Bull. Soc. Math. France
147 (1), 2019, p. 123-157

SUR CERTAINS ESPACES DE CONFIGURATION ASSOCIÉS AUX SOUS-GROUPES FINIS DE $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$

PAR MOHAMAD MAASSARANI

RÉSUMÉ. — On étudie des espaces de configuration $\mathrm{Cf}_G(n, \mathbb{P}^1_*)$ liés à l'action d'un groupe fini d'homographies G de $\mathbb{P}^1$ ($n \in \mathbb{N}^*$). On construit une connexion plate sur cet espace à valeurs dans une algèbre de Lie $\hat{\mathfrak{p}}_n(G)$. On établit un isomorphisme d'algèbres de Lie filtrées entre $\hat{\mathfrak{p}}_n(G)$, l'algèbre de Lie de Malcev du groupe fondamental de cet espace et le complété pour le degré du gradué associé à cette algèbre de Lie. Ceci est obtenu grâce à la représentation de monodromie d'une connexion et une étude du groupe fondamental.

ABSTRACT (*On orbit configuration spaces associated to finite subgroups of* $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$). — We study the configuration spaces $\mathrm{Cf}_G(n, \mathbb{P}^1_*)$ related to the action of a finite group of homographies G of $\mathbb{P}^1$ ($n \in \mathbb{N}^*$). We construct a flat connexion on this space with values in a Lie algebra $\hat{\mathfrak{p}}_n(G)$. We prove the existence of an isomorphism of filtered Lie algebras between $\hat{\mathfrak{p}}_n(G)$ and the Lie algebra of Malcev of the fundamental group of this space. There results are obtained thanks to the monodromy representation of a connexion and a study of the fundamental group.

Texte reçu le 2 novembre 2016, modifié le 20 juillet 2017, accepté le 12 octobre 2017.

MOHAMAD MAASSARANI, IRMA, Université de Strasbourg, 7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg, France • *E-mail :* `Mohamad_maassarani1989@hotmail.com` • *Url :* `https://irma.math.unistra.fr/php/home.php?qui=maassarani`

Classification mathématique par sujets (2010). — 55R80, 20F40, 35R11, 14F35, 20F36, 55P62, 32G34.

Mots clefs. — Espaces de configuration tordus, relations entre tresses, connexions de type Knizhnik-Zamolodochikov, algèbres de Lie de Malcev, 1-formalité.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037-9484/2019/123/$ 5.00
© Société Mathématique de France
doi:10.24033/bsmf2777

Introduction

L'un des invariants associés à un espace topologique X en homotopie rationnelle est son modèle minimal. Le calcul du modèle minimal de X, plus précisément du 1-modèle minimal, permet d'obtenir l'algèbre de Lie de Malcev de $\pi_1(X)$, le groupe fondamental de X, par un processus de dualisation. Dans [10], Fulton et MacPherson calculent explicitement des modèles des espaces de configuration $\mathrm{Cf}_n(X) = \{(p_1, \cdots, p_n) \in X^n | p_i \neq p_j \text{ si } i \neq j\}$, pour X une variété projective complexe lisse. Ces modèles sont ensuite simplifiés dans [13], puis utilisés par Bezrukavnikov ([2]) qui obtient une présentation de l'algèbre de Lie $\mathrm{Lie}(\pi_1(\mathrm{Cf}_n(S))$ de Malcev de $\pi_1(\mathrm{Cf}_n(S))$ pour S une surface de genre supérieur à un.

Une approche alternative, motivée par [6], repose sur l'utilisation de connexions plates et d'informations sur le groupe fondamental. En utilisant cette approche, différents résultats sont obtenus :

1. calcul de l'algèbre de Lie de Malcev de $\mathrm{Cf}_n(S)$ pour S de genre $g(S) = 1$ ([3]) puis en genre $g(S) > 1$ ([9]) ; ce qui donne une autre démonstration aux présentations obtenues par Bezrukavnikov.
2. calcul de l'algèbre de Lie de Malcev d'"espaces de configuration d'orbites", au sens de [5], pour les groupes des racines de l'unité opérant sur $\mathbb{C}^\times$ ([7]).

Dans ce papier, on considère plus généralement G un groupe fini d'homographies agissant sur la droite projective complexe $\mathbb{P}^1$ (vue comme variété analytique) et l'espace associé :

$$\mathrm{Cf}_G(n, \mathbb{P}^1_*) = \{(p_1, \cdots, p_n) \in (\mathbb{P}^1_*)^n | p_i \neq g \cdot p_j; \text{ pour } i \neq j \text{ et } g \in G\},$$

dans lequel $\mathbb{P}^1_*$ est l'ensemble des points de $\mathbb{P}^1$ à stabilisateur trivial pour G. En utilisant la méthode des connexions plates, on calcule une présentation de l'algèbre de Lie de Malcev de $\pi_1(\mathrm{Cf}_G(n, \mathbb{P}^1_*))$ et on montre (théorème 6.8) que cette algèbre de Lie est isomorphe à la complétion pour le degré de son gradué associé qui coïncide avec une algèbre de Lie explicite $\hat{\mathfrak{p}}_n(G)$ (définition 1.2). On obtient par ailleurs la 1-formalité de $\mathrm{Cf}_G(n, \mathbb{P}^1_*)$.

