Rudolf Bkouche
Variations autour de la réforme de 1902/1905

Introduction

> *"La réforme Georges Leygues de 1902 place l'enseignement scientifique à égalité avec l'enseignement littéraire et renouvelle l'enseignement des mathématiques et de la physique",*

écrit Bruno Belhoste dans un article sur l'histoire de l'enseignement secondaire scientifique en France[1].

Les raisons de cette réforme sont multiples et nous renvoyons pour l'analyse des conditions et des objectifs de cette réforme aux travaux de Bruno Belhoste[2] ; nous nous proposons d'étudier ici les conceptions qui ont guidé la réforme de l'enseignement de la géométrie, les courants auxquels elles se relient, et en quoi cette réforme a tenté, avec plus ou moins de bonheur, de transformer les traditions de cet enseignement ; il faut signaler aussi les polémiques déclenchées par cette réforme qui ne le cèdent en rien aux polémiques de la réforme des *mathématiques modernes*, polémiques qui ont eu le mérite d'expliciter les divers points de vue de l'époque sur les mathématiques et sur l'enseignement d'icelles, polémiques dont nous verrons au cours de cet article qu'elles gardent un caractère d'actualité dans le débat actuel sur l'enseignement des mathématiques et plus généralement sur l'enseignement scientifique.

Les conceptions qui guident une réforme de l'enseignement d'une discipline sont toujours multiples, mêlant, sans qu'on puisse toujours les distinguer, des considérations d'ordre interne à la discipline et des considérations plus générales, surtout lorsque cette réforme s'inscrit dans une refonte générale de l'enseignement. Ainsi il faut replacer cette réforme dans l'idéologie du progrès qui caractérise les années du tournant du siècle qui voient *"le triomphe de l'humanisme scientifique d'inspiration positiviste"*,[3] réforme qui représente l'une des dernières grandes manifestations de l'empirisme français dans la tradition des Lumières, empirisme auquel se rattachent les noms de deux mathématiciens-philosophes, Emile Borel et Henri Poincaré.

Dans le domaine de l'enseignement des mathématiques, cette conception empiriste insiste sur le caractère expérimental des sciences mathématiques et la liaison entre ces deux modes de la connaissance que constituent la méthode

---

1. Bruno Belhoste, "Les caractères généraux de l'enseignement secondaire scientifique de la fin de l'Ancien Régime à la Première Guerre mondiale", *Histoire de l'éducation*, n° 41, janvier 1989.
2. Bruno Belhoste, "Histoire de l'enseignement des mathématiques : la réforme de 1902", *Bulletin de liaison de la commission inter-Irem épistémologie*, n° 7, 1990.
3. Bruno Belhoste, *Histoire de l'éducation*, op.cit.

expérimentale et la méthode déductive ; on ne peut mieux souligner cette conception qu'en citant les *Instructions sur l'enseignement de la Géométrie* accompagnant le libellé des programmes de 1905[4] :

> *"Il y a deux certitudes d'ordres différents : l'une expérimentale, qui appartient aux sciences physiques ; l'autre logique, qui est celle des vérités mathématiques ; mais, il y aurait un grave inconvénient à donner à cette dernière une importance qu'elle n'a pas dans la réalité et à jeter le discrédit sur la première qui, il faut bien l'avouer, est la seule que nous possédions, puisque les principes mathématiques n'ont pas d'autre fondements, tout au moins pour les élèves. Ce qu'il importera de faire ressortir, c'est l'importance du raisonnement logique pour réduire au minimum les faits expérimentaux",*

et plus pragmatique, Borel écrit[5] :

> *"L'enseignement moderne de la Géométrie, enseignement plus intuitif et plus expérimental, aurait sans doute pour effet de rendre les classes de mathématiques plus intéressantes, plus attrayantes, et il est probable que cette méthode nouvelle donnerait plus d'élèves ayant le goût pour les mathématiques."*

Dans ce cadre, la réforme de l'enseignement de la géométrie s'appuie sur les idées développées par Charles Méray dans un ouvrage publié en 1874, les *Nouveaux Eléments de géométrie*[6], ouvrage qui eut peu d'impact à l'époque mais qui guidera les réformateurs de 1902 ; l'ouvrage sera réédité en 1903 et Carlo Bourlet l'un des promoteurs de la réforme en publiera une analyse dans les *Nouvelles Annales de mathématiques*[7].

Dans son ouvrage, Méray met en avant deux *"innovations"* (le terme est de Méray), d'abord l'abandon de la distinction d'usage entre la géométrie plane et la géométrie dans l'espace[8], ensuite l'introduction explicite du mouvement dans la mise en place des notions géométriques, rompant ainsi doublement avec la tradition grecque, nous y reviendrons. Ces innovations se situent en liaison avec le caractère expérimental de la géométrie (dans la préface de la seconde édition, Méray parlera de *"la vision des faits de l'espace"*), ce qui ne va pas quelquefois sans un empirisme naïf lorsque Méray écrit au début de son ouvrage :

> *"Tous les hommes acquièrent spontanément l'idée de l'espace indéfini"*

(mais la naïveté ne joue-t-elle pas un rôle non négligeable dans le développement des idées ?).

---

4. "Instructions pour l'enseignement de la géométrie accompagnant les programmes du premier cycle de 1905" (ces Instructions sont reproduites dans le *Cours abrégé de géométrie* de Carlo Bourlet, Hachette, Paris, 1906/1908.
5. "L'enseignement de la géométrie", débat publié dans le *Bulletin de la Société française de philosophie*, t.VII, 1907.
6. Charles Méray, *Nouveaux éléments de géométrie*, Savy, Paris, 1874, réédition Jobard, Dijon, 1903.
7. Carlo Bourlet, "Nouveaux éléments de géométrie par Monsieur Charles Méray", *Nouvelles Annales de mathématiques*, 4e série, t.4, 1904.
8. Charles Méray, *op.cit.*, préface.

Enfin, il faudrait signaler deux autres points sur lesquels insistent autant Méray que les réformateurs de 1902/1905, d'une part l'intervention du numérique et du calcul dans l'exposé de la géométrie élémentaire (contrairement à l'exposé euclidien qui, pour des raisons liées au problème des irrationnelles, séparait le géométrique et le numérique ; mais cette tradition était depuis longtemps remise en cause), d'autre part l'utilisation des limites dans les calculs d'aires et de volumes au lieu de la méthode d'exhaustion encore en usage dans certains ouvrages du XIXe siècle. Nous n'aborderons pas ces deux points dans cet article, renvoyant à deux autres articles à venir, l'un sur le théorème dit de Thalès et les proportions[9], l'autre sur la présentation de quelques grands traités de géométrie élémentaire [10].

Dans cet article nous étudierons essentiellement, d'une part le problème de la fusion de la géométrie plane et de la géométrie dans l'espace, d'autre part le lien entre la géométrie et le mouvement, ce qui nous conduira à certaines remarques sur le caractère expérimental de la géométrie.

Géométrie plane et géométrie dans l'espace

Nous remarquerons d'abord cette dissymétrie du vocabulaire scolaire français : on parle de *géométrie plane* et de *géométrie dans l'espace*, la première fait référence au plan, la seconde fait référence moins à l'espace en tant que tel qu'à ce qui a lieu dans l'espace ; si le plan est un objet géométrique que l'on peut définir, l'espace est le lieu de la géométrie, *"il ne fait que fournir les lieux que les corps occupent et remplissent"* comme l'explique Euler dans ses *Lettres à une Princesse d'Allemagne*[11]. Notons que l'anglais utilise les termes de *plane geometry* et de *solid geometry*.

Il nous faut rappeler que, dans la géométrie grecque, si le plan est défini comme objet géométrique (pour une revue des diverses définitions de la notion de plan, nous renvoyons à l'ouvrage de Heath sur les *Eléments* d'Euclide[12]), la notion d'espace n'y apparaît pas ; on y étudie des corps, ou plus généralement ce que j'appellerai des situations spatiales, représentées par des figures. La notion d'espace en tant qu'objet d'étude de la géométrie apparaît seulement au XVIIe siècle[13], encore n'est-il que le lieu des phénomènes géomé-

9. Rudolf Bkouche, *Le théorème de Thalès*, Irem de Lille, 1991 (à paraître).
10. Rudolf Bkouche, "Quelques grands traités d'enseignement de la géométrie", *Journées de la Société belge des professeurs de mathématiques, Tournai*, 1990 (à paraître).
11. Leonhard Euler, *Lettres à une Princesse d'Allemagne* (1768/1772), Charpentier, Paris, 1859.
12. Thomas L. Heath, *Euclid : The Thirteen Books of the Elements* (3 volumes) (1908) (translation and commentaries), Dover, New York, 1956, book I.
13. Rudolf Bkouche, "Quelques grandes problématiques de l'histoire de la géométrie", *Actes de l'Université d'été d'histoire des mathématiques*, Toulouse, 1986 ; Jean Itard, "L'introduction à la géométrie de Pascal" in *Essai d'histoire des mathématiques* (édité par Rashed), Blanchard, Paris, 1984, p.280.

triques, comme je l'ai rappelé ci-dessus, et c'est à cette notion d'espace que renvoie Méray au début de son ouvrage.

La distinction entre la planimétrie (étude des figures planes) et la stéréométrie (étude des figures de l'espace) procède de multiples raisons. D'abord le rôle spécifique que joue le plan dans les formes d'expression par l'homme de son rapport au monde, comme le montrent aussi bien le dessin que l'écriture[14], ensuite la stéréométrie est une science difficile comme l'explique déjà Platon au livre VII de *La République*[15], enfin, dans le cadre de la rationalité grecque, le développement logique exige que l'étude des corps solides vienne après celle des figures planes sur laquelle elle s'appuie, développement qui est celui des *Eléments* d'Euclide où la géométrie plane occupe la première partie (Livres 1, 2, 3, 4, 6) alors que la stéréométrie occupe les trois derniers livres (Livres 11, 12 et 13) ; ce développement implique un ordre des démonstrations, la démonstration d'une propriété de géométrie plane ne saurait ainsi s'appuyer sur des propriétés de stéréométrie. C'est cet ordre euclidien qui fonde la tradition géométrique occidentale (au sens large du terme, depuis le développement scientifique de l'époque arabo-islamique jusqu'à la révolution scientifique de l'Europe du XVII^e^ siècle). Il faut noter cependant que les principes énoncés au début du Livre I des *Eléments* (postulats, axiomes) ne concernent pas la seule géométrie plane[16].

Nous ferons ici deux remarques.

La distinction euclidienne relève d'un ordre logique ; si les textes problématiques, tels ceux d'Archimède, prennent quelques libertés avec cet ordre, les textes d'exposition se doivent de le respecter.

Cette distinction ne se retrouve pas dans d'autres aires culturelles, comme le montrent par exemple les mathématiques chinoises qui développent directement ce qu'on pourrait appeler une *méthode des volumes* que l'on peut comparer à la *méthode des aires* des mathématiques grecques[17].

Cette distinction sera remise en cause par le développement de la géométrie projective qui mettra en valeur ce que Chasles a appelé *"l'alliance intime et systématique entre les figures à trois dimensions et les figures planes*[18]*"*.

Dans la première moitié du XVII^e^ siècle, Desargues, s'appuyant sur l'œuvre d'Apollonius et sur les travaux des théoriciens de la perspective, avait étudié les coniques comme perspectives de cercles ouvrant la voie à l'utilisation des

14. Rudolf Bkouche, Michel Soufflet, "Axiomatique, formalisme, théorie", *Bulletin inter-Irem*, n° 22, 1982.
15. Platon, *La République*, Livre VII (traduction Baccou) Garnier Flammarion, Paris, 1966, p.287.
16. Rudolf Bkouche, "De la géométrie et des transformations", *Colloque inter-Irem géométrie*, Bordeaux, 1990 ; Repères-Irem, n°4, 1991.
17. Jean-Claude Martzloff, "Quelques exemples de démonstrations en mathématiques chinoises" in *La Démonstration mathématique dans l'histoire*, colloque inter-irem Besançon, IREM Lyon, 1990.
18. Michel Chasles, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* (1837), Gabay, Paris, 1989, p.191.

propriétés spatiales pour des études de géométrie plane[19] ; puis, avec la démonstration du théorème sur les triangles dits homologiques (aujourd'hui appelé le théorème de Desargues), Desargues montrait comment une propriété spatiale induisait une propriété plane (même si cette démonstration était incomplète)[20].

