Christian Gilain

La théorie qualitative de Poincaré et le problème de l'intégration des équations différentielles

En 1881, paraissait dans le *Journal de mathématiques pures et appliquées* la première partie d'un mémoire intitulé "Sur les courbes définies par une équation différentielle", où Henri Poincaré créait ce que l'on a appelé depuis la théorie qualitative (ou géométrique) des équations différentielles ordinaires. L'intérêt scientifique de cette théorie et l'éclairage que ce mémoire fournit sur certains aspects importants de l'histoire de l'analyse, en particulier sur la conception du problème de l'intégration des équations différentielles, justifie une étude historique détaillée[1].

1. La place du mémoire "Sur les courbes" dans l'œuvre de Poincaré

Il s'agit d'un long mémoire composé de dix-neuf chapitres représentant plus de deux cents pages in-quarto, qui paraît de manière échelonnée en quatre parties en 1881, 1882, 1885 et 1886 [Poincaré, *Sur les courbes*]. L'étalement dans le temps ne concerne pas seulement la publication mais aussi l'élaboration du mémoire et il sera utile, pour mieux comprendre la démarche de Poincaré, de préciser autant que possible la chronologie de son travail. Pour cela, outre les références contenues dans le mémoire lui-même, on dispose de cinq notes aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (*CRAS*) qui en annoncent divers fragments et des notices sur ses travaux rédigées en 1884 et 1886 pour des candidatures à l'Académie [1884a ; 1886][2]. C'est le 22 mars 1880

---

1. Une telle étude était le sujet de notre thèse : "La théorie géométrique des équations différentielles de Poincaré et l'histoire de l'analyse" (1977), ainsi que celui de notre communication au XVI^e Congrès international d'histoire des sciences en 1981. Ces textes n'ont pas alors été publiés. C'est une partie des analyses qu'ils contenaient que l'on trouvera ici, sous une forme d'ailleurs renouvelée.

2. La *Notice* de 1884 citant la note aux *CRAS* du 24 décembre 1883, mais pas celle du 4 février 1884, il est vraisemblable que sa rédaction date de janvier 1884 (l'élection académique a eu lieu le 3 mars). Quant à la *Notice* de 1886, elle est datée du 14 octobre et correspond donc à la candidature de Poincaré à l'élection qui eut lieu le 31 janvier 1887 et où il fut élu. L'*Analyse* de ses travaux reproduite dans les *Œuvres* a été publiée en 1921 dans les *Acta Mathematica* et, d'après Mittag-Leffler, a été rédigée par Poincaré en 1901. En ce qui concerne les travaux étudiés ici sur les courbes définies par les équations différentielles, l'*Analyse* de 1901 [*Œuvres* I, XXI-XXXI] est quasi identique à la *Notice* de 1886, laquelle reproduit, à quelques compléments près, la *Notice* de 1884 (ces trois textes sont par contre souvent différents sur les travaux de mécanique céleste dont beaucoup sont postérieurs à 1886).

qu'est soumis à l'Académie des sciences de Paris un mémoire de Poincaré intitulé *Sur les courbes définies par une équation différentielle*. Avant que la commission nommée pour examiner le texte ait présenté son rapport, l'auteur demande, par une lettre du 11 juin[3] au secrétaire perpétuel, de pouvoir retirer le manuscrit aux fins de publication dans le *Journal de mathématiques pures et appliquées* [4], ce qui lui est effectivement accordé lors de la séance du 14 juin. Le résumé du mémoire[5], qui a constitué la note publiée aux *CRAS* [Poincaré 1880], fait apparaître qu'il s'agissait alors certainement des deux premières parties publiées en 1881 et 1882 respectivement.

Ce travail qui, on le verra, établit les fondements de la nouvelle théorie dans ses objets et ses méthodes, se situe donc après sa thèse et avant ses recherches célèbres sur les fonctions automorphes. Plus précisément, si l'on considère la période 1878-1881 correspondant au début de l'œuvre scientifique de Poincaré et qu'il consacre principalement aux équations différentielles, on voit s'y succéder plusieurs types de travaux :

a) Une étude analytique locale des équations différentielles générales, dans le domaine complexe, au voisinage des points singuliers. Situés dans la période d'élaboration de sa thèse, ces travaux sont clairement inspirés par le mémoire de Briot et Bouquet *Recherches sur les propriétés des fonctions définies par des équations différentielles,* publié en 1856[6]. Dans une note de 1878, au titre presque identique à celui du mémoire de Briot et Bouquet [*Œuvres* I, XXXVI-XLVIII], Poincaré complète les résultats de ces derniers, et dans sa thèse, soutenue le 1er août 1879, il étend l'étude aux cas des points singuliers des systèmes d'équations différentielles et des équations aux dérivées partielles du premier ordre [*Œuvres* I, IL-CXXIX].

b) L'étude géométrique des courbes définies par une équation différentielle, dans le mémoire présenté le 22 mars 1880 à l'Académie ; elle concerne les propriétés qualitatives globales des intégrales des équations différentielles non linéaires du premier ordre et du premier degré, dans le domaine réel.

c) Une étude locale des intégrales des équations différentielles linéaires dans le domaine complexe, au voisinage des points singuliers irréguliers. Ce travail, prolongeant celui de L. Fuchs qui avait étudié les solutions au voisinage des points singuliers réguliers, constitue la première partie du mémoire

---

3. Voir la pochette de la séance du 14 juin 1880 aux Archives de l'Académie des sciences de Paris.

4. Poincaré indique que H. Résal, alors responsable du *Journal,* lui a fait espérer cette publication. Signalons qu'Henri Résal avait été le professeur de mécanique de Poincaré à l'Ecole polytechnique.

5. Le manuscrit autographe de ce résumé figure dans la pochette de la séance du 22 mars 1880.

6. On sait que Poincaré a eu très tôt des contacts personnels avec Briot et Bouquet [Bellivier 1956, 133]. Bouquet présida le jury de sa thèse et, d'après la lettre de Poincaré du 11 juin 1880 (voir *supra* note 3), c'est lui qui présenta le mémoire *Sur les courbes* à l'Académie et fut chargé de le reprendre au nom de son auteur.

soumis par Poincaré au concours pour le grand prix des sciences mathématiques, envoyé à la fin du mois de mai 1880 à l'Académie[7].

d) La découverte de nouvelles fonctions de variable complexe permettant d'exprimer globalement les intégrales de nombreuses équations différentielles linéaires à coefficients algébriques. Le point de départ de cette recherche, a-t-il lui-même précisé, est sa lecture, début mai 1880, d'un mémoire de Fuchs à l'analyse critique duquel il consacre la deuxième partie de sa contribution pour le grand prix de l'Académie. C'est au cours du mois de juin 1880, comme en témoignent sa correspondance avec Fuchs [*Œuvres* XI] et le premier supplément à son mémoire donné à l'Académie le 28 juin [Gray 1986, ch. 6], que Poincaré va découvrir, sur le cas de l'équation différentielle hypergéométrique, l'existence et les propriétés des premières fonctions qu'il appellera fuchsiennes. Ce thème va alors l'occuper de manière intensive dans les mois et les années suivants et sera l'objet d'un nombre considérable de publications à partir de février 1881.

e) On peut relever aussi, en mars et avril 1881, des notes aux *CRAS* sur l'intégration des équations différentielles linéaires par le moyen de fonctions connues, algébriques ou abéliennes. Dans ces recherches, qui ont une forte composante algébrique, Poincaré utilise notamment des résultats de Jordan sur les groupes des équations.

On remarquera non seulement la quantité et la qualité des travaux sur les équations différentielles ainsi effectués dans cette courte période par Poincaré, mais aussi leur grande diversité. Le 5 décembre 1881 paraît une note aux *CRAS* "Sur les courbes définies par les équations différentielles" [Poincaré 1881][8], consacrée à l'extension de la théorie qualitative des équations du premier ordre au cas où le degré de l'équation est supérieur à un, et présentant des résultats qui figureront dans la troisième partie du mémoire, publiée en 1885. Enfin, trois notes aux *CRAS* paraissant en 1882 et 1884 [Poincaré 1882a,b ; 1884b], consacrées aux équations différentielles non linéaires d'ordre supérieur à un, préparent la publication de la quatrième partie du mémoire, en 1886 (on trouvera *infra* paragraphe 4, des précisions chronologiques sur la constitution des troisième et quatrième parties).

7. Il n'est pas impossible que cette étude ait été entreprise immédiatement après celle du (a), avant celle du (b).

8. On remarquera, à partir de cette note, la légère modification du titre de ces recherches: le pluriel "équations différentielles" remplace le singulier. D'ailleurs, dans la note suivante sur le sujet, celle du 13 février 1882, Poincaré prendra comme objet d'étude non plus une équation différentielle, mais un système d'équations différentielles du premier ordre.