Détaillons les étapes permettant d'obtenir ce résultat. Dans la première section, on définit une algèbre de Lie $\mathfrak{p}_n(G)$, puis on construit une connexion plate sur $\mathrm{Cf}_G(n, \mathbb{P}^1_*)$ à valeurs dans $\mathfrak{p}_n(G)$. Cette connexion nous donne une représentation de monodromie $\rho_{\underline{\tilde{q}}} : \pi_1(\mathrm{Cf}_G(n, \mathbb{P}^1_*)) \longrightarrow \mathcal{G}(\mathrm{U}\mathfrak{p}_n(G)(\mathbb{C}))$, où $\mathcal{G}$ est le foncteur qui à une algèbre de Hopf associe le groupe de ses éléments diagonaux.

On rappelle en section 2 quelques notions de topologie différentielle qui seront utilisées dans la section 3, laquelle est consacrée à l'étude du groupe fondamental d'un espace de configuration d'orbites associé à une surface munie d'une action d'un groupe fini. Dans cette section, on donne notamment une famille génératrice de $\Gamma_n := \pi_1(\mathrm{Cf}_G(n, \mathbb{P}^1_*))$ et des relations entre ces éléments de Γ_n.

La quatrième section est consacrée à des rappels de notions liées aux algèbres de Lie de Malcev et aux algèbres de Hopf complètes.

Dans la section 5, on utilise le morphisme de monodromie de la section 1 pour construire un morphisme $\mathrm{L}_{2i\pi,\rho}$ de l'algèbre de Lie de Malcev $\mathrm{Lie}(\Gamma_n(\mathbb{C}))$ de Γ_n sur $\mathbb{C}$ dans $\widehat{\mathfrak{p}}_n(G)(\mathbb{C})$. D'autre part, on obtient grâce aux générateurs et relations de Γ_n un morphisme $\phi_{\mathbb{C}} : \widehat{\mathfrak{p}}_n(G)(\mathbb{C}) \to \widehat{\mathrm{gr}}\mathrm{Lie}(\Gamma_n(\mathbb{C}))$, où l'espace d'arrivée est le complété pour le degré du gradué associé de $\mathrm{Lie}(\Gamma_n(\mathbb{C}))$. En examinant la composée de $\mathrm{L}_{2i\pi,\rho}$ avec $\phi_{\mathbb{C}}$, on conclut que les trois algèbres de Lie $\mathrm{Lie}(\Gamma_n(\mathbb{C}))$, $\widehat{\mathrm{gr}}\mathrm{Lie}(\Gamma_n(\mathbb{C}))$ et $\widehat{\mathfrak{p}}_n(G)(\mathbb{C})$ sont isomorphes en tant qu'algèbres de Lie filtrées.

Enfin, la dernière section, on construit des torseurs dont la composée $\phi_{\mathbb{C}} \circ \mathrm{L}_{2i\pi,\rho}$ de la section 5 est un point complexe. Ensuite, on utilise un résultat sur l'existence de points rationnels de ces torseurs pour déduire que $\mathrm{Lie}(\Gamma_n(\mathbb{Q}))$, $\widehat{\mathrm{gr}}\mathrm{Lie}(\Gamma_n(\mathbb{Q}))$ et $\widehat{\mathfrak{p}}_n(G)(\mathbb{Q})$ sont isomorphes comme algèbres de Lie filtrées.

Notons que la 1-formalité des espaces $\mathrm{Cf}_G(n, \mathbb{P}^1_*)$ est également une conséquence du résultat principal de [12], et dans le cas où G est un groupe de racines de l'unité, une présentation de l'algèbre d'holonomie peut également être déduite de ce résultat.

1. Connexion sur l'espace de configuration $\mathrm{Cf}_G(n, \mathbb{P}^1_*)$ et représentation de monodromie.

Dans cette section, on considère une action d'un groupe fini G sur $\mathbb{P}^1$ (section 1.1). On lui associe un espace de configuration $\mathrm{Cf}_G(n, \mathbb{P}^1_*)$ (section 4) et une algèbre de Lie $\mathfrak{p}_n(G)$ (section 1.2). Après des rappels sur les connexions formelles (section 1.3), on définit une telle structure sur $\mathrm{Cf}_G(n, \mathbb{P}^1_*)$ associée à l'algèbre de Lie $\mathfrak{p}_n(G)$ (section 1.4) et on montre sa platitude (section 1.5). On calcule alors les termes de bas degré de la représentation de monodromie associée (section 1.6).