A la fin du XVIIIe siècle, toujours à propos de problème de représentation, Monge avait développé la géométrie descriptive comme méthode de représentation, mais, mathématicien, il avait insisté sur son apport à la géométrie rationnelle comme méthode de recherche et de démonstration mêlant propriétés planes et propriétés spatiales. C'est ainsi qu'il démontrait que, un cercle et une droite étant donné dans un plan, la droite qui joint les points de contact des tangentes au cercle menées par un point de la droite donnée, passe par un point fixe ; en effet si l'on considère la sphère dont le cercle donné est un grand cercle, le cercle de contact du cône tangent à la sphère mené par un point de la droite donnée, passe par les points de contact des plans tangents à la sphère passant par cette droite, la droite joignant ces points de contact rencontre le plan du cercle donné en un point qui est le point fixe cherché ; cette démonstration reste inchangée si l'on remplace le cercle par une conique et la sphère par une surface du second degré contenant la conique[21]. La démonstration de Monge est exemplaire en ce sens qu'elle montre cette alliance intime dont parle Chasles et qu'elle remet ainsi en cause l'ordre logique de la tradition grecque.

En 1826 Gergonne, étudiant la dualité des propriétés de situation et remarquant comment celles-ci peuvent être déduites indépendamment du calcul et de la théorie des proportions à condition *"pour cela de passer tour à tour de la géométrie plane à celle de l'espace et de celle-ci à la première"*, écrivait[22] :

> *"Il est donc raisonnablement permis de se demander, d'après cela, si notre manière de diviser la géométrie en géométrie plane et géométrie de l'espace est aussi naturelle et aussi exactement conforme à l'essence des choses que vingt siècles d'habitude ont pu nous le persuader. Toujours du moins demeure-t-il vrai qu'en y renonçant on parviendrait, en ne recourant, pour ainsi dire qu'à la simple intuition, à pousser avant dans la géométrie des commençants que l'étude du calcul, présentées dès l'entrée, ne rebute que trop souvent, et qui peut-être s'y livreraient plus tard avec beaucoup moins de répugnance, lorsque leur intelligence se serait agrandie et fortifiée, par l'étude d'une série plus ou moins prolongée de propriétés de l'étendue."*

19. René Taton, *L'œuvre scientifique de Desargues*, Vrin, Paris, 1981.
20. René Taton, *op.cit.*, p.206 ; Rudolf Bkouche "La naissance du projectif", *Les mathématiques de l'Antiquité à l'Age classique*, Colloque Marseille, 1989, Éditions du CNRS, Paris (sous presse).
21. Gaspard Monge, *Géométrie descriptive* (1799), Gabay, Paris, 1989.
22. Joseph Diez Gergonne, "Considérations philosophiques sur les éléments de la science de l'étendue", *Annales de mathématiques*, t.XVI, 1826.

A côté de ces raisons d'ordre théorique (Méray citera le texte de Gergonne dans la préface de l'édition de 1874), Méray avance une raison d'ordre pratique, liée à l'enseignement professionnel ; on peut rapprocher ce dernier argument (qui sera repris par les partisans de la réforme) de ceux développés par Monge dans la préface de sa *Géométrie descriptive*[23], véritable plaidoyer en faveur de cette *nouvelle technologie* (pour user d'une expression d'aujourd'hui) que représente, pour son inventeur, la géométrie descriptive.

Le développement de la géométrie projective conduira à mettre en place ce qu'on a appelé la *fusion* entre la planimétrie et la stéréométrie ; des ouvrages seront publiés en France et en Allemagne au milieu du XIX^{e} siècle sans grand succès. Après sa publication en 1874, l'ouvrage de Méray conduira à quelques expériences d'enseignement dans l'Académie de Dijon (Méray était professeur à la Faculté des Sciences de Dijon) non sans quelque réussite, mais ces expériences s'arrêteront devant l'indifférence, sinon l'hostilité, de l'Administration (!) et la méfiance de certains enseignants[24].

C'est en Italie que l'idée de la fusion se développera avec le plus de succès à la fin du XIX^{e} siècle. En 1873, Luigi Cremona, soucieux de développer un enseignement élémentaire de géométrie projective publiera, à l'usage des élèves des Instituts Techniques, des *Elementi di Geometria Projettiva*[25].. Dans la préface, Cremona insiste sur le *"caractère technique de l'ouvrage qui doit conduire rapidement les élèves à appliquer les connaissances théoriques au dessin*[26]*"* ; quand à la fusion, Cremona explique :

> *"Dès le commencement j'alterne sans distinction les théorèmes de géométrie plane avec ceux de la géométrie de l'espace, parce que l'expérience m'a enseigné, et d'autres l'ont remarqué avant moi, que les considérations de l'espace suggèrent bien souvent le moyen de rendre facile et intuitif ce qui serait compliqué et difficile à démontrer par la géométrie plane*[27]*."*

Ainsi se développera en Italie un courant fusionniste, deux ouvrages seront publiés qui contribueront à populariser l'idée de la fusion entre les deux géométries, les *Elementi di Geometria* de De Paolis en 1884, puis les E*lementi di Geometria* de Lazzari et Bassani en 1891, correspondant à un enseignement effectivement donné à la R. Académie de Livourne ; pour une étude du développement des idées fusionnistes en Italie, nous renvoyons à deux articles de Candido[28] et de Loria[29] publiés dans la revue *l'Enseignement mathématique*, respectivement en 1899 et 1905.

---

23. Gaspard Monge, *op.cit.*, préface.
24. Elie Perrin, "La méthode de Monsieur Méray pour l'enseignement de la géométrie", *L'enseignement mathématique*, t.5, 1903 ; Charles Méray, *Nouveaux éléments de géométrie*, 2^{e} édition, *op.cit.*, préface.
25. Luigi Cremona, *Elementi di Geometria Projettiva*, Torino, 1873 ; *Eléments de géométrie projective* (traduction Dewulf), Gauthier-Villars, Paris, 1875.
26. Luigi Cremona, *op.cit.*,p.IX.
27. Luigi Cremona, *op.cit.*, p.X.
28. G. Candido, "Sur la fusion de la planimétrie et de la stéréométrie", *L'enseignement mathématique*, t.1, 1899, p.204.

Ce rapprochement, dans l'enseignement, de la géométrie plane et de la géométrie dans l'espace ne sera pas sans poser problème ; ainsi Hadamard, dans la préface de la seconde édition de ses *Leçons de géométrie élémentaire*[30], publiée à l'époque de la réforme, refusera de *"fondre la géométrie plane et la géométrie dans l'espace"*, et il expliquera :

> *"Que cette fusion soit préférable au point de vue logique, je le veux bien. Mais il me paraît que, pédagogiquement, nous devons penser tout d'abord à diviser les difficultés. Celle de "voir dans l'espace" en est une sérieuse par elle-même, que je ne considère pas comme devant être ajoutée tout d'abord aux autres."*

Le débat est toujours actuel et je me permets de renvoyer aux travaux de la Commission Inter-Irem Géométrie[31].

Géométrie et mouvement

Ici encore, Méray remet en question une tradition grecque bien établie, savoir, l'élimination du mouvement de la géométrie.

Les raisons de cette élimination sont liées moins à des considérations d'ordre scientifique qu'à des positions d'ordre métaphysique (mais peut-on distinguer science et métaphysique dans la pensée grecque ?) ; ainsi Platon écrit[32]

> *"Si la géométrie oblige à contempler l'essence, elle nous convient ; si elle s'arrête au devenir, elle ne nous convient pas."*

C'est que la philosophie platonicienne, qui doit répondre aux considérations d'Héraclite sur le monde changeant et aux paradoxes des Eléates[33] pour mettre en place les conditions de la connaissance rationnelle, ne peut assurer celle-ci que dans le statique (l'Etre platonicien est immobile par essence), le mouvement étant renvoyé aux marges de la rationalité, à la physique (au sens grec du terme) dont Aristote nous explique les problèmes qu'elle pose à la connaissance[34] ; c'est à l'intérieur de cette problématique qu'il faut comprendre la distinction entre les mathématiques et la physique explicitée par Aristote au livre II de la *Physique*[35].

Pourtant le mouvement est présent dans la géométrie grecque, d'abord avec le principe de l'égalité par superposition (l'axiome 4 ou 8 suivant les éditions

---

29. Gino Loria, "Sur l'enseignement des mathématiques élémentaires en Italie", *L'enseignement mathématique*, t.7, 1905, p.11.
30. Jacques Hadamard, *Leçons de géométrie élémentaire* (2 volumes), Armand Colin, Paris, 1898/1947.
31. *Bulletin inter-Irem*, n° 23, 1982.
32. Platon, *op.cit.*, p.285.
33. Jean-Paul Dumont, Daniel Delattre, Jean-Louis Poirier, *Les Présocratiques*, Gallimard, Paris, 1988.
34. Aristote, *Physique* (traduction de Henri Carteron) (2 volumes), Les Belles Lettres, Paris, 1973.
35. Aristote, *op.cit.*, livre II.

des *Eléments* d'Euclide), principe que nous énonçons dans la traduction de Hoüel[36]

> *"Les grandeurs que l'on peut faire coïncider l'une avec l'autre sont égales entre elles",*

principe fondateur de la géométrie dans la mesure où c'est ce principe qui permet de comparer entre eux les objets géométriques et donc de les mesurer (puisque la mesure est comparaison).

Mais cette intervention du mouvement est vite occultée, et c'est peut-être le rôle de ce principe que de l'occulter ; en effet le principe de l'égalité par superposition une fois énoncé, le problème est de trouver des critères d'égalité *a priori* qui permettent de se dispenser de la superposition effective, ce seront les classiques cas d'égalité des triangles, lesquels sont, en ce sens, fondateurs de la rationalité géométrique euclidienne[37]. Dans le cadre de cette rationalité, et conformément au dogme platonicien rappelé ci-dessus, l'appel à des considérations de mouvement est interdit *en droit* dans le raisonnement géométrique.

Le mouvement intervient pourtant dans l'étude des grands problèmes de la géométrie grecque (quadrature du cercle, duplication du cube, trisection de l'angle), laquelle étude fait intervenir un certain nombre de courbes définies *mécaniquement*, ce qui conduit à déterminer des méthodes, théoriques et pratiques, de construction de ces courbes[38] ; on peut d'ailleurs distinguer parmi ces courbes celles dont la construction point par point relève de la règle et du compas (la conchoïde de Nicomède, la cissoïde de Diocles) et celles qui ne relèvent pas d'une telle construction (la quadratrice de Dinostrate, les spirales d'Archimède). Pour construire ces courbes *mécaniques*, les géomètres grecs ont mis au point divers procédés instrumentaux (qu'ils aient été effectivement réalisés ou non importe peu pour notre propos) utilisant le mouvement[39]. Mais alors, quelle est la place particulière de la règle et du compas, ces instruments qui utilisent aussi le mouvement, dans la mesure où la construction d'une ligne est effectivement le mouvement d'un point et relève ainsi de ce que Newton a appelé une pratique mécanique (*"a mechanical practice"*)[40]. C'est que la règle et le compas ne sont pas seulement des outils pratiques de construction, ils ont un rôle théorique lié à la définition même de la droite et du cercle, ce qu'Abel Rey[41] exprime en écrivant qu'ils sont *"les symboles des idées claires et distinctes de la droite et du cercle"*.

---

36. Jules Hoüel, *Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire*, Gauthier-Villars, Paris, 1867, p.13.
37. Rudolf Bkouche, "De la géométrie et des transformations", *op.cit.*
38. Eutocius, *Commentaires au traité sur la Sphère et le Cylindre II* in Archimède, *Œuvres*, IV, Les Belles Lettres, Paris, 1972.
39. Eutocius, *op.cit.*
40. Isaac Newton, *Mathematical Principles of Natural Philosophy* (1686/1713) (english translation by Motte, 1729), University of California Press, Berkeley Los Angeles London, 1962, preface.
41. Abel Rey, *L'apogée de la science technique grecque, l'essor de la mathématique*, Albin Michel, Paris, 1948, p.124.

