Bull. Soc. Math. France
147 (1), 2019, p. 49-90

SUR LA TORSION DE FROBENIUS DE LA CATÉGORIE DES MODULES INSTABLES

PAR THE CUONG NGUYEN

RÉSUMÉ. — Un des phénomènes marquants dans la catégorie $\mathcal{P}_d$ des foncteurs polynomiaux stricts est l'injectivité des morphismes induits par la torsion de Frobenius entre groupes d'extensions des foncteurs. Dans [4], l'auteur démontre que le foncteur de Hai, allant de la catégorie $\mathcal{P}_d$ vers la catégorie des modules instable $\mathcal{U}$, est pleinement fidèle. Cela fait de la catégorie $\mathcal{P}_d$ une sous-catégorie pleine de la catégorie $\mathcal{U}$. La torsion de Frobenius s'étend à toute la catégorie $\mathcal{U}$, mais n'y est pas aussi bien comprise. Cet article étudie la torsion de Frobenius, soit dans ce cas le foncteur double Φ, et ses effets sur les groupes d'extension des modules instables. On donne des calculs explicites de nombreux groupes d'extensions des modules instables, et permet de confirmer, dans de nombreux cas, l'injectivité des morphismes entre des groupes d'extensions induits par la torsion de Frobenius dans la catégorie $\mathcal{U}$. Ces résultats sont obtenus en étudiant la résolution injective minimale du module instable libre $F(1)$.

Texte reçu le 17 novembre 2015, modifié le 15 juin 2016, accepté le 30 juin 2016.

THE CUONG NGUYEN, Department of Mathematics, Vietnam National University, 334 Nguyen Trai Street, Hanoi, Vietnam • Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications - UMR7539 du CNRS, LIAFV, 99 Avenue Jean-Baptiste Clément, 93430 Villetaneuse, France • *E-mail :* `tdntcuong@gmail.com` • *E-mail :* `nguyentc@math.univ-paris13.fr` • *Url :* `https://sites.google.com/site/thcuongnguyen/`

Classification mathématique par sujets (2010). — 55S10, 18A40.

Mots clefs. — Algèbre de Steenrod, foncteurs polynomiaux stricts, modules instables, torsion de Frobenius.

L'auteur est partiellement soutenu par le programme ARCUS Vietnam MAE, Région IDF et par LIAFV - CNRS - Formath Vietnam.

 0037-9484/2019/49/$ 5.00
 doi:10.24033/bsmf2775

Abstract (*On the Frobenius twist in the category of unstable modules*). — The Frobenius twist of strict polynomial functors induces natural morphisms between Ext-groups, which are injective according to Friedlander and Suslin [10]. This fact plays an important role in homological computations of strict polynomial functors. In algebraic topology, the category $\mathcal{P}_d$ of homogeneous strict polynomial functors of degree d is connected to the category $\mathcal{U}$ of unstable modules over the Steenrod algebra *via* Hai's functor [11], which is proved to be fully faithful in [4]. The Frobenius twist is extended to the category $\mathcal{U}$, under the form of the double functor Φ, but remains mysterious there. This article aims to study the Frobenius twist Φ and its effects on Ext-groups of unstable modules. We compute explicitly many Ext-groups in $\mathcal{U}$ and show that in these cases, the morphisms induced by the Frobenius twist are injective. These results are obtained by constructing the minimal injective resolution of the free unstable module $F(1)$.