2. La problématique de Poincaré dans le mémoire "Sur les courbes"

Pour bien apprécier la nouveauté qu'a constituée la problématique développée par Poincaré dans ce mémoire, il faut considérer le contexte théorique vers 1880. Si l'on regarde la production des notes et mémoires dans le domaine des équations différentielles ordinaires au cours des années 1870[9], on constate d'abord qu'un grand nombre d'études portent sur la recherche de solutions explicites, à l'aide de fonctions connues (algébriques, elliptiques, etc.) de certains types particuliers d'équations différentielles — ou sur la recherche des conditions pour que certaines équations aient des intégrales s'exprimant explicitement. La classe des équations différentielles linéaires occupe une place centrale dans les recherches précédentes, ainsi que dans l'étude locale des intégrales au voisinage des points singuliers. Sur les équations différentielles générales, les recherches sont peu nombreuses et essentiellement locales. Dans ce contexte, la théorie des fonctions de variable complexe jouait un rôle croissant[10].

Dans l'introduction à son mémoire de 1880 [*Sur les courbes,* 3-5], Poincaré, en faisant le parallèle avec l'histoire de la résolution des équations algébriques et celle de l'intégration des différentielles algébriques, rappelle d'abord la nécessité d'étudier les propriétés des solutions des équations différentielles générales en elles-mêmes, sans se restreindre aux cas en nombre très limité où elles se ramènent à des fonctions connues."*On a déjà fait, écrit-il, un premier pas dans cette voie en étudiant la fonction proposée* dans le voisinage d'un des points du plan. *Il s'agit aujourd'hui d'aller plus loin et d'étudier cette fonction* dans toute l'étendue du plan." Il manifeste ainsi clairement sa conscience de la nécessité pour la théorie, à cette étape de son développement, de passer de l'étude *locale* des solutions des équations différentielles générales, développée jusque-là[11], à leur étude *globale.*

Devant la complexité de ce nouveau problème, Poincaré va donner successivement deux raisons pour justifier le thème de son mémoire : l'étude géométrique des courbes intégrales.

"*L'étude complète d'une fonction,* énonce-t-il, *comprend deux parties :*

---

9. La banque de données, établie par Hélène Gispert, sur les publications mathématiques françaises à partir de 1868, est un instrument de travail particulièrement précieux pour établir un tel bilan.

10. Remarquons, par exemple, que la thèse de Jules Tannery [1875] visait explicitement à promouvoir la diffusion en France du contenu des travaux effectués depuis les années 1860 en Allemagne, notamment par L. Fuchs, sur la théorie des équations différentielles linéaires dans le domaine complexe.

11. Dans la *Notice* sur ses travaux [1884a, 9] il précise qu'en abordant l'étude des équations différentielles, il a pris pour point de départ *"les résultats de Cauchy, de MM. Fuchs, Briot et Bouquet et de M^{me} de Kowalevsky"* sur les propriétés des solutions au voisinage des points ordinaires ou singuliers. On a vu que les premiers travaux de Poincaré visaient précisément à perfectionner les résultats locaux de ses prédécesseurs.

1° Partie qualitative (pour ainsi dire), ou étude géométrique de la courbe définie par la fonction ;
2° Partie quantitative, ou calcul numérique des valeurs de la fonction.
[...] C'est naturellement par la partie qualitative qu'on doit aborder la théorie de toute fonction et c'est pourquoi le problème qui se présente en premier lieu est le suivant : Construire les courbes définies par des équations différentielles."

Poincaré illustre cette affirmation de caractère général à l'aide de deux exemples : dans l'étude des équations algébriques, la recherche, par le théorème de Sturm, du nombre de racines réelles, précède le calcul des valeurs numériques des racines ; dans l'étude d'une courbe algébrique, *"on commence par* construire *cette courbe, comme on dit dans les cours de Mathématiques spéciales, c'est-à-dire qu'on cherche quelles sont les branches de courbes fermées, les branches infinies, etc."*, avant de déterminer un certain nombre de points (on verra plus loin que ces analogies semblent avoir joué un rôle effectif dans l'élaboration du contenu même du mémoire). Autrement dit, la partie qualitative apparaît ici comme une première étape de l'étude, précédant et favorisant l'analyse quantitative précise.

Poincaré avance alors une seconde raison, différente bien que complémentaire : *"D'ailleurs, écrit-il, cette étude qualitative aura* par elle-même [souligné par nous, C.G.] *un intérêt du premier ordre. Diverses questions fort importantes d'Analyse et de Mécanique peuvent en effet s'y ramener"*. Il illustre cette dernière affirmation à l'aide de la mécanique céleste :

"Prenons par exemple le problème des trois corps, ne peut-on pas se demander si l'un des corps restera toujours dans une certaine région du ciel ou bien s'il pourra s'éloigner indéfiniment, si la distance de deux corps augmentera, ou diminuera à l'infini, ou bien si elle restera comprise entre certaines limites? Ne peut-on pas se poser mille questions de ce genre qui seront toutes résolues quand on saura construire qualitativement les trajectoires des trois corps? Et si l'on considère un nombre plus grand de corps, qu'est-ce que la question de l'invariabilité des éléments des planètes, sinon une véritable question de Géométrie qualitative, puisque faire voir que le grand axe n'a pas de variations séculaires, c'est montrer qu'il oscille constamment entre certaines limites ?"

Ces questions, liées au problème de la stabilité d'un système de $n \geq 3$ corps en mécanique céleste manifestent effectivement l'importance spécifique des propriétés qualitatives globales des solutions réelles des équations différentielles.

Postérieurement, dans la *Notice* sur ses travaux rédigée au début de 1884, Poincaré présente autrement le problème de la nécessaire étude globale des solutions des équations différentielles générales :

"Mais cette étude peut être faite à deux points de vue différents

1° On peut se proposer d'exprimer les intégrales à l'aide de développements toujours valables et non plus limités à un domaine particulier. On est conduit ainsi à introduire dans la science de nouvelles transcendantes, [...]
2° Mais ce mode d'intégration, qui nous fait connaître les propriétés des équations au point de vue de la théorie des fonctions, ne saurait suffire à lui seul [...]. Nos développements ne nous apprendraient pas, à moins d'un travail considérable, si par exemple la fonction va constamment en croissant, ou si elle oscille entre certaines limites, si elle peut croître au delà de toute limite. En d'autres termes, si l'on considère la fonction comme définissant une courbe plane, on ne saurait pas quelle est la forme générale de cette courbe. Dans certaines applications, toutes ces questions ont autant d'importance que le calcul numérique, et il y avait là un nouveau problème à résoudre." [1884a, 11-12]

Le premier point de vue indiqué est celui que Poincaré a suivi, à partir de juin 1880, dans ses recherches sur les fonctions fuchsiennes : déterminer des expressions analytiques représentant globalement les solutions ; le second est celui mis en oeuvre antérieurement dans le mémoire *Sur les courbes* déposé en mars 1880 et correspond à l'étude directe des propriétés qualitatives globales des solutions.

On peut ainsi constater une évolution de la position de Poincaré entre ces deux présentations de la configuration des problèmes en théorie des équations différentielles ordinaires. Dans l'introduction de 1880 au mémoire, l'étude globale des solutions n'est envisagée que du point de vue qualitatif ; hormis les cas particuliers d'intégration par les fonctions connues, l'intégration analytique est réduite à l'étude locale, au calcul numérique approché des solutions. Dans la *Notice* de 1884, par contre, Poincaré présente deux voies de recherche — analytique et qualitative —, pour l'étude globale des solutions des équations différentielles. Si la démarche qualitative perd ainsi sa situation de monopole dans l'étude globale par rapport à la présentation de 1880[12], en fonction notamment des succès obtenus entre-temps par l'étude analytique globale des équations différentielles linéaires, elle garde cependant, aux yeux de Poincaré, sa spécificité et son intérêt propre.

[12]. Cette évolution corrobore d'ailleurs ce que nous avons supposé jusqu'ici, à savoir que l'introduction du mémoire [*Sur les courbes* , 3-5] figurait bien dans le texte déposé le 22 mars 1880: si elle avait été ajoutée au moment de la publication en 1881, Poincaré n'aurait sans doute pas manqué d'évoquer aussi, comme dans sa *Notice* de 1884, la voie de recherche analytique suivie dans ses travaux sur les fonctions fuchsiennes.