1.1. Le groupe G opérant sur $\mathbb{P}^1$.

1.1.1. *Action de G sur $\mathbb{P}^1$.* — On a la suite de morphismes de groupes suivante :

$$\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{PSU}_2(\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$$

Par ailleurs, on a une action $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ par homographies et une action $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \to \mathrm{Aut}(S^2)$ par rotations. Enfin, il existe un identification $\mathbb{P}^1 \simeq S^2$ compatible aux actions. L'action de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ sur S^2 commute à l'antipode. De façon analogue, l'action de $\mathrm{PSU}_2(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{P}^1$ commute à l'involution $z \mapsto \mathrm{at}(z) := \frac{-1}{\bar{z}}$. Dans la suite, on fixe un sous-groupe fini G de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$. Le groupe G est conjugué dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ à un sous-groupe fini de $\mathrm{PSU}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$. On sait donc que G est soit cyclique ou diédral, soit isomorphe à un des groupes d'isométries des solides platoniciens $\mathfrak{A}_4$, $\mathfrak{S}_4$, $\mathfrak{A}_5$.

1.1.2. *Points fixes et stabilisateurs.* — On note $\mathbb{P}^1_*$ l'ensemble des points de $\mathbb{P}^1$ à stabilisateur trivial pour G.

Proposition 1.1. — *Pour tout $g \in G$ et $p \in \mathbb{P}^1$, on pose* $\mathrm{Fix}(g) = \{q \in \mathbb{P}^1 \mid g \cdot q = q\}$ *et on note* $\mathrm{stab}(p)$ *le stabilisateur de p pour l'action de G sur $\mathbb{P}^1$. Alors :*

1. *L'application* at *se restreint en une involution de $\mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}^1_*$. Pour tout $g \neq 1$,* $\mathrm{Fix}(g)$ *est de la forme* $\{p, \mathrm{at}(p)\}$ *avec* $p \neq \mathrm{at}(p)$.
2. *Il existe un sous-ensemble fini Z de $\mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}^1_*$ satisfaisant $\mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}^1_* = Z \sqcup \mathrm{at}(Z)$ et $G \setminus \{1\} = \bigsqcup_{p \in Z} (\mathrm{stab}(p) \setminus \{1\})$.*

Démonstration. — Il suffit de montrer la proposition pour G un groupe fini de rotations de la sphère. Dans ce cadre, l'application at n'est autre que l'antipode de S^2. Ce qui montre (1). L'existence d'un Z fini satisfaisant $\mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}^1_* = Z \sqcup \mathrm{at}(Z)$ est immédiate à partir de (1). Un tel ensemble satisfait automatiquement la dernière condition de (2). En effet, si l'intersection $\mathrm{stab}(p) \cap \mathrm{stab}(q)$ pour $p \neq q$ est différente de $\{1\}$, alors (1) nous mène à la contradiction $q \in \{p, \mathrm{at}(p)\}$. Ce qui montre la proposition. $\square$

1.2. L'algèbre de Lie $\mathfrak{p}_n(G)$. — Soit n un entier strictement positif et $\Bbbk$ un corps. On note $\mathcal{O}(p)$ l'orbite pour G d'un point $p \in \mathbb{P}^1$.

Définition 1.2. — *On définit $\mathfrak{p}_n(G)(\Bbbk)$ comme la $\Bbbk$-algèbre de Lie engendrée par les éléments $X_{ij}(g)$, pour $i \neq j \in [1,n]$ et $g \in G$, les $X_i(q)$ pour $i \in [1,n]$ et $q \in \mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}^1_*$, soumis aux relations :*

$$X_{ij}(g) = X_{ji}(g^{-1}), \text{ pour } i,j \in [1,n] \text{ distincts et } g \in G, \tag{1}$$

$$\sum_{q \in \mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}^1_*} X_i(q) + \sum_{\substack{m \in [1,n] \\ m \neq i}} \sum_{g \in G} X_{im}(g) = 0, \text{ pour } i \in [1,n], \tag{2}$$

$$[X_{ij}(g), X_{kl}(g')] = 0, \text{ pour } i,j,k,l \in [1,n] \text{ distincts et } g, g' \in G, \tag{3}$$

$$[X_{ij}(g), X_{kj}(g'g) + X_{ki}(g')] = [X_i(p), X_{jk}(g')] = 0,$$
$$\text{pour } i,j,k \in [1,n] \text{ distincts,}$$

$$p \in \mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}^1_* \text{ et } g, g' \in G, \tag{4}$$

$$[X_i(p), X_j(q)] = 0, \tag{5}$$

$$\left[X_{ij}(g), X_j(p) + X_i(g \cdot p) + \sum_{h \in \mathrm{stab}(p)} X_{ij}(gh)\right] = 0, \tag{6}$$

$$\left[X_j(p), X_i(g\cdot p) + \sum_{h\in \mathrm{stab}(p)} X_{ij}(gh)\right] = 0, \tag{7}$$

pour $i,j \in [1,n]$ *distincts,* $g \in G$*,* $p \in \mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}^1_*$ *et* $q \in (\mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}^1_*) \setminus \mathcal{O}(p)$*.*