1. Introduction

En topologie algébrique, on rencontre fréquemment les calculs des groupes d'extensions entre modules gradués sur l'algèbre de Steenrod $\mathcal{A}_2$. La suite spectrale d'Adams montre l'intérêt d'étudier ces groupes. Mais l'étude directe des groupes d'extensions des $\mathcal{A}_2$-modules gradués s'est avérée difficile. Toutefois, une sous-catégorie abélienne (pleine) fondamentale de la catégorie des $\mathcal{A}_2$-modules gradués offre davantage de prise aux calculs cohomologiques : la catégorie, notée traditionnellement $\mathcal{U}$, des $\mathcal{A}_2$-modules *instables* (c'est-à-dire dans lesquels $Sq^i x = 0$ si x est un élément homogène de degré strictement inférieur à i). Cette condition d'instabilité est vérifiée par la cohomologie singulière (mod. 2) d'un espace topologique, mais pas d'un spectre, ce qui en justifie l'appellation. Le foncteur d'oubli de $\mathcal{U}$ dans la catégorie de tous les $\mathcal{A}_2$-modules gradués possède un adjoint à gauche nommé *déstabilisation* et noté D dont les dérivés ont été étudiés, par exemple, par Lannes et Zarati [19]. La suite spectrale de Grothendieck associée à cette adjonction (plus précisément, au couple D et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(-, N)$ pour certain module instable N) permet ainsi d'obtenir certains renseignements sur des groupes d'extensions entre $\mathcal{A}_2$-modules gradués. En particulier, si N est un module instable injectif, cette suite spectrale s'effondre à la page 2 et donne

$$\mathrm{Ext}^q_{\mathcal{A}_2}(M, N) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(D_q(M), N),$$

pour tout $q \geq 0$, où D_q désigne le q-ème foncteur dérivé du foncteur de déstabilisation D. Cela joue un rôle crucial dans la preuve de Lannes et Zarati sur la conjecture de Ségal pour les 2-groupes abéliens élémentaires (forme faible) [19, 5.4.7].

La structure algébrique fine de la catégorie $\mathcal{U}$ est utilisée pour résoudre des problèmes topologiques, par exemple, la conjecture de Sullivan sur les espaces fonctionnels dont la source est un espace classifiant d'un p-groupe abélien élémentaire (ces espaces sont étudiés et présentés en grand détail dans [15]). Dans le fameux article [20], aux *Annals of Mathematics*, Miller démontre cette conjecture en la ramenant à la trivialité des groupes d'extensions entre certains $\mathcal{A}_2$-modules instables. Ce point clé est réétudié par Lannes et Schwartz [16] avec les techniques des modules instables, ce qui en simplifie la preuve.

L'objet essentiel de cette note est d'étudier l'algèbre cohomologique des modules instables sur l'algèbre de Steenrod : on calcule les groupes d'extensions entre certains modules instables, et on étudie les effets de la torsion de Frobenius sur eux. Afin de préciser, explicitons quelques notations. La lettre p désigne un nombre premier, et on note $\mathbb{F}_p$ le corps premier de caractéristique p. Soit $\mathcal{F}$ la catégorie des foncteurs de la catégorie des $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels de dimension finie vers la catégorie des $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels. Cette notion remonte au travail fondamental [7] d'Eilenberg et Mac Lane, dans les années 1950, sur l'homologie singulière des espaces topologiques. Le lien avec $\mathcal{F}$ en topologie est établi dans [12] : il existe un foncteur, que l'on note f, de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{F}$, défini grâce au foncteur de Lannes [15] ; le résultat crucial est que ce foncteur induit une équivalence entre la catégorie quotient $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$ (modulo les modules instables nilpotents [23]) et la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}$, désignée par $\mathcal{F}_\omega$, des foncteurs analytiques.

Un autre lien très important est introduit par Friedlander et Suslin dans [10] par les foncteurs polynomiaux stricts. L'objet de [10] est de montrer que pour un schéma en groupes fini G et un G-module rationnel M de dimension finie, $H^*(G;\mathbb{k})$ est une algèbre de type fini, et $H^*(G;M)$ est un module de type fini sur $H^*(G;\mathbb{k})$, ici $\mathbb{k}$ désigne un corps fini. L'outil essentiel est la notion des foncteurs polynomiaux stricts, qui consiste en associer pour tout $\mathbb{k}$-espace vectoriel V un espace vectoriel $F(V)$, et pour tout couple d'espaces vectoriels V et W un morphisme de schémas de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(V,W)$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(F(V),F(W))$ tel que les propriétés usuelles pour que F soit un foncteur soient satisfaites. Ici on identifie un espace vectoriel V par le schéma affine $Spec\left(S^*\left(V^\sharp\right)\right)$, où l'on désigne par $V^\sharp$ le $\mathbb{k}$-dual de V et par S^* l'algèbre symétrique. Un foncteur polynomial strict se réduit par l'évaluation du polynôme en un foncteur polynomial ordinaire, et qu'on obtient ainsi un foncteur 'oubli' $\mathcal{O} : \mathcal{P}^d \to \mathcal{F}$, où l'on note $\mathcal{P}^d$ la catégorie des foncteurs polynomiaux stricts homogènes de degré d. Le degré d'un foncteur polynomial strict est le degré des polynômes utilisés pour la définition du morphisme des schémas, et de la même façon on définit la propriété qu'un tel foncteur soit homogène. D'après Nguyen D. H. Hai [11], le foncteur d'oubli se factorise à traverse f, *via* un foncteur $\bar{m}_d : \mathcal{P}^d \to \mathcal{U}$, qui est pleinement fidèle selon [4]. Ceci montre l'intérêt d'étendre de nombreux phénomènes intéressants de $\mathcal{P}^d$ à la catégorie $\mathcal{U}$, et on en détaille dans la suite l'un de ceux qui nous motivent.

