] donnaient un autre exemple d'une telle variété mais en utilisant la jacobienne intermédiaire. Pour la réciproque de l'implication a) $\Rightarrow$ b), le premier contre-exemple est dû à A. Beauville, J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc et P. Swinnerton-Dyer [**4**] et repose également sur le calcul de la jacobienne intermédiaire. Il fut présenté dans ce séminaire par L. Moret-Bailly [**35**].

L'orateur ne connaît pas à l'heure actuelle de contre-exemples à la réciproque des implications b) $\Rightarrow$ c) ou d) $\Rightarrow$ e) sur le corps des nombres complexes. Sur un corps qui n'est pas algébriquement clos, les tores algébriques fournissent des exemples de variétés rétractilement rationnelles qui ne sont pas stablement rationnelles : [**16**] et [**29**].

Toutes les obstructions à la rationalité stable utilisées dans la suite de cet exposé sont en fait des obstructions à la rationalité rétractile. Le terme stable peut donc être remplacé par rétractile à chacune de ses occurrences.

L'objectif de cet exposé est de présenter une technique récente introduite dans l'article [**46**] de C. Voisin ainsi que des variantes de cette technique qui permettent de démontrer que « la plupart » des membres de diverses familles classiques de variétés ne sont pas stablement rationnels.

D'autre part, il est naturel de s'interroger sur le lien entre déformation des variétés et rationalité. L'exposé de J-P. Serre de février 1957 [**41**] reprend l'interprétation de K. Kodaira du critère de rationalité de Castelnuovo pour les surfaces algébriques complexes. Il en résulte que la rationalité est préservée dans les familles lisses en dimension $\leqslant 2$. Les techniques présentées ici permettent en particulier de construire des familles de variétés projectives et lisses de dimension $\geqslant 4$ telles que le lieu des fibres rationnelles ne soit ni ouvert ni fermé.

À tous les collègues, en particulier A. Chambert-Loir, J.-L. Colliot-Thélène, S. Druel, A. Pirutka et Y. Tschinkel, qui ont relu ce texte dans un délai extrêmement court, je présente à la fois mes remerciements les plus vifs pour les suggestions qu'ils m'ont faites et mes regrets de n'avoir pas été capable de corriger l'ensemble des défauts qu'ils m'ont signalés. Je remercie également les participants au groupe de travail sur la décomposition de la diagonale qui eut lieu à l'université de Pékin en juillet 2016 pour leurs présentations qui m'ont aidé pour la préparation de cet exposé.

1.2. Invariants cohomologiques

Avant d'entrer dans le vif du sujet, faisons une digression sur une classe d'invariants qui généralise l'invariant utilisé par Artin et Mumford, à savoir le sous-groupe de torsion de $H^3(V(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$. En un sens, l'obstruction à la stable rationalité considérée par la suite, à savoir la décomposition de Chow de la diagonale, peut être vue comme un avatar universel de ces invariants.

Dans [**13**], J.-L. Colliot-Thélène et M. Ojanguren ont introduit une famille d'invariants birationnels, les groupes de cohomologie non ramifiée. Pour comprendre la construction de ces groupes, on peut penser à la description des fonctions inversibles sur une variété comme l'ensemble des éléments du corps des fonctions qui n'ont ni pôles ni zéros : de façon imagée, une classe de cohomologie non ramifiée est une classe dans le groupe de cohomologie galoisienne du corps de fonctions de la variété qui « n'a ni pôles ni zéros ».

Un cadre général pour les invariants non ramifiés est décrit par J.-L. Colliot-Thélène dans [**12**], nous nous placerons ici dans le cadre des modules de cycles définis par M. Rost dans [**39**]. Rappelons que pour tout corps $\mathbf{L}$, l'anneau de K-théorie de Milnor est l'anneau gradué $K^*_{\mathrm{M}}(\mathbf{L})$ quotient de la $\mathbf{Z}$-algèbre tensorielle $T_{\mathbf{Z}}(\mathbf{L}^*)$ par l'idéal bilatère engendré par les éléments de la forme $x \otimes (1 - x)$ pour $x \in \mathbf{L} \setminus \{0, 1\}$. Étant donné un schéma S sur un corps $\mathbf{K}$, on peut considérer la catégorie $\mathscr{F}(S)$ des corps $\mathbf{L}$ munis d'un morphisme $\mathrm{Spec}(\mathbf{L}) \to S$. Une valuation v au-dessus de S est un morphisme de $\mathbf{K}$-schémas $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_v) \to S$ où $\mathscr{O}_v$ est un anneau local de type géométrique sur $\mathbf{K}$, c'est-à-dire obtenu en localisant une algèbre intègre de type fini sur $\mathbf{K}$ en un point régulier de codimension 1. Une théorie de modules de cycles sur S est alors un foncteur covariant M^* de la catégorie $\mathscr{F}(S)$ dans la catégorie des $\mathbf{Z}$-modules gradués, muni des structures suivantes :

(i) À tout morphisme $\varphi : \mathbf{L} \to \mathbf{L}'$ de $\mathscr{F}(S)$ correspondant à une extension finie de corps est associé un morphisme de corestriction $M^*(\mathbf{L}') \to M^*(\mathbf{L})$;

(ii) Pour tout objet $\mathbf{L}$ de $\mathscr{F}(S)$, le groupe gradué $M^*(\mathbf{L})$ est muni d'une structure de $K^*_{\mathrm{M}}(\mathbf{L})$-module gradué ;

(iii) Pour toute valuation v au-dessus de S, on dispose de morphismes de résidu de degré -1 :
$$M^i(\mathrm{Fr}(\mathscr{O}_v)) \xrightarrow{\partial_v} M^{i-1}(\kappa_v),$$
où $\mathrm{Fr}(\mathscr{O}_v)$ désigne le corps des fractions de l'anneau local $\mathscr{O}_v$ et κ_v son corps résiduel.

Ces différentes structures doivent satisfaire en outre diverses conditions, notamment de compatibilité, que nous ne détaillerons point ici [**39**, pp. 329 et 337]. Soit $\mathbf{K}$ un corps. Étant donné une théorie de modules de cycles M^* sur $\mathbf{K}$, le groupe non ramifié