L'algèbre $\mathfrak{p}_n(G)(\Bbbk)$ est munie d'une graduation pour laquelle chaque générateur $X_{ij}(g)$ et $X_i(q)$ est de degré 1. On a :

$$\mathfrak{p}_n(G)(\Bbbk) = \bigoplus_{k>0} \mathfrak{p}_n^k(G)(\Bbbk),$$

où $\mathfrak{p}_n^k(G)(\Bbbk)$ est la composante homogène de degré k. On note $\hat{\mathfrak{p}}_n(G)(\Bbbk)$ la complétion de $\mathfrak{p}_n(G)(\Bbbk)$ pour le degré.

D'autre part, l'algèbre enveloppante $\mathrm{U}\mathfrak{p}_n(G)(\Bbbk)$ de $\mathfrak{p}_n(G)(\Bbbk)$, hérite de $\mathfrak{p}_n(G)(\Bbbk)$ une structure d'algèbre graduée pour le degré. On note $\widehat{\mathrm{U}}\mathfrak{p}_n(G)(\Bbbk)$ la complétion de cette algèbre enveloppante pour le degré. L'algèbre $\mathfrak{p}_n(G)(\Bbbk)$ étant engendrée en degré un, la complétion de $\mathrm{U}\mathfrak{p}_n(G)(\Bbbk)$ pour le degré et la complétion pour les puissances de l'idéal d'augmentation coïncident. Enfin, $\widehat{\mathrm{U}}\mathfrak{p}_n(G)(\Bbbk)$ est une algèbre de Hopf complète.

Dans la suite on omettra dans les notations G ou $\Bbbk$, si le contexte est clair.

Remarque 1.3. — *Le groupe symétrique* $\mathfrak{S}_n$ *et le groupe* G^n *agissent sur l'algèbre de Lie* $\mathfrak{p}_n(G)$*. Ces actions sont définies par :*

$$\begin{aligned} \underline{g}\cdot X_{ij}(h) &= X_{ij}(g_i h g_j^{-1}), & \underline{g}\cdot X_i(q) &= X_i(g_i\cdot q),\\ \sigma\cdot X_{ij}(h) &= X_{\sigma(i)\sigma(j)}(h), & \sigma\cdot X_i(q) &= X_{\sigma(i)}(q), \end{aligned}$$

pour $\underline{g} = (g_1,\cdots,g_n) \in G^n$ *et* $\sigma \in \mathfrak{S}_n$*.*

1.3. Connexions formelles. — Dans cette sous-section, on passe en revue certaines notions sur les connexions formelles, leur platitude et les représentations de monodromie induites.

Soit X une variété analytique complexe et A une $\mathbb{C}$-algèbre complète unitaire graduée (connexe) : $A = \prod_{k\geq 0} A_k$ telle que $1 \in A_0$, $A_0 = \mathbb{C}$, $A_k\cdot A_l \subset A_{k+l}$ pour $k,l \in \mathbb{N}$ et que les composantes homogènes soient de dimension finie. L'algèbre A est supposée munie de la topologie produit. On note $\Omega^\bullet(X)$ l'algèbre des formes holomorphes sur X et $\Omega^\bullet(X)\widehat{\otimes}A$ la complétion de l'algèbre $\Omega^\bullet(X)\otimes_{\mathbb{C}} A$ pour la filtration $\{\Omega^\bullet(X)\otimes_{\mathbb{C}} A_{\geq k}\}_{k\geq 0}$ (on note $A_k = \prod_{n\geq k} A_n$). On notera $\wedge$ le produit de $\Omega^\bullet(X)\widehat{\otimes}A$. On se donne aussi une 1-forme holomorphe sur X à valeurs dans $A_{\geq 1}$ (i.e. un élément de $\Omega^1(X)\widehat{\otimes}A_{\geq 1}$), qu'on notera ω.

Définition 1.4. — *Le triplet* (X, A, ω) *comme ci-dessus est appelé connexion formelle sur* X*, à valeurs dans* A*. Cette connexion est dite plate si* $(d\widehat{\otimes}\mathrm{id}_A)(\omega) - \omega\wedge\omega = 0$*.*