On peut d'ailleurs remarquer que la droite et le cercle sont les seules courbes planes qui peuvent glisser isométriquement sur elles-mêmes, ce que réalisent d'une certaine façon les constructions à la règle pour la première, au compas pour la seconde, ce qui expliquerait leur caractère particulier et leur rôle dans la construction de la géométrie rationnelle ; nous verrons ci-dessous comment cette remarque intervient dans l'ouvrage de Méray.

Il faut noter aussi la notion d'un mouvement que l'on pourrait appeler *idéel* dans la pensée platonicienne ; ainsi, à propos de l'astronomie, Platon distingue le mouvement des astres tel qu'il apparaît à la vue et le mouvement vrai accessible à la seule intelligence, ce dernier étant seul digne de l'étude *"car la science ne comporte rien de sensible"*[42]. Notons que ce mouvement idéel est indépendant de toutes considérations temporelles, un mouvement immobile en quelque sorte, son étude est essentiellement l'étude des trajectoires, indépendamment de la manière dont elles sont parcourues[43].

La mathématisation du mouvement et du temps qui se développe à partir du XVIIe siècle, le lien entre mécanique et géométrie qui se met ainsi en place, tout cela va conduire certains géomètres à utiliser le mouvement, non seulement pour définir des objets géométriques à la façon des courbes mécaniques des Anciens, mais encore comme méthode de démonstration et de construction ; ainsi la composition des vitesses permettra à Roberval de déterminer les tangentes à certaines courbes[44]. D'autre part, l'étude du mouvement lui-même, en particulier l'étude du mouvement d'un corps solide, conduira les géomètres à s'intéresser aux propriétés géométriques du mouvement (Cf ci-dessous).

Cette géométrisation du mouvement conduira à définir au XIXe siècle une *géométrie du mouvement* ou *géométrie cinématique*, géométrie que Mannheim, dans son cours à l'Ecole Polytechnique, définit ainsi[45] :

> *"La Cinématique a pour objet l'étude du mouvement indépendamment des forces ; la Géométrie cinématique a pour objet l'étude du mouvement indépendamment des forces et du temps, c'est-à-dire qu'elle a pour objet l'étude des déplacements. Nous réservons l'expression de déplacement pour un mouvement dans lequel on ne considère pas la vitesse."*

Cette géométrie du mouvement s'est développée au XIXe siècle, essentiellement à partir des travaux de Chasles sur les déplacements finis et infinitésimaux des corps solides (cf. ci-dessous) ; ces travaux feront l'objet, à la fin du

42. Platon, *op.cit.*, p.288.
43 Théon de Smyrne, *Des connaissances mathématiques utiles à la lecture de Platon*, 3e partie Astronomie ; Rudolphe Bkouche et Joelle Delattre, *La géométrie du mouvement*, Commission inter-Irem épistémologie (en préparation).
44. Gilles Personne de Roberval, "Observations sur la composition des mouvements et sur le moyen de trouver les touchantes des lignes courbes" (1636), *Recueil de l'Académie des Sciences*, t.VI.
45. Amédée Mannheim, *Cours de géométrie descriptive de l'Ecole polytechnique*, Gauthier-Villars, Paris, 1880, 13e leçon.

siècle de deux ouvrages synthétiques, celui de Mannheim déjà cité et un ouvrage de Schoenflies[46].

La mise en place de cette géométrie du mouvement a conduit à reconnaître la place du mouvement dans la géométrie, permettant ainsi son intervention *en droit* dans la démonstration géométrique, rompant ainsi avec la tradition grecque.

C'est ainsi que Hoüel pouvait écrire en 1867[47] :

> *"C'est par suite d'une confusion d'idées que plusieurs géomètres veulent bannir des éléments de géométrie la considération du mouvement.*
> *L'idée du mouvement, abstraction faite du temps employé à l'accomplir, c'est-à-dire l'idée du mouvement géométrique, n'est pas une idée plus complexe que celle de grandeur ou d'étendue. On peut même dire, en toute rigueur, que cette idée est identique avec celle de grandeur, puisque c'est précisément par le mouvement que nous parvenons à l'idée de grandeur.*
> *Ce mouvement géométrique, qu'une équivoque de langage a fait confondre avec le mouvement dans le temps, objet de la cinématique, ne peut pas dépendre d'une autre science que la géométrie pure.*
> *Il est avantageux d'introduire cette idée de mouvement géométrique le plus tôt et le plus explicitement possible. On y gagne beaucoup sous le rapport de la clarté et de la précision du langage, et l'on se trouve mieux préparé à introduire plus tard dans le mouvement les notions de temps et de vitesse.*
> *C'est d'ailleurs ce que tous les auteurs font à leur insu ; et il serait difficile de trouver une seule démonstration d'une proposition fondamentale de la géométrie, dans laquelle n'entre pas l'idée de mouvement géométrique, plus ou moins déguisée."*

ouvrant ainsi la voie à un renouvellement de l'enseignement de la géométrie.

C'est ce mouvement d'idées qui permettra à Charles Méray d'utiliser le mouvement dans la construction de la géométrie élémentaire via les translations et les rotations ; aux translations sont alors associées les notions de droite et de parallélisme, aux rotations sont associées la notion de perpendiculaire ainsi que les notions d'angle et de cercle.

Cette transgression de la tradition euclidienne sera diversement appréciée et on reprochera aux partisans de la réforme un manquement à la rigueur dans le raisonnement. Il est vrai que la construction de Méray est, nous le verrons, assez compliquée et par cela même, est loin d'être à l'abri des critiques ; sa recherche d'un enseignement plus intuitif et le souci conjoint de préserver une certaine rigueur de l'exposé explique cette complication. Mais derrière la complication du texte de Méray on voit apparaître les idées dont je viens de

---

46 Arthur Schoenflies, *Géométrie du mouvement* (traduit de l'Allemand par Speckel), Gauthier-Villars, Paris 1893.

47. Jules Hoüel, *op.cit.*, note II.

parler et surtout, mais c'est peut-être le point essentiel de la polémique, l'aspect expérimental de la géométrie sur lequel nous reviendrons longuement.

La géométrie du mouvement

La géométrie du mouvement (qu'il faut distinguer de la mécanique) commence lorsque l'on s'appuie explicitement sur le mouvement pour établir une vérité géométrique ou effectuer une construction géométrique. On peut considérer comme l'un des premiers exemples de cette géométrie la détermination des tangentes via la composition des vitesses par Roberval[48]. De son côté, Descartes détermine la tangente à la cycloïde en considérant le mouvement d'un cercle roulant sur une droite comme, à un instant donné, une rotation de ce cercle (considéré comme un polygone régulier à un nombre infini de côtés) autour du point de contact de ce cercle et de la droite sur laquelle il roule (la base), étude purement géométrique dans la mesure où ni le temps ni la vitesse (autrement que par sa direction, laquelle détermine la tangente à la trajectoire d'un point) n'interviennent[49]. Cette méthode sera développée par Johann Bernoulli qui définira le centre spontané de rotation (*centrum spontaneum rotationis*). Peu après D'Alembert et Euler montreront, indépendamment, que le mouvement d'un solide autour d'un point fixe est, à un instant donné, un mouvement de rotation autour d'un axe passant par le point fixe (*axe instantané de rotation* comme le nomme D'Alembert) ; ceci permet de connaître, à un instant donné, la répartition des vitesses des divers points du solide, donc les tangentes à leurs trajectoires respectives. Quelques années plus tard, D'Alembert et Euler montreront, indépendamment, que le mouvement *fini* d'un solide est, lorsque le solide tourne autour d'un point fixe, une rotation autour d'un axe passant par ce point fixe, et dans le cas général, le composé d'un mouvement de rotation et d'un mouvement de translation[50].

Ces questions seront étudiées systématiquement au XIX^{e} siècle dans le cadre de la mécanique du solide ; cette étude conduira à de nouvelles méthodes de détermination des éléments différentiels attachés à un point d'une courbe (tangente, courbure...), montrant ainsi la solidarité profonde de ces deux domaines des mathématiques que sont la géométrie et la mécanique.

Nous citerons d'abord l'important mémoire de Poinsot : T*héorie Nouvelle de la Rotation des Corps*[51] publié en 1851 mais présenté à l'Académie des Sciences de Paris en 1834. Dans la première partie de ce mémoire, Poinsot étudie, par des méthodes de géométrie élémentaire, le mouvement instantané d'un corps

48. Gilles Personne de Roberval, *op.cit.*
49. René Descartes, *Œuvres* publiés par Adam et Tannery (13 volumes) (1891-1912), Vrin, Paris, 1988 ; t.II, lettre à Mersenne du 23 août 1638.
50. Michel Chasles, "Notice historique sur la question du déplacement d'une figure de forme invariable", *Comptes Rendus de l'Académie des sciences de Paris*, LII, 1861, p.489-501.
51 Louis Poinsot, "Théorie nouvelle de la rotation des corps", *Journal de mathématiques pures et appliquées*, t.XVI, 1851, p.9-72, 73-129, 289-336.

solide ; lorsque le solide est lié à un point fixe, on peut considérer ce mouvement comme une rotation autour d'un axe passant par le point fixe (l'*axe instantané* qui est au mouvement comme est *la tangente à une courbe dans le mouvement du point qui la décrit*[52]) ; Poinsot en déduit qu'on peut considérer ce mouvement comme celui d'un cône roulant sur un cône fixe, le sommet commun des deux cônes étant le point fixe. Dans le cas d'un solide libre, le mouvement instantané est le composé d'un mouvement de translation et d'un mouvement de rotation d'axe parallèle à la direction de la translation.

De son côté, Michel Chasles publie une série de mémoires sur le mouvement d'un corps solide, mouvement infiniment petit et mouvement fini.

Le premier de ces mémoires sera publié en 1830[53], une partie, consacrée à la théorie du centre instantané de rotation (le terme lui-même sera utilisé par Chasles plus tardivement) et aux constructions géométriques qui lui sont associées, sera publié une seconde fois en 1878[54].

Dans ce dernier texte, Chasles montre d'abord la proposition :

> *"Quand on a une figure plane, si on la déplace d'une manière quelconque dans son plan, il y aura dans cette figure un point qui, après le déplacement, se retrouvera au même lieu" :*

autrement dit, *"tout déplacement d'une figure sur son plan peut se faire par un mouvement de rotation autour d'un point fixe"*.

Considérant un déplacement infiniment petit, Chasles en déduit la proposition :

> *"Si une figure plane, de forme quelconque, éprouve un déplacement infiniment petit dans son plan, les normales menées par ses différents points aux directions des lignes infiniment petites parcourues par ces points passeront toutes par un même point."*

ce que l'on peut aussi énoncer :

> *"si une figure plane quelconque est en mouvement dans son plan, les normales menées à un instant quelconque du mouvement par les différents points de la figure, à leurs trajectoires respectives, passeront toutes par un même point",*

autrement dit, le mouvement d'une figure plane dans son plan *"se réduit toujours, à chaque instant, à une rotation autour du point qui reste fixe pendant cet instant"*.

Notons que Chasles remarque que ces propriétés sont vraies pour le mouvement d'une sphère glissant sur elle-même, ce qui permet d'étudier le mouvement d'un solide autour d'un point fixe.

---

52. Louis Poinsot, *op.cit.*, p.26.
53. Michel Chasles, "Notes sur les propriétés générales du système de deux corps semblables placés d'une manière quelconque dans l'espace, et sur le déplacement fini ou infiniment petit d'un corps solide libre", Mémoire présenté en 1830 à la Société philomatique, publié dans le *Bulletin des sciences mathématiques du Baron de Ferussac*, t.XVI, 1830, et dans la *Correspondance mathématique de Quetelet*, VII, 1830.
54. Michel Chasles, "Mémoire de Géométrie sur la construction des normales à plusieurs courbes mécaniques", *Bulletin de la Société mathématique de France*, vol.6, 1878 p.208-251.