Il le redit un peu plus loin :

> *"Les méthodes d'intégration dont il a été question plus haut ne se rapportent qu'aux équations linéaires, et dans les applications on rencontre souvent des équations non linéaires. D'ailleurs, alors même qu'on parviendrait à faire pour une équation quelconque ce que j'ai fait pour les équations linéaires, c'est-à-dire à trouver des développements des intégrales valables dans toute l'étendue du plan, ce ne serait pas une raison pour laisser de côté les résultats que l'on peut obtenir par d'autres méthodes, car il peut arriver que ces méthodes nous fassent découvrir certaines particularités que les développements ne mettraient pas immédiatement en évidence. C'est ce qui m'a décidé, ajoute-t-il, à me placer à un point de vue nouveau."* [*op. cit.*, 22]

Cette question de l'extension et des limites des méthodes analytiques se posait notamment dans le cadre de la mécanique céleste dont on a vu qu'elle constituait une référence essentielle chez Poincaré pour justifier la problématique qualitative. La *Notice* de 1884 éclaire également de ce point de vue l'évolution de l'attitude de Poincaré après 1880. Les travaux de mécanique céleste y sont présentés dans la partie *Etude des équations différentielles*[13], dans un paragraphe qui suit celui sur les courbes définies par les équations différentielles et consacré aux "Applications des notions précédentes". Poincaré précise ainsi l'articulation entre ces deux catégories de travaux :

> *"On a dû voir en lisant les lignes qui précèdent que les questions de stabilité, analogues à celles que l'on rencontre en Astronomie, étaient ma préoccupation constante. C'est qu'en effet j'attendais de l'application des principes que je viens d'exposer la solution de cette question si intéressante de la stabilité du système solaire [...]. Il est aisé de voir que les méthodes anciennes ne donnent pas la solution complète de cet important problème. Les séries que l'on obtient sont ordonnées suivant les puissances des masses et contiennent le temps en dehors des signes trigonométriques."* [*op.cit.*, 30]

Ainsi, ces méthodes analytiques, adaptées avant tout au calcul approché des positions dans un intervalle de temps fini, étaient impropres à l'étude du problème de la stabilité en mécanique céleste théorique, propriété globale du mouvement lorsque l'on fait varier le temps jusqu'à l'infini.

Poincaré évoque alors les nouvelles méthodes analytiques, visant à dépasser le caractère local des anciennes :

> *"Aussi les efforts des géomètres astronomes ont-ils eu pour but dans ces derniers temps de remplacer les séries anciennes par de nouveaux développements où le le temps ne se rencontre que sous les signes sinus et cosinus. MM. Gyldén et Lindstedt ont trouvé, en effet, des séries satisfaisant à cette condition, c'est-à-dire purement trigonométriques et représentant les mouvements des corps célestes."* [*op.cit.*,30]

---

[13]. A partir de la *Notice* de 1886, ils constitueront une partie autonome, la quatrième, dans la classification de ses travaux.

Les travaux que cite Poincaré ont été publiés par H. Gyldén et A. Lindstedt à partir de 1881 et 1882 respectivement[14], c'est-à-dire après la création de sa théorie qualitative. S'ils les améliorent beaucoup, Gyldén et Lindstedt n'inaugurent pas cependant les méthodes de développement en séries trigonométriques sans terme séculaire, comme Poincaré le signalera d'ailleurs plus tard[15]. Mais, celui-ci ne faisait pas allusion à cette orientation de recherche en 1880[16] et il semble bien que ce soient alors les méthodes "anciennes" de la mécanique céleste qu'il avait implicitement en vue quand, dans l'introduction de son mémoire *Sur les courbes* il proposait *a contrario* une approche qualitative et géométrique des problèmes globaux[17].

C'est seulement à partir de 1882 que Poincaré commence à publier sur la question des séries trigonométriques en liaison avec la mécanique céleste. Dans une note aux *CRAS* du 30 octobre 1882 [*Œuvres* IV, 585-587], il montre qu'une série du type $\Sigma A_p \sin(\alpha_p t)$, même convergente, peut avoir une somme dont le module tend vers l'infini avec le temps. Il précisera dans un article du *Bulletin astronomique* de 1884 [*op. cit.*, 591-598] que ce phénomène peut se produire lorsque la série est convergente absolument sans l'être uniformément. De plus, dans une note aux *CRAS* du 24 décembre 1883 [*op. cit.*, 588-590], faisant suite à deux notes de Lindstedt, il formule la conjecture que les séries trigonométriques de ce dernier ne sont pas convergentes[18]. Poincaré donne ainsi deux raisons de dénier toute pertinence à ces séries relativement au problème de la stabilité du système solaire[19] :"*Ayant ainsi donné, conclut-il, une* nouvelle preuve [souligné par nous, C.G.] *de l'impuissance des procédés anciens*[20]*, je devais naturellement songer à appliquer les principes que j'ai exposés dans le paragraphe*

14. Voir, par exemple, [Hagihara II_2 , III_1], pour une bibliographie détaillée de leurs travaux.

15. Il citera ainsi un mémoire de Newcomb écrit en 1874 [*Méthodes nouvelles* II, 16-17], des travaux de Delaunay et de Hill [*op. cit.* I, 3].

16. Peut-être Poincaré ne connaissait-il pas ce type de travaux avant la parution de ceux de Gyldén et Lindstedt. On sait qu'au début de sa carrière, il était souvent loin d'avoir lu tous les écrits de ses prédécesseurs dans les domaines qu'il abordait (voir, par exemple, *infra* note 40). En particulier, il nous paraît très peu probable que les travaux de Hill sur le mouvement de la lune soient à l'origine de la théorie qualitative de Poincaré, comme l'a suggéré M. Kline [1972, 732].

17. Poincaré faisait notamment référence, on l'a vu, à la question de l'invariabilité des éléments des planètes. Il est intéressant de remarquer que cette question était alors redevenue d'actualité. F. Tisserand, reprenant des travaux de Poisson et de Lagrange à l'occasion de la sortie du tome VI, édité par J. A. Serret, des *Œuvres de Lagrange,* avait montré l'absence de terme séculaire pur dans les développements des grands axes des orbites planétaires, jusqu'à l'ordre deux par rapport aux masses [1876 ; *Traité* I, ch. XXV]. Cependant, dès l'année suivante, S. C. Haretu obtenait de tels termes séculaires purs dans les développements à l'ordre trois et mettait en cause la généralité supposée de l'invariabilité des grands axes [1877; 1878].

18. Conjecture qu'il démontrera ultérieurement (voir, par exemple, [*Méthodes nouvelles* II, ch. XIII]).

19. Poincaré montre cependant leur utilité pour le calcul numérique approché.

20. L'expression "procédés anciens" désigne ici certainement pour Poincaré les méthodes analytiques par opposition aux méthodes qualitatives. Cela ne recouvre pas l'expression "méthodes anciennes" de la mécanique céleste qui désigne plus particulièrement chez lui les anciens développements en séries contenant des termes séculaires (voir [1884a, 30 ; *Méthodes nouvelles* I, introduction]).

précédent [consacré aux courbes définies par les équations différentielles]" [1884a, 30]. Il le redira dans sa *Notice* de 1886 :*"J'ai lieu de croire que, si ce problème de la stabilité peut jamais être résolu, ce sera par des considérations analogues à celles que j'ai développées dans le § V de cette* Notice" ; même s'il ajoute alors : *"mais la solution me paraît encore très éloignée"* [1886, 69].

La naissance de la théorie qualitative au début de 1880 semble ainsi avoir correspondu chez Poincaré à un moment de grand doute quant à l'extension possible du champ d'application des méthodes analytiques, à leur capacité d'aborder dans sa généralité la nécessaire étude globale des solutions des équations différentielles[21]. Cependant, la spécificité et l'importance de cette théorie se sont trouvées confirmées par lui après les nouveaux progrès des méthodes analytiques apparus au début des années 1880 tant dans la théorie des équations différentielles linéaires qu'en mécanique céleste, l'idée demeurant d'une limite de pertinence, de fait sinon de droit, de ces méthodes[22]. Cela, non seulement parce que des expressions analytiques globales des solutions ne sont pas connues en général dans le cas des équations différentielles non linéaires[23], mais parce que, pour lui, une telle expression éventuelle de la solution ne doit plus être considérée comme la propriété privilégiée qui donnerait automatiquement la clé de toutes les autres. La démarche de Poincaré consiste à la fois à souligner l'importance de certaines propriétés, qualitatives globales, des solutions, autres que l'expression analytique, et à mettre en évidence que la détermination d'une telle expression n'est ni une condition suffisante, ni une condition nécessaire pour atteindre ces propriétés. S'affirment ainsi la nécessité et la possibilité de constituer ces propriétés qualitatives en objet à étudier directement par des méthodes spécifiques ; cela détermine la place d'une théorie propre dans le domaine des équations différentielles. Consacrée à l'étude des propriétés *qualitatives globales* des solutions des équations différentielles *générales*, par la considération des *courbes* intégrales dans le domaine *réel*, cette théorie concentre donc plusieurs nouveautés importantes, dans un contexte largement dominé alors, on l'a dit, par les études analytiques et l'usage de la variable complexe[24].