Rappelons la torsion de Frobenius. Soit $\mathbb{k}$ un corps fini de caractéristique positive p, et soit V un $\mathbb{k}$-espace vectoriel. On note F l'homomorphisme de

Frobenius $x \mapsto x^p$. La torsion de Frobenius de V, notée $V^{(1)}$, est le $\mathbb{k}$-espace vectoriel, qui comme groupe abélien, s'identifie à V mais, dont la multiplication par les scalaires est donnée par $\lambda v = \lambda^p v$. Étant donné un $GL_n(\mathbb{k})$-module M, sa torsion de Frobenius $M^{(1)}$ est le $GL_n(\mathbb{k})$-module induit par l'homomorphisme de Frobenius

$$F : GL_n(\mathbb{k}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{k}).$$

D'après les travaux de Cline, Parshall, Scott et Jantzen [3, 13][1], le morphisme

$$\operatorname{Ext}^*_{GL_n(\mathbb{k})}(M, N) \hookrightarrow \operatorname{Ext}^*_{GL_n(\mathbb{k})}\left(M^{(1)}, N^{(1)}\right) \tag{1}$$

induit par la torsion de Frobenius en cohomologie est injectif. Selon Friedlander et Suslin [10, corollaire 3.13], pour n assez grand, les groupes d'extensions des $GL_n(\mathbb{k})$-modules se calculent comme ceux des foncteurs polynomiaux stricts. Il y a aussi une torsion de Frobenius $F^{(1)}$ d'un foncteur polynomial strict F, ce qui consiste en associer à un $\mathbb{k}$-espace vectoriel V le $\mathbb{k}$-espace vectoriel $F\left(V^{(1)}\right)$, et celle-ci induit donc un analogue dans $\mathcal{P}$ du phénomène d'injectivité (1). Ce résultat est crucial dans [8] pour démontrer que les groupes d'extensions entre les foncteurs polynomiaux stricts se stabilisent par rapport aux itérations de la torsion de Frobenius.

Il y a sur $\mathcal{U}$ un avatar de la torsion de Frobenius : le foncteur double Φ [23]. Nguyen D. H. Hai [11] montre que le foncteur $\bar{m}_d$ commute avec la torsion de Frobenius :

$$\Phi\bar{m}_d(F) \cong \bar{m}_d\left(F^{(1)}\right).$$

Le foncteur Φ joue un rôle important dans l'étude de la catégorie $\mathcal{U}$; la question suivante est dès lors très naturelle :

Question 1. — *Étant donnés deux modules instables M et N, le morphisme*

$$\operatorname{Ext}^*_{\mathcal{U}}(M, N) \longrightarrow \operatorname{Ext}^*_{\mathcal{U}}(\Phi M, \Phi N)$$

induit par Φ en cohomologie est-il injectif ?

Malheureusement, celle-ci ne peut avoir lieu en toute généralité, ne serait-ce qu'à cause des modules instables nilpotents. Un contre-exemple concernant des modules instables $\mathcal{N}il$-fermés sera aussi donné.