Chasles utilise alors les propriétés du centre instantané de rotation pour la construction de la tangente en un point d'une courbe (considérée comme trajectoire de ce point) et la construction du point où une droite variable touche son enveloppe.

Chasles montre par ailleurs que tout mouvement d'une figure plane dans son plan peut être considéré comme le mouvement d'une courbe plane mobile roulant sur une courbe fixe, le point de contact des deux courbes étant, à chaque instant, le centre instantané de rotation. Il explicitera la réciprocité entre plan mobile et plan fixe dans l'*Aperçu historique* déjà cité[55].

Dans une série de mémoires à l'Académie des Sciences de Paris, Chasles énoncera, sans démonstration, les propriétés générales du mouvement d'un corps solide, d'abord dans le cas d'un mouvement infiniment petit[56], puis dans le cas d'un mouvement fini[57]. Des démonstrations seront publiées ultérieurement d'abord par De Joncquières[58] dans le cas d'un mouvement infiniment petit, ensuite par Charles Brisse [59],[60].

Dans les travaux de Chasles comme dans ceux de Poinsot, l'accent est mis sur les méthodes géométriques utilisées, et c'est via ces méthodes que se dégage la signification géométrique des propriétés annoncées ; ainsi Poinsot, comparant ses méthodes à celles d'Euler et de Lagrange, écrit dans son mémoire cité[61] :

> *"Nous voilà donc conduit par le seul raisonnement à une idée claire que les géomètres n'ont pu tirer des formules de l'analyse. C'est un nouvel exemple qui montre l'avantage de cette méthode simple et naturelle de considérer les choses en elles-mêmes, et sans les perdre de vue dans le cours du raisonnement."*

exprimant le point de vue des partisans de la géométrie synthétique.

Ce point de vue d'une *géométrie pure* qui se distingue de la géométrie des Anciens par son *"degré d'abstraction et de généralité"* (comme l'explique Chasles dans le troisième chapitre de l'*Aperçu historique*[62], définissant ce qu'il appelle les trois branches de la géométrie) et des méthodes analytiques par son souci de ne pas perdre de vue les objets sur lesquels on raisonne, comme l'explique Poinsot dans le texte cité ci-dessus, est caractéristique de la pensée

55. Michel Chasles, *Aperçu historique*, *op.cit.*, pp.548-549.
56. Michel Chasles, "Propriétés géométriques relatives au mouvement infiniment petit d'un corps solide libre dans l'espace", *Comptes Rendus de l'Académie des sciences de Paris,* XVI, 1843, p.1420-1432.
57. Michel Chasles, "Propriétés relatives au déplacement fini dans l'espace d'une figure de forme invariable", *Comptes Rendus de l'Académie des sciences de Paris*, LI, 1860, p.855-863 et 905-914, LII, 1861, p.77-85, 189-197, 487-501.
58. Edmond de Jonquières, *Mélanges de géométrie pure*, Mallet-Bachelier, Paris, 1856, chap.I.
59. Charles Brisse, "Mémoire sur le déplacement des figures", *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 2e série, t.XV, 1870 .
60. Charles Brisse, "Sur le déplacement fini quelconque d'une figure de forme invariable", *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 2e série, t.XIX, 1874 ; 3e série, t.I, 1875.
61. Louis Poinsot, *op.cit.*, p.86.
62. Michel Chasles, *Aperçu historique*, *op.cit.*, p.116.

géométrique française de la première moitié du XIX^{e} siècle, et c'est cette conception qui est au coeur de l'*Aperçu historique* de Chasles. On peut la rapprocher de la tradition des logiciens de Port-Royal qui demandaient que les démonstrations soient *naturelles* (c'est-à-dire, ne soient pas *"tirées par des voies trop éloignées"*)[63], la critique des logiciens de Port-Royal contre les méthodes euclidiennes plus préoccupées, à leurs yeux, de la rigueur canonique des démonstrations que du sens des propositions, plus soucieuses de convaincre que d'éclairer[64], est ainsi reprise par les partisans de la géométrie pure contre une réduction au calcul qui, si elle est efficace, occulte souvent la signification des propositions démontrées.

On voit ici se dessiner une solidarité entre deux chapitres des mathématiques, la géométrie projective avec la liaison plan/espace, la mécanique avec la géométrisation du mouvement, solidarité que l'on peut voir de façon explicite dans l'*Aperçu historique* lorsque Chasles montre, dans la seconde partie de l'ouvrage, la dualité point-plan associée au mouvement infiniment petit d'un corps solide via la proposition suivante[65] :

> *"Quand un corps solide éprouve un mouvement infiniment petit, les plans normaux aux trajectoires des points du corps, situés dans un même plan, passent tous par un même point de ce plan",*

proposition qu'il démontre analytiquement, et dont De Joncquières donnera une démonstration synthétique[66].

Ainsi Chasles mettait en évidence un nouveau mode de dualité, distinct de celle définie par la transformation par polaires réciproques par rapport à une surface du second ordre, dualité qu'on sait aujourd'hui être définie par un complexe linéaire de droites (famille de droites dépendant linéairement de trois paramètres). On rappelle que, dans le mouvement infiniment petit d'un corps solide, les droites qui sont orthogonales en chacun de leurs points à la vitesse en ce point, définissent un tel complexe linéaire.

L'autre point de liaison entre géométrie projective et mécanique se situe dans le cadre du *Programme d'Erlangen*[67] puisqu'un mouvement fini n'est autre qu'une transformation homographique particulière ; Chasles avait déjà remarqué une telle relation dans l'*Aperçu historique* lorsqu'après avoir rappelé cette propriété que, deux figures égales étant données dans un plan, il existe un point de la première qui coïncide avec son homologue dans la seconde, il énonçait ce qu'il appelait un *"principe plus général[68]"* :

---

63. Antoine Arnauld, Pierre Nicole, *La logique ou l'art de penser* (1662, 5^{e} édition, 1685), Flammarion, Paris, 1970.
64. Evelyne Barbin, "La démonstration mathématique : significations épistémologiques et questions didactiques", *Bulletin APMEP*, n° 336, décembre 1988.
65. Michel Chasles, *op.cit.*, 2^{e} partie, "Mémoire de géométrie sur deux principes généraux de la Science".
66. Edmond de Joncquières, *op.cit.*
67. Felix Klein, *Le programme d'Erlangen* (1872), Gauthier-Villars, Paris, 1974.
68. Michel Chasles, *op.cit.*, p.548.

> *"Si l'on conçoit dans un plan deux figures qui ont été primitivement la perspective l'une de l'autre, et qui se trouvent actuellement placées d'une manière quelconque l'une par rapport à l'autre ;*
> *Chaque point de l'une des figures aura son homologue dans l'autre figure ;*
> *Il existera généralement trois points de l'une des figures qui se trouveront superposés respectivement sur leurs homologues dans la seconde figure ;*
> *L'un de ces trois points sera toujours réel ; les deux autres pourront être imaginaires" ;*

et il remarquait, considérant aussi les trois droites joignant les trois points deux à deux :

> *"Quand deux figures sont semblables, ce qui est un cas particulier de la perspective, deux des trois points et deux des trois droites sont toujours imaginaires ; le troisième point est réel, la troisième droite est aussi réelle mais elle se trouve à l'infini."*

Cette solidarité apparaîtra dans l'enseignement de la cinématique où l'on mettra l'accent, d'une part sur les propriétés géométriques définies par le mouvement instantané, d'autre part sur la théorie du complexe linéaire ; il faudrait ici citer les ouvrages d'enseignement destinés aux classes préparatoires aux grandes écoles et ceux de mécanique rationnelle de la licence. Nous rappellerons l'ouvrage cité de Mannheim qui rapproche, d'une façon quelque peu volontariste il est vrai, un cours de géométrie descriptive et un cours de géométrie cinématique, ainsi que l'ouvrage de Schoenflies qui introduit le complexe linéaire associé au mouvement instantané d'un solide comme outil d'étude du mouvement, et qui consacre la seconde partie de l'ouvrage à la théorie des complexes et des congruences de droites (une congruence est une famille de droites qui dépend de deux paramètres).

Il faudrait citer encore les grands traités de cinématique tels ceux de Résal[69], de Koenigs[70] et plus récemment de Garnier[71], ainsi que ceux des traités de géométrie où l'on parle de cinématique, comme, par exemple, les *Compléments de géométrie* de Deltheil et Caire[72], étude que nous renvoyons à un article ultérieur.

Cette histoire de la géométrie au XIX^{e} siècle, couronnée par le *Programme d'Erlangen* de Félix Klein, pourrait expliquer pourquoi les deux transgressions de la tradition grecque, celle de la distinction espace/plan et celle de l'élimination du mouvement, apparaissent en même temps, montrant ainsi

69. Henri Resal, *Traité de cinématique pure*, Mallet-Bachelier, Paris, 1862.
70. Gabriel Koenigs, *Leçons de cinématique*, Hermann, Paris, 1897.
71. René Garnier, *Cours de cinématique* (3 volumes), 3^{e} édition, Gauthier-Villars, Paris, 1953.
72. Robert Deltheil et Daniel Caire, *Compléments de géométrie*, Baillères et Fils Editeurs, Paris, 1951 ; réédité avec le cours de géométrie de "mathématiques élémentaires" des mêmes auteurs in *Géométrie et compléments*, Gabay, Paris, 1989.

comment les réformateurs de 1902/1905 se situent dans un mouvement d'idées qui s'est constitué tout au long du XIXe siècle.

Reste un dernier point à étudier, cette remise en cause de la tradition euclidienne s'intègre dans ce qu'on pourrait appeler une conception empiriste de la géométrie, mettant l'accent sur le caractère expérimental de la connaissance géométrique, caractère expérimental occulté par le discours rationnel euclidien, lequel peut être lu, et a été effectivement lu, comme une auto-fondation de la géométrie.

Le caractère expérimental de la géométrie

Le caractère expérimental de la géométrie est l'une des idées-forces des réformateurs de 1902/1905, on l'a vu avec les *Instructions* citées ci-dessus (p. 2) ; Emile Borel, quant à lui, ira jusqu'à proposer la création de laboratoires de mathématiques dans les lycées[73]. C'est en partie la reconnaissance de ce caractère expérimental, cette part irréductible de connaissance empirique qui participe de la connaissance géométrique, qui a guidé Charles Méray dans sa remise en question de la tradition euclidienne, Charles Méray qui parle des faits de l'espace dans la préface de la seconde édition de son ouvrage et qui écrit, présentant cette seconde édition dans la revue *l'Enseignement mathématique*[74] en 1904 :

> *"J'imagine que la solidité de la Géométrie serait médiocre, si celle de ses axiomes était son unique caution, si, mille et mille fois, elle n'avait été éprouvée, ne pouvait l'être de nouveau, par l'accord constant de ses déductions avec les faits observables."*

Remarquons ici que, lorsqu'on parle du caractère expérimental de la géométrie (ou plus généralement des mathématiques), on porte un jugement tout autant sur les sciences expérimentales que sur la géométrie (ou les mathématiques)[75]. Il s'agit moins de déterminer, dans les sciences expérimentales comme dans les sciences mathématiques, la part respective de la connaissance empirique et de la connaissance rationnelle que d'expliciter, autant que cela soit possible, l'articulation entre ces deux modes de la connaissance, la façon dont elles se combinent, de sorte que l'on peut dire avec Gonseth[76] :

---

73. Emile Borel, "Les exercices pratiques de mathématiques dans l'enseignement secondaire", conférence faite le 3 mars 1904 au Musée pédagogique in *Œuvres*, Editions du C.N.R.S., Paris, 1972 ; t.4 p.2225-2256.
74. Charles Méray, "Justification des procédés et de l'ordonnance des «Nouveaux Eléments de géométrie»", *l'Enseignement mathématique*, vol.6, 1904.
75. Rudolf Bkouche, "Les mathématiques comme science expérimentale", *Bulletin APMEP*, n° 333, 1982 ; Rudolf Bkouche, Bernard Charlot, Nicolas Rouche, *Faire des mathématiques, le plaisir du sens*, Armand Colin, Paris 1991, chapitre 5.
76. Ferdinand Gonseth, *Les fondements des mathématiques*, Blanchard, Paris, 1926/1974, p.107.