---

21. Poincaré révèle d'ailleurs dans sa célèbre conférence sur l'invention mathématique [1908b, 50] qu'il s'était efforcé "*de démontrer qu'il ne pouvait exister aucune fonction analogue à ce [qu'il a] appelé depuis les fonctions fuchsiennes* ", avant d'en découvrir une première classe (ceci se situant donc dans la période fin mai-début juin 1880).

22. Poincaré présentera ce point de vue de manière identique dans sa *Notice* de 1886 ainsi que dans l'*Analyse* de ses travaux de 1901.

23. Dans une note aux *CRAS* du 27 février 1882 [1882b], Poincaré avait proposé une nouvelle forme de développement en série des solutions d'un système d'équations différentielles non linéaires, en dehors des points singuliers, série convergente pour toutes les valeurs réelles d'une variable auxiliaire. Cependant, ce type d'expression des solutions ne le satisfait guère et il indique: "*Je ne crois pas que celle que j'ai développée plus haut soit précisément celle qui s'appliquera avec le plus d'avantage au problème des trois corps, ni qu'elle doive supplanter complètement les solutions trigonométriques* " [1884a, 33] (*cf. infra* note 61).

24. Notons que, dans la lignée des travaux de Chasles sur les systèmes de courbes algébriques, Georges Fouret a notamment publié deux notes aux *CRAS* [1874 ; 1878], où il associe à une équation différentielle algébrique un système de courbes qu'il étudie

Notons cependant qu'une telle démarche qualitative n'est pas sans précédent dans le domaine des équations différentielles ordinaires ; presque un demi-siècle auparavant, Charles Sturm introduisait en effet ainsi son *Mémoire sur les équations différentielles linéaires du second ordre* [1836] :

> *"On ne sait les intégrer [les équations différentielles linéaires du second ordre] que dans un petit nombre de cas particuliers hors desquels on ne peut pas même en obtenir une intégrale première ; et lors même qu'on possède l'expression de la fonction qui vérifie une telle équation, soit sous forme finie, soit en série, soit en intégrales définies ou indéfinies, il est le plus souvent difficile de reconnaître dans cette expression la marche et les propriétés caractéristiques de cette fonction. Ainsi, par exemple, on ne voit pas si dans un intervalle donné elle devient nulle ou infinie, si elle change de signe, et si elle a des valeurs maxima ou minima. Cependant la connaissance de ces propriétés renferme celle des circonstances les plus remarquables que peuvent offrir les nombreux phénomènes physiques et dynamiques auxquels se rapportent les équations différentielles dont il s'agit. S'il importe de pouvoir déterminer la valeur de la fonction inconnue pour une valeur isolée quelconque de la variable dont elle dépend, il n'est pas moins nécessaire de discuter la marche de cette fonction, ou en d'autres termes, d'examiner la forme et les sinuosités de la courbe dont cette fonction serait l'ordonnée variable, en prenant pour abscisse la variable indépendante. Or on peut arriver à ce but par la seule considération des équations différentielles en elles-mêmes, sans qu'on ait besoin de leur intégration. Tel est l'objet du présent mémoire."*

Ce mémoire, lu en 1833 à l'Académie et se situant avant le développement de la théorie analytique des équations différentielles dans le domaine complexe, créait ce que l'on appelle maintenant la théorie de Sturm des équations différentielles linéaires. L'analogie de démarche avec celle de Poincaré est frappante :

i) on ne sait pas intégrer analytiquement toutes les équations différentielles considérées ;

ii) même lorsque l'on a l'expression analytique de l'intégrale, il est souvent difficile de s'en servir pour faire apparaître des propriétés qualitatives essentielles ;

iii) ces dernières propriétés, qui correspondent à la forme de la courbe représentant la fonction solution, sont aussi importantes dans les applications mécaniques ou physiques que les valeurs numériques particulières ;

iv) on peut atteindre ces propriétés qualitatives directement, sans intégration analytique préalable.

---

géométriquement. Cependant sa démarche n'est pas de type qualitatif, ni dans les méthodes géométriques utilisées, ni dans les problèmes posés: il cherche surtout à obtenir l'intégration explicite de certaines équations différentielles et retrouve d'ailleurs ainsi l'intégrale exacte de l'équation de Jacobi (voir aussi *infra* note 26).

Nous ne savons pas si Poincaré s'est inspiré de ce mémoire de Sturm pour développer sa propre démarche qualitative dans le contexte spécifique qui était le sien. Si d'ailleurs leurs problématiques sont de même type, il convient de noter les différences importantes existant entre les deux théories, qui ne portent pas sur les mêmes classes d'équations différentielles, et ne développent ni les mêmes questions, ni les mêmes méthodes mathématiques ; c'est ce que fera ressortir l'analyse qui va suivre du contenu du mémoire de Poincaré.

3. Le contenu du mémoire (première et deuxième parties)

Il ne s'agit pas ici de faire un exposé mathématique détaillé du mémoire *Sur les courbes*, mais d'en mettre en évidence quelques éléments caractéristiques au niveau des méthodes utilisées et des résultats obtenus. Le mémoire de 1880 contenant les deux premières parties (chapitres I à IX) est consacré à l'étude géométrique des courbes intégrales (ou *caractéristiques*[25]) de l'équation différentielle

$$(1) \quad \frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y},$$

du premier ordre et du premier degré (X et Y polynômes réels). Poincaré utilise d'abord (chapitre II) les résultats analytiques locaux obtenus antérieurement par Cauchy, Briot, Bouquet et lui-même, en les transposant dans le cadre géométrique réel. Ainsi, la plupart des points sont réguliers ($X \neq 0$ ou $Y \neq 0$), en ce sens que l'on a l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy. Géométriquement, il passe donc par chacun de ces points une seule courbe intégrale qui ne peut d'ailleurs s'y recouper : ce simple rapport d'exclusion jouera un rôle essentiel dans toute la théorie. Pour les points singuliers, dans le cas général où les courbes $X = 0$ et $Y = 0$ se coupent en des points simples, Poincaré en distingue quatre sortes (points dits de première espèce)[26] : les *nœuds*, par lesquels passent une infinité de courbes intégrales ; les *cols* par lesquels il en passe deux (et deux seulement) ; les *foyers*, autour desquels les courbes intégrales s'enroulent en spirale ; enfin, cas exceptionnel, les *centres*, au

[25]. Poincaré appelle ces courbes définies par l'équation les "caractéristiques". Ce sont ici des courbes géométriques dont il utilisera parfois des paramétrisations, notamment dans la théorie des conséquents (chapitre V) ; *cf. infra* paragraphe 4.

[26]. Une discussion sur la nature des points singuliers d'une équation différentielle du premier ordre et du premier degré s'est engagée entre Poincaré et G. Fouret, à un moment qui, notons-le, correspondait à la sortie de la première partie du mémoire de Poincaré *Sur les courbes* (voir les lettres de Fouret des 4 et 7 janvier 1882 dans les Archives privées de M. François Poincaré ; nous remercions P. Dugac de nous avoir communiqué une copie de ces lettres). Fouret, sans doute sur la base de son article [1879, 179-180] et se réclamant d'ailleurs de G. Darboux [1878, 124-125], affirme, dans sa première lettre, qu'en général les points singuliers sont du type que Poincaré appelle foyer, la présence de nœuds étant exceptionnelle. Cependant, dans sa seconde lettre, Fouret se déclare convaincu par les arguments de Poincaré.

voisinage desquels les courbes sont des cycles fermés[27]. Les point singuliers sont ainsi caractérisés par la configuration des courbes intégrales dans leur voisinage (ce qu'on appellerait aujourd'hui le portrait de phase local)[28].

Pour englober plus facilement dans son étude le cas des branches infinies, Poincaré projette le plan (x,y) sur une sphère, à partir du centre de celle-ci, supposé extérieur au plan. Il montre alors (chapitre III) qu'il existe toujours des points singuliers sur la sphère et obtient, plus précisément, la relation globale suivante : $N+F = C+2$, où N,F,C désignent respectivement le nombre des nœuds, des foyers et des cols, dans le cas général où seuls apparaissent ces trois types de points singuliers[29].