Cependant des calculs, effectués à l'aide du module instable $F(1)$ (l'objet projectif de $\mathcal{U}$ qui représente le foncteur associant à un module instable le $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel de ses éléments homogènes de degré 1) sur le système

$$\cdots \to \operatorname{Ext}^*_{\mathcal{U}}(\Phi^n F(1), \Phi^n F(1)) \to \operatorname{Ext}^*_{\mathcal{U}}\left(\Phi^{n+1} F(1), \Phi^{n+1} F(1)\right) \to \cdots,$$

Φ^r désignant la r-ème itération de l'endofoncteur Φ, montrent qu'il subsiste des propriétés intéressantes :

1. Je tiens à remercier Professeur Wilberd van der Kallen pour m'avoir indiqué la bonne réference pour ce résultat.

Théorème 8.5. — *Soit i un entier non négatif tel que $i \leq 49$ ou $i = 2^n - 2^5 + t$ avec $0 \leq t \leq 2^5 + 2$ et $5 < n$. Alors pour tout $0 \leq r$, le morphisme*

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{U}}\left(\Phi^r F(1), \Phi^r F(1)\right) \longrightarrow \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{U}}\left(\Phi^{r+1} F(1), \Phi^{r+1} F(1)\right)$$

induit par Φ en cohomologie est injectif.

L'essentiel de notre travail consiste en l'étude de la résolution injective (minimale de préférence) de $F(1)$. Dans cet article, on la désigne par (I^r, ∂^r), où $r \geq 0$. Nous ne la connaissons pas, mais nous pouvons dire beaucoup de choses à ce propos.

Rappelons les objets injectifs de la catégorie $\mathcal{U}$. On désigne par $J(n)$ l'enveloppe injective de la cohomologie réduite $\tilde{\mathrm{H}}^*(S^n; \mathbb{F}_2)$ de la sphère S^n. Les $J(n)$ sont caractérisés par

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}\left(M, J(n)\right) \cong \left(M^n\right)^\sharp.$$

Il y a aussi d'autres objets injectifs importants de la catégorie $\mathcal{U}$. Soit V un 2-groupe abélien élémentaire, la cohomologie de l'espace classifiant BV, que l'on note H^*V (on note $\tilde{\mathrm{H}}^*V$ la cohomologie réduite), est un module instable injectif. Ce phénomène est observé par Carlsson pour $p = 2$ [2], démontré dans le cas $V = \mathbb{Z}/p$ pour p impair par Miller [20], et développé dans le cas général par Lannes et Zarati [18].

Les travaux de Franjou, Lannes et Schwartz, [17, théorème 3.1],[9, théorème 7.3] permettent de démontrer :

Proposition 4.6. — *Pour tout entier non négatif r, le module I^r se décompose en somme directe $R^r \oplus N^r$, où R^r est un facteur direct d'une certaine somme $\bigoplus_\alpha \mathrm{H}^*(BV_\alpha; \mathbb{F}_2)$, et N^r est une somme directe finie de modules de Brown-Gitler.*

Puisqu'il n'y a pas de morphisme non trivial d'un modules instable fini dans H^*V, la suite $(N^r, \partial^r|_{N^r}, r \geq 0)$ est un sous-complexe de la résolution injective minimale de $F(1)$. Le calcul de la cohomologie de ce sous-complexe dépend de la cohomologie de MacLane des corps finis [9].

Corollaire 3.8. — *Soient k un entier positif et $r = 1 + 2^k(2l+1)$, alors :*

$$\mathrm{H}^r\left(N^\bullet, \partial^\bullet|_{N^\bullet}\right) \cong \frac{F(1)}{\Phi^k F(1)}.$$

Soient $k > l \geq 2$. On observe que si t est un entier tel que $2^l > t$ alors

$$\mathrm{H}^{t+2^l}\left(N^\bullet, \partial^\bullet|_{N^\bullet}\right) \cong \mathrm{H}^{t+2^k-2^l}\left(N^\bullet, \partial^\bullet|_{N^\bullet}\right).$$

Cette périodicité particulière de la cohomologie $\mathrm{H}^*\left(N^\bullet, \partial^\bullet|_{N^\bullet}\right)$ se relève au complexe $(N^\bullet, \partial^\bullet|_{N^\bullet})$.