> *"Dans toute expérimentation, il y a un résidu abstrait, et dans toute abstraction (mathématique) il y a un résidu intuitif. Ils suffisent pour nous faire comprendre que la distinction entre l'abstrait et l'expérimental, si l'on remonte assez haut, s'estompe et disparaît : ce sont les deux béquilles de notre effort de compréhension du monde. Elles ont le même fondement, et concourent aux mêmes fins, quelquefois par des voies communes, et quelquefois par des voies opposées. Nous résumons nos conclusions en ces termes :*
> *La distinction entre l'abstrait et l'expérimental n'est que de tendance, non d'essence."*

Le discours rationnel euclidien, nous l'avons déjà dit, a occulté ce caractère expérimental de la géométrie euclidienne, et ce, moins par le mode déductif de l'exposé que par le caractère même de l'énoncé des principes, lesquels, pour acquérir un statut scientifique, se veulent situer en dehors de toute connaissance empirique, tradition platonicienne oblige. C'est ainsi qu'il faut comprendre la distinction inaugurée par Platon entre le sensible et l'intelligible, moins comme l'explicitation de deux modes de la connaissance qui interagissent entre eux, que comme la reconnaissance d'une hiérarchie des modes de la connaissance, le sensible étant considéré comme le lieu d'une connaissance imparfaite, voire d'une fausse connaissance, l'intelligible seul représentant la vraie connaissance, ce qu'expriment, à deux mille ans de distance, d'une part le mythe platonicien de la caverne, d'autre part, ce qui est peut-être le plus profond cri d'angoisse de l'histoire de la philosophie, celui de Descartes écrivant *cogito ergo sum*. Encore faut-il préciser que le caractère platonicien supposé du discours euclidien relève moins des conceptions philosophiques d'Euclide (que nous ne connaissons pas) que du commentaire de Proclus[77], philosophe néo-platonicien qui vécut au Ve siècle après J.C. soit huit siècles après Euclide, commentaire qui nous apprend bien plus sur la pensée de Proclus que sur celle d'Euclide.

Le mode de connaissance des vérités géométriques via la méthode déductive, lequel ne relève pas de la seule doctrine platonicienne, a une double signification ; d'une part il permet d'ignorer le monde apparent (et en cela d'oublier les raisons des principes), d'autre part il conduit au caractère nécessaire des vérités géométriques.

> *"Nous estimons posséder la science d'une chose d'une manière absolue, et non pas, à la façon des Sophistes, d'une manière purement accidentelle, quand nous croyons que nous connaissons la cause par laquelle la chose est, que nous savons que cette cause est celle de la chose, et qu'en outre il n'est pas possible que la chose soit autre qu'elle n'est",*

écrit Aristote dans les *Seconds Analytiques*, expliquant la place de la démonstration dans la Science [78].

---

77. Proclus de Lycie, *Les Commentaires sur le premier livre des Eléments d'Euclide* (traduction Ver Eecke), Desclée de Brouwer, Bruges, 1948.
78. Aristote, *Les Seconds Analytiques* (traduction Tricot), Vrin, Paris, 1979, p.7.

La géométrie devenait ainsi pure rationalité, rejetant hors de son champ tout ce qui ne pouvait se plier aux règles dont elle se réclame, ainsi l'élimination du mouvement dont nous avons déjà parlé (cf. ci-dessus p.189). C'était cependant moins rejet de la connaissance empirique que reconstruction de la connaissance, laquelle doit apparaître sous la forme du discours canonique que l'on sait ; c'est cette volonté (liée à l'ordre platonicien) de reconstruction de la connaissance pour la plier aux règles d'une pure rationalité qu'exprime Archimède expliquant dans *La Méthode* la différence entre la recherche qui prend en compte la part d'empirisme (et comment ne le ferait-elle pas!) dans la connaissance géométrique, et le discours qui, dans son effort vers une pure rationalité, élimine toute trace du premier travail[79]. Comme si la recherche n'était que la marque de la faiblesse de l'esprit humain s'efforçant de sortir de la caverne, seul comptant le paysage de vérité une fois découvert ; conception inhumaine de la science qui est la marque de l'idéologie platonicienne, c'était peut-être le prix à payer pour que la géométrie grecque, se débarrassant de ses origines, devienne pure rationalité, ouvrant la voie qui mène au monde vrai[80].

Pourtant les limites de cet idéal d'une pure rationalité apparaissent avec l'étude des grands problèmes, d'autant que les solutions échappent à cette pure rationalité lorsqu'elles font appel au mouvement via la définition des courbes mécaniques, voire à des appareils permettant ces constructions (cf. ci-dessus p.190).

La prise en compte de ces limites remettra en question, à l'âge d'or de l'empirisme philosophique, une conception des mathématiques comme relevant de la seule raison. Mais ce sont aussi des considérations d'ordre didactique qui conduiront, à l'époque où se développe le caractère expérimental de la connaissance scientifique, à poser le problème de l'articulation entre le sensible et le rationnel dans la connaissance géométrique.

C'est ce qui apparaît dans les *Eléments de géométrie* de Clairaut publiés en 1741[81], ouvrage dans lequel l'auteur propose un enseignement de la géométrie englobant l'aspect expérimental d'icelle s'appuyant sur la connaissance sensible et l'aspect rationnel. Dans la préface de l'ouvrage, qu'on peut considérer comme un manifeste didactique, Clairaut critique l'exposé euclidien centré sur la logique, expliquant :

> "*Ce géomètre* (Euclide) *avait à convaincre des Sophistes obstinés qui se faisaient gloire de se refuser aux vérités les plus évidentes : il fallait donc qu'alors la Géométrie eût, comme la logique, le secours des raisonnements en pure forme, pour fermer la bouche à la chicane.*"

et il ajoute :

---

79. Archimède, *La Méthode* in *Œuvres*, Les Belles Lettres, Paris.
80. Proclus de Lycie, *op.cit.*, Premier prologue.
81. Alexis-Claude Clairaut, *Eléments de géométrie* (1741), Gauthier-Villars, Paris, 1922.

"Mais les choses ont changé de face. Tout raisonnement qui tombe sur ce que le bon sens décide d'avance, est aujourd'hui en pure perte, et n'est propre qu'à obscurcir la vérité, et à dégoûter les Lecteurs."

Mais c'est moins le raisonnement que Clairaut met en cause (comment un géomètre le pourrait-il faire!), que le préjugé platonicien qui veut que l'on ne raisonne, en géométrie, que sur des objets idéaux ; c'est peut-être l'apport le plus important d'une philosophie empiriste que de rappeler que le raisonnement commence sur les objets de la connaissance sensible. Le problème de la géométrie (et particulièrement celui de l'enseignement de la géométrie) est alors moins d'étudier les objets idéaux que nous propose la doctrine platonicienne que de raisonner sur les objets qu'on étudie (qu'ils soient ceux de la connaissance sensible ou ceux d'une construction rationnelle élaborée importe peu) pour les mieux connaître ; le raisonnement a pour fonction ce gain de connaissance et les objets idéaux du mathématicien (les idéalités mathématiques) se construisent en même temps que le raisonnement, autrement dit, c'est l'activité de raisonnement qui conduit à définir des objets idéaux[82].

Le raisonnement a ainsi une fonction instrumentale y compris via la construction des objets idéaux, ces objets idéaux (ici les idéalités mathématiques) qui ne sont que les instruments fabriqués par l'esprit humain dans son effort pour résoudre les problèmes que lui pose l'appréhension du monde.

Dans son *Essai sur les éléments de philosophie* publié en 1759, D'Alembert définit l'abstraction (le mode de construction de objets idéaux!) comme *"l'opération par laquelle nous considérons dans un objet une propriété particulière, sans faire attention aux autres[83]"* c'est dire que l'abstraction se détermine en fonction du type de problème étudié, c'est ainsi qu'il faut entendre cette définition de la géométrie comme *"la science des propriétés de l'étendue en tant qu'on la considère comme simplement étendue et figurée[84]"*, définition qui met l'accent non seulement sur les objets étudiés par la géométrie, mais aussi sur les problèmes que l'on se pose par rapport à ces objets, problèmes qui font la spécificité de la géométrie, ce qui nous renvoie au rôle joué par les problématiques dans l'enseignement de la géométrie selon Clairaut[85].

Dans ses *Eléments de géométrie*, dont la première édition est publiée en 1793, ouvrage qui marque le retour à un exposé plus proche de la tradition euclidienne, Legendre exprime encore cette conception instrumentaliste du raisonnement lorsqu'il écrit au début de l'ouvrage[86] :

"Axiome est une proposition évidente par elle-même.

---

82. Rudolf Bkouche, "De la démonstration", *Bulletin Irem de Lille*, n°22 ; *Actes du colloque inter-Irem géométrie*, Mèze, 1988 (publié par l'Irem de Montpellier, 1990).
83. Jean Le Rond D'Alembert, *Essai sur les Eléments de philosophie* (1759), Fayard, Paris, 1986, p.29.
84. Jean Le Rond D'Alembert, *op.cit.*, p.109.
85. Evelyne Barbin, "Les Eléments de géométrie de Clairaut : une géométrie problématisée", *Colloque inter-Irem géométrie*, Bordeaux, 1990 et *Repères-Irem*, n°4, 1991.
86. Adrien-Marie Legendre, *Eléments de géométrie* (1793), 12e édition, Firmin Didot, Paris, 1823.

Théorème est une vérité qui devient évidente au moyen d'un raisonnement appelé démonstration."

Legendre met ainsi l'accent à la fois sur l'évidence comme critère de vérité et sur le caractère instrumental du raisonnement dont l'objet est de fabriquer de nouvelles évidences. C'est en ce sens que l'ouvrage de Legendre, s'il montre un certain retour à la tradition euclidienne, reste marqué par l'empirisme français du XVIIIe siècle.

Mais cet empirisme géométrique n'est-il pas présent, même si l'une des fonctions du discours euclidien est de l'occulter, dans les *Eléments* ? et ne peut-on pas parler d'un empirisme euclidien ? La construction de la rationalité euclidienne ne porterait pas sur les objets idéaux à la façon platonicienne, elle serait la construction même de ces objets idéaux, permettant ainsi d'intégrer dans le champ de la rationalité le donné empirique sur lequel se définit la science géométrique, lui assurant ainsi ces deux points fondamentaux de la connaissance rationnelle : l'organisation des connaissances (leur mise en ordre) et la possibilité d'étendre la connaissance par le seul moyen du raisonnement.

L'explicitation du caractère expérimental de la géométrie qui se développe à partir du XVIIIe siècle serait alors moins la remise en cause de la tradition euclidienne qu'une façon de libérer celle-ci de sa gangue platonicienne ; qu'Euclide ait été platonicien ou non importe peu ici, la question est moins celle des conceptions philosophiques d'Euclide, dont nous avons déjà dit que nous ne les connaissons pas, que celle de sa lecture à une époque donnée, dans un contexte donné.

Dans cette histoire de l'explicitation du caractère expérimental de la géométrie, il nous faut citer les *Eléments de géométrie* de Lacroix[87], ouvrage dans lequel l'auteur s'appuie à la fois sur les logiciens de Port-Royal déjà cités, et sur une des formes extrêmes de l'empirisme français du XVIIIe siècle, savoir, le sensualisme de Condillac, soulignant leur volonté commune d'une construction naturelle de la connaissance, exprimant le *"vrai ordre de la nature"*, pour reprendre une expression d'Arnauld et Nicole[88], ce que Condillac exprime à la fin de son *Essai sur l'origine des connaissances humaines*[89] :

"La nature indique elle-même l'ordre qu'on doit tenir dans l'exposition de la vérité."