Pour passer de l'étude locale à l'étude globale des courbes intégrales, Poincaré étudie les rapports de ces courbes avec certains arcs ou cycles algébriques (chapitre IV), en particulier le nombre de leurs points de contact. Il montre ainsi (théorème VI) que le nombre des contacts d'un cycle algébrique avec une caractéristique est toujours fini et pair ; et que (théorème X), si un arc de caractéristique ne passant par aucun point singulier est sous-tendu (respectivement sur-tendu)[30] par un arc de courbe, le nombre des contacts de cet arc est impair (respectivement pair). Ces théorèmes sont démontrés grâce à des résultats sur les courbes algébriques réelles, utilisés ou établis par Poincaré[31].

En considérant (chapitres V et VI) les arcs algébriques sans contact, qui ont avec les courbes intégrales un rapport de transversalité, et les points d'intersection successifs d'une courbe avec un tel arc, Poincaré parvient à un important théorème de classification (théorème XII) :

> *"Toute caractéristique qui n'aboutit pas à un nœud*[32] *est un cycle ou une spirale".*

---

27. Si on pose $X = a_1(x-\alpha) + a_2(y-\beta) + X_2$, $Y = b_1(x-\alpha) + b_2\,(x-\beta) + Y_2$, Poincaré montre que la nature du point singulier (α,β) dépend de celle des racines de l'équation $(a_1-\lambda)\,(b_2-\lambda) - b_1\,a_2 = 0$ (c'est-à-dire de la nature des valeurs propres de la matrice des coefficients des termes du premier ordre): réelles et de même signe (nœud), réelles de signes contraires (col), complexes conjuguées (foyer), et le cas particulier où elles sont imaginaires pures (centre).

28. Le mathématicien russe N. E. Joukovsky avait en 1876, dans un mémoire sur la cinématique des fluides, exhibé des cas de points singuliers qui correspondent, semble-t-il, à ceux de Poincaré (voir [Dobrovolsky 1972]).

29. Cette relation, analogue à la formule d'Euler pour les polyèdres convexes, est obtenue grâce à l'utilisation de la notion d'indice d'un cycle, nombre égal à ±1 si le cycle contient un point singulier et à 0 sinon.

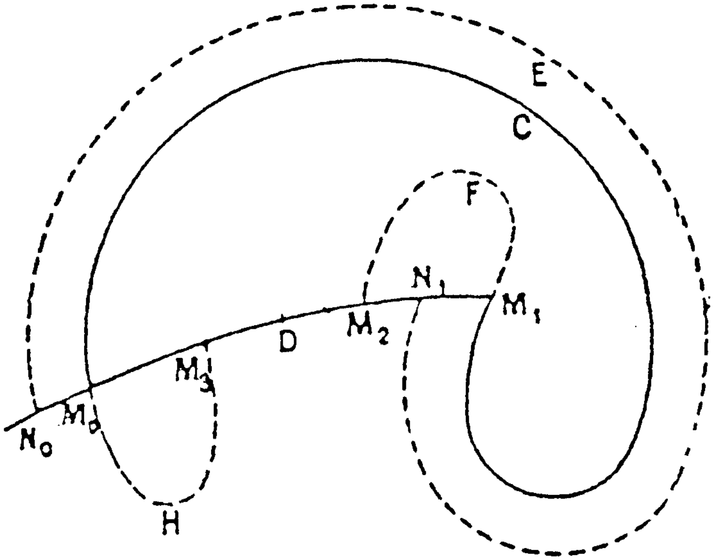
30. Poincaré dit qu'un arc de courbe *sous-tend* un arc de caractéristique si "l*es deux branches de courbes formées par la caractéristique, prolongée au- delà des deux points que l'on a réunis [par l'arc de courbe], sont toutes deux intérieures ou toutes deux extérieures au cycle formé par les deux arcs* " [*Sur les courbes,* 7]. Dans le cas contraire, il dit que l'arc de courbe *sur-tend* l'arc de caractéristique.

31. Les contacts entre une courbe intégrale de l'équation (1) et un cycle algébrique $F(x,y) = 0$, sont les intersections de celui-ci et de la courbe

$\phi = X$ **Erreur !**) + Y **Erreur !** = 0 .qui est algébrique

32. Poincaré avait fait la convention d'arrêter une caractéristique à un nœud, mais de la continuer, à droite ou à gauche, au-delà d'un col.

La démonstration de ce résultat repose essentiellement sur l'analyse (dans le cadre du théorème XI) de la situation d'un arc sans contact coupé par une courbe intégrale en deux points successifs M_0 et M_1 (voir la figure ci-dessous).



Nous reproduisons ce passage qui illustre bien les méthodes et le style de Poincaré dans son mémoire.

> *"Remarquons d'abord, écrit-il, que l'arc M_0D M_1 [...] sur-tend l'arc M_0 CM_1 de la caractéristique car il est sans contact*[33].
> *De plus, cet arc M_0DM_1 ne peut rencontrer la caractéristique en aucun autre point que M_0 et M_1. Car des arcs tels que M_1FM_2, M_0HM_3 seraient sous-tendus par les arcs M_1M_2, M_0M_3, ce qui est impossible, puisque ces arcs sont supposés sans contact.*
> *Ceci posé, par le point N_0 infiniment voisin de M_0 et à gauche de ce dernier, on pourra mener un arc de caractéristique N_0EN_1 qui viendra rencontrer l'arc M_0M_1 en un point N_1 infiniment voisin de M_1*[34] *et à gauche de ce dernier, car il ne pourrait passer à droite sans couper la caractéristique M_0CM_1, ce qui est impossible*[35]. *Le cycle $N_1M_0N_0EN_1$ ne rencontre donc la caractéristique M_0CM_1 qu'en un seul point qui est M_0. Donc, cette caractéristique est une spirale* [36]*."* [*Sur les courbes*, 46-47]

33. D'après le théorème X précédent.
34. Poincaré utilise implicitement ici un argument de continuité de la solution par rapport aux valeurs initiales.
35. D'après le rapport d'exclusion entre courbes intégrales en un point régulier.
36. Poincaré utilise ici implicitement le fait que le cycle sépare la sphère en deux régions (c'est le théorème "de Jordan"). L'arc M_0CM_1 qui ne peut traverser le cycle, reste donc dans la région intérieure.

En étudiant la limite des points d'intersection successifs d'une spirale avec un arc sans contact, Poincaré montre (chapitre VI) que les courbes de cette catégorie s'enroulent autour d'un cycle qu'il appelle cycle limite, ce qui complète le résultat. Ce théorème de classification, qui prendra le nom de "théorème de Poincaré-Bendixson" après le travail du savant suédois [Bendixson 1901] (voir *infra* paragraphe 5), est fondamental dans la théorie qualitative des équations différentielles sur la sphère ou le plan.

Poincaré parvient enfin à un résultat qu'il met particulièrement en évidence (théorème XVIII) :

> *"Il existe toujours un système topographique formé de cycles sans contact, de polycycles sans contact et de cycles limites. Ce système topographique sillonne toute la surface de la sphère. Les fonds et les sommets sont les nœuds et les foyers de l'équation donnée. Les cols sont les cols de l'équation donnée."* [*op. cit.*, 65]

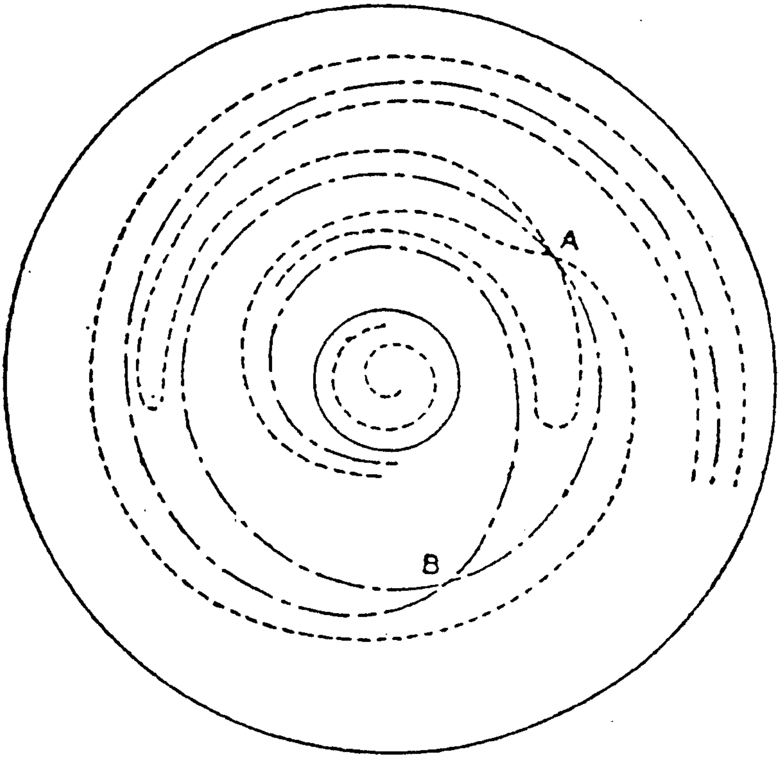
Ce théorème représente pour lui l'aboutissement de son étude. En effet, la connaissance d'un tel système qui regroupe les éléments clés : points singuliers, cycles limites et cycles sans contact, *"permet, écrit-il, de discuter complètement les formes affectées par les courbes que définit l'équation différentielle donnée"*.