Dans le long discours préliminaire qui introduit la quatrième édition de son ouvrage, Lacroix, après avoir rappelé les règles de la méthode pascalienne[90] dont il fera une lecture empiriste et proclamé que *"toutes nos connaissances tirent leur origine de nos sensations"*, pose la question de la définition des premiers objets de la géométrie, remarquant, conformément à la règle pascalienne, qu'il

87. Sylvestre-François Lacroix, *Eléments de Géométrie*, 4e édition, Courcier, Paris, 1804.
88. Antoine Arnauld, Pierre Nicole, *op.cit.*, p.402.
89. Abbé de Condillac, *Essai sur l'origine des connaissances humaines* (1746), Editions Galilée, Paris, 1973.
90. Blaise Pascal, "De l'esprit de géométrie et de l'art de persuader" in *Œuvres complètes* (édité par Lafuma), Le Seuil, Paris, 1963.

est moins important de définir ces objets premiers que d'expliciter leurs premières propriétés, ainsi écrit-il à propos de l'angle :

"Mais est-il indispensable de définir l'angle ? Ne suffit-il pas de le montrer, et d'observer ensuite que deux angles sont égaux lorsqu'étant posés l'un sur l'autre, leurs côtés coïncident chacun en deux points, et qu'alors ils ne cesseront point de coïncider, quelque loin qu'on les prolonge ? Il suit évidemment de là que la grandeur d'un angle ne dépend pas de la longueur des côtés. Lorsque ces remarques seront bien entendues, on aura la notion complète de l'angle, et toutes les conséquences de cette notion seront facilement saisies[91]."

Ceci le conduit, en disciple de Locke et de Condillac de la pensée desquels il se réclame explicitement, à écrire :

"La méthode des Géomètres n'est pas l'unique cause de la certitude de leurs résultats, cette certitude est principalement due à la nature même des idées qu'ils ont eues à combiner[92]."

Et il ajoute :

"C'est donc moins dans la méthode que dans la simplicité des premières idées et dans leur évidence, que consiste la certitude du raisonnement[93]."

Cependant cet empirisme géométrique ne pourra suffire à remettre en question l'ordre euclidien (en ce sens l'ouvrage de Clairaut a une position singulière), il y faudra la géométrie projective et la géométrie du mouvement comme nous l'avons déjà signalé, il y faudra aussi le renouvellement de la pensée géométrique issu de la découverte (!) des géométries non-euclidiennes, ce qui posera, de l'intérieur même de la science géométrique, la question de la place de la connaissance empirique dans la détermination de la nature des connaissances géométriques.

Ce n'est pas ici le lieu d'étudier la part de l'empirisme dans la naissance de la géométrie non-euclidienne au début du XIXe siècle et nous renvoyons à un article antérieur[94]. Je citerai cependant Lobatchevsky qui écrit dans l'introduction de ses *Nouveaux Principes de géométrie* qu'il publie en 1837 :

"L'inanité des efforts depuis l'époque d'Euclide, dans le cours de deux mille ans, m'a conduit à soupçonner que la vérité à établir n'était pas impliquée dans les notions antérieures et que, pour la démontrer, il fallait, ainsi que cela a lieu pour d'autres lois de la nature, recourir à des expériences, par exemple aux observations astronomiques[95]."

Dans cette même introduction, Lobatchevsky explique comment il entend les principes de la connaissance géométrique, écrivant :

91. Sylvestre-François Lacroix, *op.cit.*, p.xvii.
92. Sylvestre-François Lacroix, *op.cit.*, p.xlv.
93. Sylvestre-François Lacroix, *op.cit.*, p.xlvi.
94. Rudolf Bkouche, "Euclide, Klein, Hilbert et les autres..." in Groupe inter-Irem épistémologie, *La rigueur et le calcul*, Cedic, Paris, 1982, p.35.
95. Nicolas Lobatchevsky, Nouveaux principes de géométrie (traduit du russe par Mallieux), *Mémoires de la Société Royale de Liège*, 3e année, t.2, 1900, p.5.

"En réalité dans la nature, nous ne connaissons que le mouvement, c'est ce qui rend possible les perceptions des sens. Tous les autres concepts, par exemple ceux de la Géométrie, sont produits artificiellement par notre esprit et tirés des propriétés du mouvement et, pour cette raison, l'espace lui-même, pris à part, n'existe pas pour nous[96]."

Et il précise :

"Il n'existe dans la nature ni droites, ni courbes, ni plans, ni surfaces courbes ; nous n'y trouvons que des corps, en sorte que tout le reste, conçu par notre imagination, n'existe que dans la théorie[97]."

En 1854, dans un article intitulé *Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie* (qui sera publié seulement en 1868 après la mort de son auteur), Riemann introduit la notion de variété à n dimensions (les variétés riemanniennes d'aujourd'hui) dont l'espace usuel n'est qu'un cas particulier ; Riemann explique alors que *"les propositions de la Géométrie ne peuvent se déduire des concepts généraux de grandeur, mais que les propriétés par lesquelles l'espace se distingue de toute autre grandeur imaginable à trois dimensions, ne peuvent être empruntées qu'à l'expérience[98]"* ; la détermination de la nature de l'espace est ainsi renvoyée à la physique.

Cette place de l'expérience dans la connaissance de la géométrie sera explicitée par celui qui fut le propagateur en France des idées non-euclidiennes, Jules Hoüel, dans son ouvrage de 1867 déjà cité (cf. ci-dessus p.190).

Dans la longue introduction qui constitue la première partie de l'ouvrage, Hoüel explique comment les axiomes énoncés au début des *Eléments* d'Euclide se divisent en deux groupes, *"les vérités abstraites qui se rapportent à la science des grandeurs en général"* d'une part et d'autre part ces propriétés qui sont *"tellement simples, tellement faciles à constater, que la force de l'habitude, jointe à la tradition constante de l'Ecole, a bien pu faire oublier leur véritable origine, et le rôle essentiel qu'ont joué les sens dans leur découverte[99]"*. Il nous faut rappeler ici que le postulat des parallèles est énoncé comme un axiome (l'axiome 11) conformément à certaines éditions de l'époque ; cela correspond à la diversité des manuscrits des *Eléments* qui nous sont parvenus, le texte original d'Euclide lui-même restant inconnu[100].

Et Hoüel explique[101] :

"D'autres propriétés, enseignées également par l'expérience, et jouissant de la même certitude immédiate que les précédentes, se déduisent néanmoins de celles-ci (les vérités énoncées comme axiomes) *comme*

96. Nicolas Lobatchevsky, *op.cit.*, p.15.
97. Nicolas Lobatchevsky, *op.cit.*, p.23.
98. Bernhard Riemann, "Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie" (traduit par Jules Hoüel) in *Œuvres Mathématiques*, Blanchard, Paris, 1968 ; réédition Gabay, Paris, 1990, p.281.
99. Jules Hoüel, *op.cit.*, p.2.
100. Thomas L. Heath, *op.cit.*, chapter 8.
101. Jules Hoüel, *op.cit.*, p.2.

conséquences, et on les a classées, sous le nom de théorèmes, à côté des vérités plus cachées, que le raisonnement seul pouvait faire apercevoir."

Et conclut :

"Le partage de ces vérités fondamentales en axiomes et théorèmes est, jusqu'à un certain point, arbitraire."

Ainsi ce qui importe, c'est moins le choix des vérités premières (admises pour leur évidence) que la détermination d'un ordre permettant, à partir de ces vérités premières issues de l'expérience, de déduire les autres plus cachées.

Après avoir analysé le début du livre I des *Eléments* d'Euclide (dont la traduction constitue la seconde partie de l'ouvrage), Hoüel propose, à des fins didactiques, dans la troisième partie, un *Essai d'une exposition rationnelle des principes de la géométrie élémentaire*[102] qu'il fonde sur la relation entre corps solides et mouvement (relation qu'il explicite dans les notes I et II de l'Appendice) et la donnée de quatre axiomes *empruntés à l'expérience*, c'est ainsi qu'il écrit :

"La Géométrie est fondée sur la notion indéfinissable et expérimentale de la solidité et de l'invariabilité des figures.
Elle emprunte, en outre, à l'expérience un certain nombre de données qu'on appelle axiomes."

Après avoir défini une figure comme *"un ensemble quelconques de points, de lignes ou de surfaces, considéré comme invariable de forme"*, Hoüel énonce le premier axiome :

"Trois points suffisent en général pour fixer dans l'espace la position d'une figure."

Les axiomes II et III énoncent, d'une façon assez lourde, les propriétés et l'existence de la droite et du plan, faisant appel à la superposition et au mouvement ; enfin le dernier axiome énonce que *"par un point donné, on ne peut mener qu'une seule parallèle à une droite donnée"*.

Hoüel revient, à la fin de l'ouvrage (Appendice, note IX) sur ses conceptions quant à l'enseignement de la géométrie élémentaire, rappelant, d'une part la place de l'expérience dans les notions premières, d'autre part les liens de la géométrie avec d'autres domaines comme la géographie, l'astronomie, l'arpentage, la stéréotomie..., l'aspect logique venant en second, autant comme moyen de démonstration que comme mise en ordre (et ici l'ordre est l'ordre euclidien).

"Le premier enseignement sera donc exclusivement expérimental, et peu à peu on fera voir à l'élève comment toutes les vérités n'ont pas besoin d'être séparément constatées par l'expérience, et comment elles sont les conséquences d'un certain nombre d'entre elles, nombre que l'on restreindra de plus en plus, à mesure que l'on avancera dans l'étude de la science, jusqu'à ce qu'on soit arrivé aux axiomes fondamentaux, dont le nombre ne peut plus être réduit[103]*."*

102. Jules Hoüel, *op.cit.*, p.37-58.
103. Jules Hoüel, *op.cit.*, p.83.

Ainsi Hoüel se situe dans une tradition euclidienne qu'il se propose de renouveler à la lumière des connaissances de son époque, particulièrement de la géométrie non-euclidienne (à laquelle il fait référence[104]), y compris dans l'enseignement de la géométrie. Le caractère expérimental des notions premières de la géométrie doit être pris en compte dans le premier enseignement de cette science mais la rigueur euclidienne doit avoir le dernier mot en fin de scolarité ; Hoüel prend ainsi en compte dans la construction euclidienne la part d'empirisme qui la sous-tend (cf. ci-dessus p.202), l'objectif restant cependant la construction de la rationalité euclidienne. Dans sa volonté d'un retour à l'ordre euclidien, Hoüel ira jusqu'à reprocher à Legendre de mêler concepts numériques et concepts géométriques dans ses *Eléments de géométrie*, en particulier en ce qui concerne la théorie des proportions et des incommensurables[105].

Ce rapide aperçu historique se proposait de montrer l'apport de l'empirisme philosophique dans le renouvellement de la pensée géométrique (ce qui ne signifie pas que ceux qui s'en sont inspirés se soient réclamés de l'empirisme). En ce qui concerne l'enseignement, ce renouvellement s'est situé à l'intérieur de la tradition euclidienne (à l'exception de quelques ouvrages tel celui de Clairaut), accordant une place importante aux aspects empiriques des notions premières de la géométrie qu'il débarrassait ainsi de sa gangue platonicienne, comme nous l'avons déjà remarqué, l'objectif restant celui de la construction, sur un mode euclidien, d'une géométrie purement rationnelle.

Ainsi s'affirmait une conception didactique qui prenait en compte les deux aspects de la connaissance géométrique pour mieux les distinguer en fin de parcours, l'objectif étant d'amener l'élève, à partir des notions premières issues de l'expérience vers une connaissance purement rationnelle. Ceci apparaît à la lecture des *Instructions* de 1905 déjà citées, qui renvoient l'aspect expérimental aux sciences physiques et l'aspect déductif aux sciences mathématiques, distinction que l'on retrouve encore aujourd'hui à travers l'imagerie d'une physique concrète et d'une mathématique abstraite, qui confond d'une façon quelque peu naïve, d'une part le concret et l'expérimental, d'autre part l'abstrait et le déductif, avec cette conséquence didactique encore prégnante aujourd'hui que le concret précède l'abstrait dans la construction de la connaissance. Ceci apparaîtra dans la polémique au moment de la réforme lorsque certains réformateurs voudront distinguer entre un enseignement plus concret dans le premier cycle de l'enseignement secondaire (de la sixième à la troisième) et un enseignement plus abstrait dans le second cycle. C'est ce que Bourlet appellera une suite d'enseignements concentriques[106] et que Charles Méray critiquera violemment[107]. Il nous faut préciser que l'enseignement plus

104. Jules Hoüel, *op.cit.*, note VI, p.73-78.
105. Jules Hoüel, *op.cit.*, p.3 et 4.
106. Carlo Bourlet, "Nouveaux Eléments de géométrie par Monsieur Charles Méray", *op.cit.*
107. Charles Méray, "Mes Nouveaux Eléments de géométrie", *Revue scientifique (Revue rose)*, 5e série, t.7, p.103-198 et 231-247.

abstrait proposé par Bourlet n'est plus l'euclidien, c'est celui de la théorie des groupes comme il l'explique dans un article publié en 1906 dans les *Nouvelles Annales de mathématiques*[108], nous y reviendrons.