Illustrons cela par un exemple de discussion complète traité par Poincaré [*op. cit.*, 70-71]. Soit l'équation différentielle

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} \quad \text{avec } X = x\,P_1\,P_2 - y\,P_3\,,\; Y = y\,P_1\,P_2 + x\,P_3$$

$$\text{où } P_1 = x^2 + y^2 - 1,\; P_2 = x^2 + y^2 - 9,\; P_3 = x^2 + y^2 - 2x - 8.$$

Il y a dans le plan trois points singuliers : l'origine O et les points A, B d'intersection des cercles $P_2 = 0$ et $P_3 = 0$; O est un foyer, A un nœud et B un col. Les cercles centrés à l'origine, d'équation $x^2 + y^2 = k^2$, sont des cycles sans contact, excepté les cercles $P_2 = 0$ et $P_1 = 0$ qui sont des courbes intégrales ; le dernier, qui ne contient pas de point singulier, étant un cycle limite. Sur la sphère, l'équateur est aussi ici un cycle limite.



Poincaré considère en fait les courbes sur un hémisphère, qu'il projette stéréographiquement sur le plan pour la représentation graphique (voir figure ci-dessus) :

"Il y a donc, écrit-il, trois catégories de caractéristiques : les premières tournent autour du foyer O [...] et ont pour cycle limite $x^2+y^2 - 1 = 0$; les secondes aboutissent au noeud A et ont pour cycle limite $x^2+y^2 - 1 = 0$; les troisièmes aboutissent au nœud A et ont pour cycle limite l'équateur."

Poincaré en déduit que si un point mobile se meut suivant la loi

$$\frac{dx}{dt} = X, \ \frac{dy}{dt} = Y$$

où t est le temps, il ne pourra sortir du cercle $x^2+y^2 = 1$ s'il se trouve initialement à l'intérieur.

On voit sur cet exemple que la connaissance du système topographique composé des points singuliers, des cycles sans contact, qu'une courbe intégrale ne peut traverser en plus d'un point (d'après le théorème X précédent), des cycles limites autour desquels les courbes s'enroulent en spirale, permet, à l'aide du principe selon lequel deux courbes intégrales ou deux arcs d'une même courbe ne peuvent se couper en un point ordinaire, de déterminer l'allure des caractéristiques et ainsi d'obtenir les propriétés qualitatives globales des solutions.

Il convient de remarquer que, d'après l'étude précédente, la configuration des courbes intégrales dans le cas général diffère nettement de ce qu'elle est dans beaucoup de cas connus d'équations intégrables explicitement. Ainsi, dans le cas qui a inspiré à Poincaré le nom de système topographique, celui des courbes de niveau d'un terrain, d'équation globale f(x,y) = constante (f fonction suffisamment régulière), les courbes intégrales sont fermées et la plupart des points singuliers sont des centres, alors que ceux-ci sont rares dans le cas général. Cette différence géométrique renforce *a posteriori* la justification de l'emploi de nouvelles méthodes qui permettent de trouver la forme des courbes intégrales dans des cas dont la complexité représentait précisément un obstacle à l'intégration analytique. Le cas général n'est pas une simple extension des cas particuliers intégrables connus ; ces derniers apparaissent plutôt comme des cas "dégénérés" : ainsi dans celui des courbes de niveau, il n'y a pas de cycle sans contact.

En réalité, le problème de l'intégration qualitative des équations différentielles du premier ordre et du premier degré n'est pas complètement résolu par le théorème XVIII de Poincaré, mais réduit. Dans le cas général, on ne peut pas en effet déterminer le système topographique en termes finis. Etablissant explicitement alors une analogie avec la théorie des équations algébriques et notamment les procédés de séparation et d'approximation des racines, Poincaré propose (chapitre VIII) des méthodes visant à diviser la sphère en régions acycliques, qui ne sont traversées par aucun cycle limite, et en régions monocycliques contenant un seul cycle limite. *"Une pareille séparation des cycles limites, écrit-il, sera toujours possible quand les cycles limites seront en nombre fini"* [*op. cit.*, 74][37].

On constate que le caractère géométrique de la théorie qualitative de Poincaré se manifeste à la fois par le but visé — la détermination de la forme des courbes intégrales —, et par les méthodes utilisées pour l'atteindre[38]. En

[37]. Dans la seconde partie de son seizième problème, Hilbert posait cette question, "*importante pour la topologie des familles de courbes définies par des équations différentielles*" : "*Déterminer le nombre maximum et la situation relative des cycles limites de M. Poincaré dans le cas d'une équation différentielle* [...] *de la forme*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y}{X},$$

où X, Y désignent des fonctions rationnelles entières de degré n" [1900, 97]. Dans sa conférence au congrès des mathématiciens de 1908, Poincaré considérait cette question de la détermination du nombre des cycles limites comme "*très délicate*", et ajoutait une fois encore: "*ce qui peut nous la faciliter, c'est l'analogie avec la recherche du nombre des racines réelles d'une équation algébrique* " [1908a, 177].
Le problème préalable de la finitude, dans tous les cas, du nombre de cycles limites, a été longuement traité par Henri Dulac [1923], qui cherchait à généraliser des résultats de Poincaré. Des lacunes de sa démonstration ont été récemment mises en évidence, puis comblées (voir [Yoccoz 1987]).

[38]. Outre ces aspects théoriques de l'intervention de la géométrie, on a vu, par exemple *supra* dans la démonstration du théorème XI, combien le style mathématique de Poincaré est marqué par le rôle qu'y joue l'intuition géométrique, avec sans doute une

l'absence d'expression analytique supposée connue des solutions, le principe de ces méthodes consiste à considérer la famille de toutes les courbes intégrales (ce que l'on appelle aujourd'hui le portrait de phase global) et à enserrer ces courbes dans un réseau de rapports géométriques, essentiellement avec des courbes algébriques. Apparaît donc le rôle essentiel joué dans le mémoire de Poincaré par la géométrie algébrique réelle, plus précisément dans ces deux premières parties, par la théorie des courbes algébriques[39]. L'utilisation systématique des cycles et arcs algébriques, de leur nombre de points d'intersection et de contact avec les courbes intégrales, le rôle en particulier des cycles et arcs algébriques sans contact, tout cela manifeste que Poincaré utilise pleinement, dans le mémoire de 1880, l'hypothèse que X et Y sont des polynômes. Son but reste cependant de faire une étude de géométrie *qualitative* relativement aux courbes intégrales, beaucoup de résultats restant d'ailleurs valables dans le cadre d'hypothèses plus générales sur X et Y (voir *infra* paragraphe 5).

4. Le contenu du mémoire (suite)

La *troisième partie* du mémoire est essentiellement consacrée à l'extension de la théorie qualitative au cas des équations différentielles du premier ordre et de degré supérieur à un. Elle est publiée en 1885 (le texte étant daté du 15 janvier), mais apparaît comme le fruit de travaux qui se sont échelonnés entre 1881 et 1884. Plus précisément, l'essentiel des résultats (chapitres XII, XIII, XIV) semble acquis dès la note aux *CRAS* du 5 décembre 1881, note élaborée postérieurement à juin 1881[40]. Le contenu du début du chapitre XV, consacré au cas du tore, est évoqué dans la *Notice* sur ses travaux rédigée en janvier 1884 ; par contre, la suite du chapitre, sur la nature des ensembles de points déterminés par l'intersection d'une courbe intégrale avec un méridien, ainsi que l'essentiel du chapitre XI sur la théorie des centres (équations différentielles de degré un), contiennent des résultats qui ne seront signalés que dans la *Notice* de 1886 et ont sans doute été élaborés dans le courant de l'année 1884[41].

Considérons d'abord le chapitre X sur "Stabilité et instabilité", que Poincaré a placé en tête de cette troisième partie et qui est intéressant à plusieurs égards.

fonction heuristique mais aussi un certain manque de rigueur au niveau de la rédaction des preuves.