Les ouvrages de la réforme

Si Méray s'inscrit dans le courant *expérimentaliste* dont nous avons déjà parlé ci-dessus, on peut distinguer dans sa conception de l'enseignement de la géométrie élémentaire deux tendances :

La première, proche de celle de Clairaut, est de ne pas séparer les deux aspects de la géométrie, ceci le conduit à multiplier les assertions non démontrées (vérités issues de l'expérience), les énonçant au fur et à mesure des besoins, ce qui lui permet de *"rendre intuitifs la plupart des premiers théorèmes, uniformiser leurs démonstrations et établir dans leur enchaînement une parfaite régularité*[109]*"* comme il le dit dans la préface de l'édition de 1874.

La seconde, contradictoire d'une certaine façon à la première, si elle le conduit à renouveler l'ordre de l'exposé dans un sens qui lui paraît plus naturel, l'amène, par souci de montrer à ses contradicteurs que son exposé est aussi rigoureux que l'euclidien, à énoncer les vérités premières d'une façon quelque peu artificielle et compliquée, comme nous le verrons ci-dessous.

On peut alors penser que Méray n'a pas osé aller jusqu'au bout de sa pensée, c'est une critique que lui fera, à l'époque de la réforme, Jules Tannery, qui considère comme exemplaire d'un premier enseignement de la géométrie l'ouvrage déjà cité de Clairaut[110].

> *"La Géométrie est la science des corps envisagés seulement du point de vue de leur forme, de leur étendue et de leurs positions relatives. Comme la plupart des autres sciences, elle se compose de vérités ou propositions de deux sortes : les unes nous viennent de l'expérience combinée avec l'abstraction, et nous sont ordinairement devenues si familières, que nous les trouvons évidentes ; les autres, beaucoup plus nombreuses, se tirent de celles-ci par le raisonnement, et sont, à proprement parler, la véritable matière de la géométrie rationnelle.*
> *Les vérités du premier genre se nomment des axiomes ; celles du second, des théorèmes*[111]*."*

écrit Méray au début de l'édition de 1874.

On peut rapprocher ce texte des idées développées par Hoüel. Nous verrons apparaître dans la suite de cet article plusieurs points communs entre Hoüel et Méray ; cependant, alors que Hoüel, comme nous l'avons déjà

108. Carlo Bourlet, "Théorie des parallèles basée sur la translation rectiligne", *Nouvelles Annales de mathématiques*, 4e série, t.VI, 1906.
109. Charles Méray, *Nouveaux Eléments de géométrie*, 1re édition, *op.cit.*, préface, p.XII.
110. Jules Tannery, "De l'enseignement de la géométrie élémentaire", *Revue pédagogique*, t.XLIII, 1903 ; réédité in Jules Tannery, *Science et philosophie*, Felix Alcan, Paris, 1924.
111. Charles Méray, *Nouveaux Eléments de géométrie*, 1re édition, *op.cit.*, p.1.

remarqué, maintient l'idéal euclidien d'une construction purement rationnelle, Méray va beaucoup loin dans l'imbrication de l'expérimental et du rationnel ; c'est que Méray pose la question du lien entre la géométrie et la physique, comparant les axiomes de la première et les hypothèses de la seconde, ce qu'il précisera dans un article postérieur à la première édition de son ouvrage[112], puis dans la seconde édition d'icelui lorsqu'il complètera la définition des axiomes qui ne se réduisent pas aux seules vérités issues de l'expérience directe, mais qui comprennent *"des vues générales abstraites de l'esprit, née de l'imagination inductive, trouvant ensuite une confirmation définitive dans la concordance constante de leurs conséquences observables avec les faits de la nature"*, et Méray précise :

> *"Dans leur essence et dans leur rôle, ces vues générales ne diffèrent pas des hypothèses qui dominent toute science expérimentale dès qu'elle commence à s'élever au dessus de l'empirisme grossier[113]."*

Le nombre des hypothèses ou axiomes qui fondent une théorie scientifique est alors de peu d'importance dans le développement de cette théorie et Méray écrit dans l'article cité ci-dessus :

> *"La rigueur d'un enchaînement de propositions, d'une théorie scientifique, comme on le dit, ne dépend donc, ni de la nature, ni du nombre des hypothèses ou axiomes qui la fondent, mais seulement d'un départ fait exactement par l'esprit, entre eux et ce qu'il en tire par le raisonnement[114]."*

La part de connaissance empirique n'est donc plus seulement un passage obligé vers la construction d'un rationnel pur comme cela apparaît encore chez Hoüel, elle engage le rationnel en tant que rationnel (et en cela on peut rapprocher Méray de Clairaut), et l'on comprend l'opposition de Méray à certaines conceptions des réformateurs de 1902/1905, que ce soit la distinction définie dans les *Instructions* de 1905, ou la suite d'enseignements concentriques proposées par Carlo Bourlet.

Le débat est toujours actuel, bien que sous une forme parfois caricaturale, lorsqu'on oppose un *théorique pur* détaché de toutes relations avec la connaissance empirique et un expérimental préparatoire (les *activités* proposées par l'enseignement d'aujourd'hui[115]) ; mais ce n'est pas le lieu d'en parler ici. En fait ce débat pose le problème de l'articulation des divers aspects de la connaissance géométrique et nous renvoyons ici à l'œuvre trop méconnue de Gonseth, en particulier *La géométrie et le problème de l'espace*[116].

---

112 Charles Méray, "L'enseignement des mathématiques", *L'Enseignement mathématique*, t.3, 1901, p.171-194 ; cet article est extrait des "Considérations sur l'Enseignement des Mathématiques" paru dans la *Revue bourguignonne de l'Enseignement supérieur* en 1892.
113. Charles Méray, *Nouveaux Eléments de géométrie*, 2e édition, *op.cit.*, p.1.
114. Charles Méray, *L'Enseignement des mathématiques*, *op.cit.*, p.179.
115. Rudolf Bkouche, "Pour une critique de la raison mathématique", *ICME 6*, Budapest, 1988 et IREM de Lille ; Rudolf Bkouche, Bernard Charlot, Nicolas Rouche, *Faire des Mathématiques, le plaisir du sens*, Armand Colin, Paris, 1991, chap.1 (sous presse).
116. Ferdinand Gonseth, *La géométrie et le problème de l'espace*, Editions du Griffon, Neuchatel, 1945/1955.

Après ces remarques d'ordre général, nous revenons à la première édition de l'ouvrage de Méray.

Parmi les abstractions fondamentales sur lesquelles se construit la géométrie, Méray définit, dans le premier chapitre, la figure, le point, la ligne, la surface.

> *"La figure est en général ce en quoi l'esprit réduit un corps ou un assemblage de corps quand il s'en fait une idée purement géométrique...*
> *Une figure est dite solide, quand elle est invariable dans la forme et la position relative de ses parties (...), sinon dans sa position dans l'espace.*
> *Un meuble très rigide quelconque, donne l'idée d'une semblable figure...*
> *Deux figures solides sont égales, quand on peut (au moins par la pensée) les amener à coïncider, c'est-à-dire à se confondre dans toutes leurs parties."*

Comme souvent, à propos des premières définitions, Méray se soucie moins de leur énoncé que de l'idée à laquelle elle renvoie et, pour cela, explicite quelques exemples.

L'idée de ligne est ainsi donnée par un *"fil très fin"* ou *"la trace lumineuse apparente d'un point brillant animé d'une grand vitesse"*, l'idée de ligne droite étant donnée par la *"trace d'un rayon lumineux très délié dans une atmosphère poudreuse et obscure"* ou *"un fil flexible bien tendu"*.

De même l'idée de surface est donnée par *"une pièce d'étoffe déployée"*, le plan étant défini comme *"une surface semblable à celle d'une eau tranquille, d'une glace bien polie"*.

Le problème est moins de donner la définition d'un objet géométrique que d'énoncer les propriétés que cet objet doit satisfaire, retrouvant le point de vue développé par Lacroix dans ses *Eléments de Géométrie* (cf. ci-dessus p.203) ; ainsi Méray énonce les axiomes de la droite :

> *"Par un même point quelconque, on peut faire passer une infinité de droites, mais une seule par deux points donnés (distincts)."*

Ce qui implique qu'*"une droite mobile peut glisser indéfiniment sur une droite fixe"*.

De même, on énonce l'axiome du plan :

> *"Par un même point de l'espace, on peut faire passer une infinité de plans ; un nombre illimité de ces plans passent par un second point donné quelconque, et tous contiennent entièrement la droite qui joint ces deux points."*

Ce qui implique qu'*"on peut faire glisser indéfiniment une droite mobile sur un plan fixe et un plan mobile sur une droite fixe"*.

Enfin, droites et plans sont reliés par l'axiome suivant :

> *"Par une droite donnée et un point qui ne lui appartient pas, on peut toujours faire passer un plan, et un seul."*

Il en résulte que deux plans coïncident lorsqu'ils ont trois points non alignés ; Méray remarque alors qu'*"un plan mobile peut ainsi glisser indéfiniment sur un plan fixe"*.

Ces propriétés vont permettre d'étudier les mouvements de translation et de rotation, conduisant à l'étude du parallélisme et de la perpendicularité.

Ici encore il s'agit moins d'énoncer une définition que de donner une idée de la notion, ce qui permettra d'en énoncer les propriétés caractéristiques comme axiomes.

Le mouvement de translation (*le plus simple des mouvements*) est celui d'*"un tiroir bien ajusté dans son ouverture"* ou d'*"un piston dans son corps de pompe"* ; Méray peut alors énoncer les caractères géométriques de la translation :

> *"1) Tous les points de la figure se meuvent à la fois.*
>
> *2) Par chaque point de l'espace passe une droite unique sur laquelle glisse simplement la droite mobile liée invariablement à la figure, qui coïncide une fois avec elle à un instant quelconque du mouvement."*

Ces droites de l'espace sont les *"glissières fixes"* du mouvement, sur lesquelles glissent les *"glissières mobiles"* liées à la figure mobile.

> *"3) Tout plan lié invariablement à la figure et passant par une glissière mobile, glisse aussi simplement sur le plan de l'espace avec lequel il coïncide à un instant donné quelconque du mouvement."*

Méray y ajoute deux axiomes, le premier exprimant qu'il est possible d'imprimer à une figure solide un mouvement de translation amenant un point de la figure donné en un point donné, le second exprimant que si l'on imprime successivement à une figure solide donnée deux mouvements de translation, alors il existe un mouvement de translation (et un seul) amenant la figure de sa position initiale à sa position finale.

Méray peut alors définir le parallélisme de deux droites :

> *"Deux droites (distinctes) sont parallèles quand une simple translation de l'une suffit à la superposer sur l'autre."*

Les propriétés du mouvement de translation impliquent alors que *"par un point donné, extérieur à une droite donnée quelconque, on peut toujours mener une parallèle à cette droite, et une seule"*.

Si la notion de parallélisme est liée au mouvement de translation, la notion de perpendicularité est liée au mouvement de rotation ; le mouvement de rotation est celui, par exemple, *"d'une porte qui s'ouvre ou d'une meule de rémouleur en mouvement"*. Méray peut alors énoncer les axiomes des rotations :

> *"1) Par chaque point de l'axe de rotation* (la droite dont tous les points sont immobiles), *passe dans la figure tournante, un plan unique dont le mouvement se réduit à un simple glissement sur lui-même, c'est-à-dire sur une de ses positions dans l'espace. Ce plan ne contient pas l'axe.*
>
> *2) Un plan étant donné, par un quelconque de ses points on peut mener une droite unique, autour de laquelle le plan lié invariablement à elle, peut tourner indéfiniment en glissant sur sa position primitive. Cette droite n'est pas située dans le plan."*

Méray énonce alors qu'*"un plan et une droite sont perpendiculaires s'ils sont dans la relation définie par les axiomes précédents"*, puis, d'une façon assez lourde, il énonce la possibilité de superposer deux figures chacune définie par un plan et une droite perpendiculaire, enfin la possibilité d'amener par une rotation un plan passant par une droite donnée sur un autre plan passant par cette droite. On peut alors démontrer les propriétés classiques liées à la perpendicularité.