39. Rappelons que dans l'introduction de son mémoire, cette théorie des courbes algébriques a servi aussi à Poincaré pour justifier, par analogie, la nécessité de l'étude qualitative dans le cas des équations différentielles.

40. En effet, la correspondance Klein-Poincaré révèle que c'est F. Klein qui a appris à Poincaré la définition du genre d'une surface au sens de l'*Analysis situs* (voir les lettres des 27 juin et 2 juillet 1881 [*Œuvres* XI, 35-41]), concept dont on va voir qu'il joue un rôle essentiel dans cette partie de la théorie.

41. Ceci est corroboré par les dates de publication des mémoires de Cantor auxquels Poincaré fait référence.

"On n'a pu, écrit-il d'emblée, lire les deux premières parties de ce mémoire sans être frappé de la ressemblance que présentent les diverses questions qui y sont traitées avec le grand problème astronomique de la stabilité du système solaire.
[...] si la solution [de ce problème] exige de plus grands efforts et des procédés nouveaux, l'analogie des questions à résoudre n'en est pas moins évidente. Pour étudier l'équation différentielle $\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}$*, on peut poser* $\frac{dx}{dt} = X$*,* $\frac{dy}{dt} = Y$*. Regardant ensuite x et y comme les coordonnées d'un point mobile, t comme le temps, on a à rechercher quel est le mouvement d'un point dont on donne la vitesse en fonction de ses coordonnées. C'est ce mouvement que nous avons étudié, et nous avons cherché à résoudre des questions telles que celles-ci: Le point mobile décrira-t-il une courbe fermée? Restera-t-il toujours à l'intérieur d'une certaine portion du plan? En d'autres termes, et pour parler le langage astronomique, nous avons recherché si l'orbite de ce point était stable ou instable."* [*Sur les courbes*, 90-91].

Le lien entre la théorie de Poincaré et les problèmes de stabilité en mécanique céleste apparaissait déjà, on l'a vu, dans l'introduction au mémoire de 1880. Cependant, Poincaré traitait alors essentiellement un problème de géométrie qualitative concernant l'équation différentielle à deux variables $\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}$; le langage était mathématique, géométrique et on n'y trouvait pas, en particulier, l'emploi du mot "stabilité". Au contraire, à partir de cette troisième partie, Poincaré introduit en général la variable temps et remplace l'étude de l'équation différentielle $\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}$ et de ses courbes intégrales par celle du système d'équations différentielles autonomes $\frac{dx}{dt} = X$, $\frac{dy}{dt} = Y$, représentant les équations du "mouvement" d'un point "mobile" dont on cherche les "trajectoires"[42]. Mais, en même temps que le langage de sa théorie qualitative devient plus "dynamique"[43],, Poincaré donne au concept de stabilité un statut mathématique précis :

"Nous dirons que la trajectoire d'un point mobile est stable, lorsque, décrivant autour du point de départ un cercle ou une sphère de rayon r, le point mobile, après être sorti de ce cercle ou de cette sphère, y rentrera une infinité de fois, et cela, quelque petit que soit r." [*op. cit.*, 94][44].

Dans ce sens, d'après le théorème de classification vu précédemment, dans le cas du premier degré l'instabilité est la règle (spirales) et la stabilité

42. Cette démarche n'était apparue précédemment qu'à la fin de l'exemple de discussion complète rapporté *supra* .

43. On peut penser que le développement à partir de 1882-1883 de ses travaux de mécanique céleste, alors qu'apparaissent en la matière de nouvelles méthodes analytiques à évaluer (voir *supra*), a joué un rôle dans cette évolution qui conduit Poincaré à orienter davantage sa théorie en fonction de ce qui était, on le sait, un de ses objectifs premiers: l'applicabilité au problème de la stabilité du système solaire.

44. C'est ce que Poincaré appellera la stabilité "à la Poisson" [*Méthodes nouvelles* III, 141]. Il imposera d'ailleurs deux conditions supplémentaires pour caractériser la stabilité complète dans le problème des trois corps: qu'aucun des corps ne puisse s'éloigner indéfiniment et que la distance entre deux corps ne descende pas au-dessous d'une certaine limite.

l'exception (cycles). Mais, il n'en sera plus de même quand le degré de l'équation est supérieur à un.

Pour étudier de façon générale l'équation différentielle d'ordre un et de degré supérieur, soit

$$(2)\quad F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0 \text{ (F polynôme)},$$

l'idée essentielle de Poincaré est de lui associer la surface algébrique S d'équation $F(x,y,z) = 0$ et de considérer les solutions de (2) comme les projections sur le plan de courbes tracées sur la surface S. Plus précisément, ces dernières vérifient un système d'équations

$$(3)\quad \frac{dx}{dt} = X, \frac{dy}{dt} = Y, \frac{dz}{dt} = Z$$

où X, Y, Z sont des polynômes en x, y, z tels que l'on ait

$$X\frac{\partial F}{\partial x} + Y\frac{\partial F}{\partial y} + Z\frac{\partial F}{\partial z} = 0\,;$$

Poincaré est ainsi conduit à étudier ce que l'on appellerait aujourd'hui les courbes intégrales d'un champ de vecteurs tangents à la surface S. En fait, là aussi, il transforme la surface initiale S en une surface ne comprenant pas de nappe infinie (ni de singularité gênante) et se place sur une des nappes fermées S_1 de cette surface[45].

Utilisant au voisinage d'un point une représentation paramétrique de la surface à l'aide de deux variables u et v, il montre que dans ce domaine le système (3) équivaut à

$$(4)\quad \frac{du}{dt} = U, \frac{dv}{dt} = V$$

où U et V sont des fonctions analytiques réelles de u et v.

> *"On est alors ramené, écrit Poincaré, à l'étude des courbes planes définies par une équation différentielle du premier ordre et du premier degré ; car, dans le voisinage du point considéré, les fonctions U et V ont tous les caractères des polynômes entiers*[46]*.*
> *Si, poursuit-il, le point considéré est un point ordinaire, il passe par ce point une trajectoire et une seule.*
> *Si c'est un point singulier de l'équation différentielle, c'est-à-dire si U = V = 0, ce peut être un* col, *un* foyer, *un* nœud *ou un* centre, *présentant les mêmes propriétés que les points de même nom définis dans la première Partie."* [*op. cit.*, 116-117]

Ainsi apparaît le sens de l'introduction par Poincaré d'une surface associée, comme moyen d'étude de l'équation différentielle : alors que dans le plan, on n'a plus notamment l'unicité de la solution du problème de Cauchy pour l'équation (2) (à chaque point de coordonnées x,y correspondant, en général, plusieurs valeurs du coefficient différentiel), on retrouve pour les courbes correspondantes sur la surface S_1, les mêmes propriétés locales qui étaient à la

45. En termes actuels, il se place sur une surface compacte et connexe (sans bord).

46. Poincaré affirme ici, sans développer, la possibilité de généraliser les résultats des deux premières parties dans des cas où l'équation différentielle n'est plus algébrique de degré un, mais cependant suffisamment régulière.

base des méthodes employées pour les équations différentielles de degré un. C'est le cas en particulier de l'existence, en un point régulier ordinaire, du rapport d'exclusion entre trajectoires ou arcs d'une trajectoire, du fait de l'unicité de la solution.

Poincaré se propose alors de faire un inventaire des résultats des deux premières parties pour voir s'ils s'étendent à ce cas plus général :

> *"Il est une notion, indique-t-il d'emblée, qui va jouer un rôle fondamental dans ce qui va suivre, c'est le genre de la nappe S_1*[47]*, au point de vue de la géométrie de situation."*[*op. cit.*, 118]

Plusieurs théorèmes subsistent, en particulier celui concernant l'existence d'un système topographique (auquel Poincaré continue d'accorder une importance particulière), au prix d'une plus grande complexité des démonstrations du fait de la diversité des situations créées lorsque l'on trace un cycle sur la surface. Cependant, le genre de celle-ci influe aussi sur la *nature* même des résultats car, si pour les comportements *locaux* des courbes intégrales on retrouve ceux rencontrés précédemment, il n'en est pas de même des comportements *globaux*. Ainsi la formule donnant la distribution des points singuliers (noeuds, foyers, cols) devient-elle, si S_1 est de genre p : $N + F - C = 2 - 2p$. Cela suggère l'intérêt d'une étude particulière du tore, surface de genre $p = 1$, cas où la relation précédente n'implique plus l'existence de points singuliers. Poincaré donne l'exemple des courbes définies sur le tore par le système

$$\frac{d\omega}{dt} = a, \frac{d\phi}{dt} = b \text{ (a et b constantes positives),}$$

dont l'intégrale est

$$\omega = \frac{a}{b}\,\phi + \text{cte.}$$

On constate qu'il n'y a dans ce cas aucun point singulier et que, si a/b est irrationnel, chaque trajectoire est partout dense sur le tore. Ces dernières courbes n'entrent dans aucune des catégories prévues par le théorème de classification établi dans le cas des équations différentielles de degré un sur la sphère[48]. Par ailleurs, il n'y a pas dans ce cas de cycle limite et, outre les méridiens, les courbes fermées d'équation $\omega = c\,\phi + d$ avec c rationnel (d constante quelconque) sont des cycles sans contact. Les courbes intégrales précédentes étant stables au sens défini par Poincaré ci-dessus, on constate que les rôles, relativement à la stabilité des solutions, des deux types de cycles constituant le système topographique, sont inversés par rapport à la sphère.