Cette façon de *coller* à l'expérience conduit à un exposé lourd et compliqué, ce que lui reprocheront, non sans raison, les détracteurs de Méray.

Carlo Bourlet reprenant les idées de Méray, essaiera, dans ses ouvrages d'enseignement à destination des lycées[117] d'être plus expérimental, s'appuyant sur des dispositifs matériels en liaison avec le dessin géométrique (lequel figure explicitement dans les programmes[118]). Bourlet sépare cependant géométrie plane et géométrie dans l'espace, même s'il utilise des arguments spatiaux dans la mise en place des notions géométriques ; en fait Bourlet est plus intéressé par l'utilisation du mouvement que par la fusion des géométries. Comme Méray, Bourlet n'énonce pas de définition de la droite et du plan, l'idée de droite est donnée par un fil tendu, l'idée de plan par la surface d'une table, d'un mur ou d'une eau calme, le problème étant d'énoncer des propriétés explicites à partir desquelles on peut mettre en place le raisonnement.

Le mouvement de translation est ainsi défini, en référence au dessin géométrique, par le glissement d'un T le long d'une planche à dessin, ou le glissement d'une équerre le long d'une règle ; pour le préciser Bourlet écrit :

> *"Soit **P** un plan fixe et **D** une droite fixe tracée dans le plan. Imaginons un second plan **p** et une droite **d** tracée dans ce plan. Plaçons le plan **p** sur le plan **P** de façon que la droite **d** coïncide avec la droite **D**. Nous pouvons alors faire glisser le plan mobile **p** sur le plan fixe **P** de façon que la droite **d** appelée glissière mobile glisse sur la droite **D** appelée glissière fixe ; nous réalisons ainsi un mouvement de translation rectiligne."*

Bourlet énonce alors le postulat :

> *"Deux translations rectilignes successives peuvent être remplacées par une seule."*

Bourlet peut alors, combinant raisonnement et expérimentation, obtenir les propriétés des translations et des parallèles, et montrer en particulier que *"par un point d'un plan, on peut mener une parallèle à une droite de ce plan et une seule"*.

Dans le compte-rendu de l'ouvrage de Méray qu'il a publié dans les *Nouvelles Annales de mathématiques* en 1904 (cf. ci-dessus p.184), Bourlet insiste sur la substitution au postulat des parallèles de l'énoncé exprimant que la composée de deux translations est une translation, énoncé qu'il situe dans le contexte du *Programme d'Erlangen* de Félix Klein[119] ; il développera ce point de vue dans un article de 1906 dans lequel il explique les raisons de cette nouvelle

117. Carlo Bourlet, *Cours abrégé de géométrie, op.cit.*
118. Bruno Belhoste, "Histoire de l'enseignement des mathématiques : la réforme de 1902", *op.cit.*
119. Felix Klein, *Le programme d'Erlangen* (1872) (traduction Padé), Gauthier-Villars, Paris, 1974.

présentation de la géométrie élémentaire dans l'enseignement d'icelle[120]. Poincaré fera une remarque analogue dans un article publié en 1904 dans *l'Enseignement Mathématique*[121].

Cette intervention du *Programme d'Erlangen* que Méray ignorait lorsqu'il rédigeait son ouvrage, apporte un nouvel éclairage sur le rôle du mouvement dans la géométrie comme le remarquent les réformateurs de 1902/1905 ; cependant cette formulation confondait les notions de mouvement et de transformation et elle sera contestée par Méray qui refusera le point de vue des groupes de transformations dans l'enseignement de la géométrie élémentaire ainsi qu'il l'écrit dans son article cité de la *Revue scientifique*[122].

Comme souvent les reformulations d'un domaine de la science issues de nouveaux fondements interviennent dans l'enseignement à côté. L'analyse de Felix Klein et les remarques de Poincaré sur le lien entre le principe de l'égalité par superposition et la théorie des groupes[123] se construisent sur une connaissance géométrique déjà élaborée et par conséquent elles ne sauraient participer de l'enseignement élémentaire de la géométrie. Ce fut cette même confusion entre fondements d'une science et enseignement élémentaire de cette science qui est apparue à l'époque de la réforme des *mathématiques modernes*.

Mais une telle confusion est aussi liée à la signification ambiguë du terme *éléments*, confusion qui a amené à considérer l'ouvrage d'Euclide comme un ouvrage élémentaire (au sens de l'apprentissage) ce qu'il n'est pas comme le remarque Glaeser[124]. Le terme *éléments* peut être considéré comme l'ensemble constitué par les connaissances nécessaires à la résolution des grands problèmes d'un domaine de la science, et dans ce cas les *Eléments* s'adressent à ceux qui sont déjà initiés à cette science, les *Eléments* ont ici un rôle fondateur, c'est le sens du titre de l'ouvrage d'Euclide comme c'est le sens du titre de l'ouvrage de Bourbaki *Eléments de mathématiques*. Mais le terme *Eléments* signifie aussi le matériau nécessaire à l'apprentissage d'un domaine de la connaissance, c'est ainsi qu'on parle de l'école *élémentaire*. Il faut dire, pour comprendre les raisons de cette confusion, qu'elle n'est pas seulement la conséquence d'une identité de terme, cette identité de terme exprime elle-même l'ambiguïté de ce qui constitue le commencement d'une connaissance où se mêle l'ordre incertain de l'apprentissage et l'ordre logique du discours de la science constituée, ambiguïté qui s'exprime dans le titre même de nombreux ouvrages d'*Eléments*.

Les philosophes de Port-Royal comme plus tard les empiristes des Lumières en recherchant un ordre *naturel* de la connaissance ont contribué à en-

---

120. Carlo Bourlet, "Théorie des parallèles basée sur la translation rectiligne", *op.cit.*

121. Henri Poincaré, "Les définitions mathématiques et l'enseignement", *l'Enseignement mathématique*, t.6, 1904 p.257-283, et *Science et Méthode*, Flammarion, Paris 1930, livre II, chapitre II.

122. Charles Méray, "Mes Nouveaux Eléments de géométrie" *op.cit.*

123. Henri Poincaré, *La Science et l'Hypothèse*, Flammarion, Paris 1902/1968, chapitre IV..

124. Georges Glaeser, "Esquisse d'une histoire de transposition de l'enseignement des mathématiques", *Colloque inter-Irem Histoire et épistémologie des mathématiques*, Strasbourg, 1987, publié par l'Irem de Strasbourg.

tretenir cette confusion, espérant l'impossible synthèse de l'ordre de l'élaboration de la connaissance et de l'ordre du discours.

Ainsi la rencontre, dans la seconde moitié du XIX^{e} siècle, de deux mouvements d'idées, la réintroduction du mouvement dans la géométrie d'une part et d'autre part l'élaboration de la notion de transformation conduisant à la synthèse du *Programme d'Erlangen*, allait entretenir cette confusion chez les réformateurs de 1902/1905. On comprend que Méray ait protesté, mais la pénible construction de Méray, dans son souci d'une présentation rigoureuse, montrait la même ambiguïté, y compris dans le titre de ses *Eléments de Géométrie*.

C'est que le problème de l'enseignement d'une science, avant que d'être un problème pédagogique, reste l'un des problèmes épistémologiques les plus difficiles ; il s'agit moins de fonder une connaissance déjà élaborée que d'amener *l'apprenant* à construire son propre rapport au savoir qu'on lui enseigne, mais ce n'est pas le lieu d'en discuter ici et nous renvoyons à l'ouvrage de Bkouche, Charlot, Rouche[125] qui pose le problème de l'apprentissage moins à travers les méthodes pédagogiques qu'à travers le sens, pour l'apprenant, du domaine de la connaissance enseignée.

La difficulté du problème explique les polémiques autour de chaque mouvement de réforme, polémiques qui relèvent moins d'une *querelle des Anciens et des Modernes* comme une certaine paresse intellectuelle inclinerait à les présenter, que de l'affrontement de positions philosophiques et idéologiques.

La réforme : critique et fin.

La critique de la réforme de 1902/1905 sera double, d'une part on craindra, avec la fin de l'exposé euclidien, une perte de la rigueur du raisonnement conduisant à ce qu'on appelle aujourd'hui une *baisse de niveau*, d'autre part certains reprocheront aux réformateurs de ne pas suffisamment prendre en compte l'aspect expérimental de la géométrie, ainsi Jules Tannery envers Méray dans l'article cité ci-dessus (cf. ci-dessus p.208), ainsi Marotte envers Bourlet dans le débat rapporté dans le *Bulletin de la Société française de philosophie* déjà cité (cf. ci-dessus p.184), tous deux s'appuyant sur les *Eléments de Géométrie* de Clairaut.

Il faut remarquer que la réforme eut plus de succès dans l'enseignement primaire supérieur et l'enseignement professionnel comme le montrent certains manuels alors que l'enseignement classique se montra plus réservé. Il est vrai que le libellé du programme n'obligeait les enseignants ni à la fusion de la géométrie plane et de la géométrie dans l'espace, ni à l'utilisation explicite du mouvement, et les *Instructions*, comme nous l'avons déjà remarqué, propo-

125. Rudolf Bkouche, Bernard Charlot, Nicolas Rouche, *Faire des Mathématiques : le plaisir du sens, op.cit.*

saient une distinction entre un aspect expérimental plus physique et un aspect théorique plus mathématique.

Un enseignement plus conforme à la tradition reviendra après la Première Guerre Mondiale, il restera cependant, dans les classes de mathématiques élémentaires, une étude des transformations (déplacements, symétries, inversion) introduisant ce qu'on appelait alors *la géométrie moderne* autour de la géométrie projective et du *Programme d'Erlangen* ; l'un des ouvrages canonique sera le cours de *Géométrie* pour la classe de mathématiques élémentaires de Deltheil et Caire publié au milieu de ce siècle suivi des *Compléments de géométrie* à l'usage des élèves des classes préparatoires et des candidats aux concours d'enseignement[126].

Il reste que la réforme de 1902/1905 a posé, et pose encore, un certain nombre de questions sur l'enseignement de la géométrie (et plus généralement l'enseignement des mathématiques) dont la plus importante est celle de l'articulation entre le théorique et l'expérimental.

Parce qu'ils s'appuyaient en partie sur une philosophie empiriste, Méray et les réformateurs de 1902/1905 espéraient renouveler, en prenant en compte la part d'empirisme de la connaissance mathématique, un enseignement des mathématiques devenu, à leurs yeux, trop formel ; ils n'y réussirent qu'en partie, peut-être parce que, comme le dit Jules Tannery se référant à Clairaut[127], ils sont restés à mi-chemin. Quelques vingt ans plus tard, l'enseignement revenait à des voies plus classiques.

Plus tard, dans la seconde partie de ce siècle, la grande réforme de l'enseignement des mathématiques s'appuyait au contraire sur les méthodes formalistes, celles qui avaient permis aux mathématiciens de ce siècle de répondre à ce qu'on a appelé la crise des fondements. Mais la réponse formaliste, comme le fut à l'époque la doctrine platonicienne, refusait la part d'empirisme de la connaissance ; ce refus, nécessaire au moment de la mise en place de la méthode (l'euclidienne comme l'hilbertienne) relève essentiellement de la méthodologie. Dans tous les cas, ce refus ne saurait être principe de science, encore moins principe d'enseignement des sciences. C'est peut-être ce que peut nous apprendre aujourd'hui la philosophie des réformateurs du début de ce siècle.

126. Robert Deltheil et Daniel Caire, *Géométrie et Compléments*, *op.cit.*
127. Jules Tannery, *op.cit.*