La topologie des surfaces apparaît donc explicitement dans la troisième partie du mémoire de Poincaré et son rôle est essentiel dans le passage de

---

47. Poincaré donne la définition suivante: "Si l'on peut tracer, sur la surface fermée S_1, p cycles fermés n'ayant aucun point commun, sans partager la surface en deux régions séparées, et si l'on n'en peut tracer davantage, on dira que la surface S_1 est de genre p (ou ce qui revient au même qu'elle est 2p+1 fois connexe) ". Poincaré reprend ici la définition de Riemann (voir *supra* note 40).

48. Pour un énoncé général récent du théorème de classification sur les variétés de dimension deux, voir [Hartman 1982, 185].

l'étude locale à l'étude globale des courbes intégrales des équations différentielles. A ce titre, elle intervenait déjà implicitement dans les deux premières parties, puisque Poincaré y utilisait le fait qu'en traçant un cycle fermé on partage toujours la sphère en deux régions, c'est-à-dire que celle-ci est de genre zéro[49]. Mais c'est la plus grande complexité du cas où le degré de l'équation différentielle est supérieur à un, du fait de la diversité des situations possibles sur les surfaces associées, qui a conduit à l'intervention explicite de la topologie dans la théorie[50].

La *quatrième partie* du mémoire est principalement consacrée à l'extension de la théorie qualitative à l'ordre deux, grâce la représentation des solutions comme courbes dans l'espace. Elle paraît en 1886 (le texte étant daté du 13 décembre 1885) mais contient les résultats de travaux effectués entre 1882 et 1885. On y trouve en particulier le contenu, développé, de deux notes aux *CRAS* [51] : l'une, du 13 février 1882 [1882a], sur l'étude des points singuliers des courbes intégrales d'un système de deux équations différentielles

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} \quad ,$$

X, Y, Z étant des polynômes en x, y, z[52] ; l'autre, du 4 février 1884 [1884b], sur la classification des courbes intégrales au voisinage d'une courbe fermée solution du système.

Nous n'exposerons pas ici les résultats contenus dans cette quatrième partie (voir, par exemple, [Hagihara V_1, ch 23] et [Dieudonné 1978]). Nous nous contenterons de noter que Poincaré construit son étude selon le même schéma que précédemment : unicité de la courbe intégrale en un point ordinaire ; nature des points singuliers ; leur distribution globale en utilisant ici l'indice de Kronecker d'une surface algébrique ; introduction de surfaces sans contact ; rôle essentiel joué par les courbes intégrales fermées (correspondant aux solutions périodiques) et étude du comportement asymptotique des courbes voisines en considérant leurs points d'intersection successifs avec une surface

49. Voir, par exemple *supra* , l'utilisation du théorème de Jordan dans la démonstration du théorème de classification.

50. A l'époque, étaient synonymes les expressions "Topologie", "Géométrie de situation" et "*Analysis situs* ", ces deux dernières étant plus fréquemment employées. Remarquons l'analogie entre cette situation en théorie des équations différentielles et la découverte de ce même rôle de la topologie par Riemann en théorie des fonctions algébriques, à partir également de l'introduction d'une surface associée pour réaliser une uniformisation.

51. La note aux *CRAS* du 27 février 1882 est développée dans le chapitre XVII consacré à l'intégration par les séries, mais ne ressortit pas à la théorie qualitative (voir *supra* note 23).

52. Dans le mémoire publié, Poincaré considère plutôt le système de trois équations différentielles par rapport à la variable temps :

$$\frac{dx}{dt} = X, \frac{dy}{dt} = Y, \frac{dz}{dt} = Z$$

(voir *supra* les remarques sur la troisième partie), X, Y, Z étant des polynômes ou plus généralement des fonctions analytiques en x, y, z, considérées parfois comme dépendant aussi périodiquement de t (chapitre XIX).

transversale. Il aboutit ainsi à des résultats substantiels bien que beaucoup moins complets que pour l'ordre un.

Après le mémoire *Sur les courbes*, les recherches de Poincaré sur le sujet se sont poursuivies dans le cadre de l'étude du problème des $n \geq 3$ corps en mécanique céleste. Ainsi, dans le mémoire célèbre *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique* qui lui vaut l'attribution du prix du roi de Suède en 1889 [*Œuvres* VII], il inaugure l'étude qualitative des systèmes différentiels dits hamiltoniens. Celle-ci sera développée en particulier dans plusieurs chapitres de l'ouvrage *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste* [I,III][53].

Cependant, ces recherches, sur la stabilité du système solaire notamment, conduisaient Poincaré à étendre sa théorie à des équations différentielles d'ordre supérieur à deux. Pour cela,*"il me fallait, écrit-il dans son* Analyse *de 1901, créer un instrument destiné à remplacer l'instrument géométrique qui me faisait défaut quand je voulais pénétrer dans l'espace à plus de trois dimensions. C'est la principale raison qui m'a engagé à aborder l'étude de l'*Analysis situs*"*[54]. Les publications de Poincaré sur l'*Analysis situs* de dimension *n* [55] à partir de 1892, vont d'ailleurs établir les fondements de la topologie algébrique (voir [Scholz 1980], [Dieudonné 1989]). La "géométrisation" effectuée par Poincaré pour l'étude globale des solutions des équations différentielles n'est donc pas une simple illustration géométrique de raisonnements de nature analytique. Cette introduction systématique de la géométrie au niveau des objets (points, courbes, surfaces) et des rapports entre eux a conduit à dégager l'importance de propriétés spécifiques, topologiques de ces objets, lesquelles ressortissaient alors à une branche de la géométrie dont l'apport a été théoriquement essentiel pour l'étude du problème analytique initialement posé. Si les nombreuses applications de l'analyse à la géométrie marquent indiscutablement l'histoire des mathématiques au XIX[e] siècle, on doit donc mesurer aussi le rôle réciproque joué dans les progrès de théories analytiques importantes, par la géométrie et spécialement par sa branche Géométrie de situation ou *Analysis situs*, domaine d'ailleurs largement développé pour la circonstance.

---

53. Pour un état récent de la théorie qualitative des systèmes hamiltoniens, voir [Abraham-Marsden 1981].

54. Dans ses notices de 1884 et 1886, Poincaré marquait encore une hésitation à cet égard: "*Pour étendre les résultats précédents aux équations d'ordre supérieur au second, il faut renoncer à la représentation géométrique qui nous a été si commode, à moins d'employer le langage de l'hypergéométrie à n dimensions. Mais ce langage est si peu familier à la plupart des géomètres qu'on perdrait ainsi les principaux avantages que l'on peut attendre de la représentation en question*" [1884a, 29 ; 1886, 36]. Il est curieux de retrouver cette phrase dans l'*Analyse* de 1901, juxtaposée à celle qui représente son point de vue postérieur.

55. Dans l'introduction de son grand mémoire de 1895 sur l'*Analysis situs* , on peut lire: "*L'emploi des figures a donc avant tout pour but de nous faire connaître certaines relations entre les objets de nos études, et ces relations sont celles dont s'occupe une branche de la Géométrie que l'on a appelée Analysis situs , et qui décrit la situation relative des points des lignes et des surfaces, sans aucune considération de leur grandeur. Il y a des relations de même nature entre les êtres de l'hyperespace ; il y a donc une* Analysis situs *à plus de trois dimensions.*" [*Œuvres* VI, 193]

5. Le problème de l'intégration des équations différentielles

Dans la lignée du mémoire de Poincaré, l'étude qualitative des équations différentielles va susciter plusieurs publications à la fin du XIX^{e} et au début du XX^{e} siècle. Citons notamment : une partie du mémoire de A. M. Liapounov sur le "Problème général de la stabilité du mouvement" [1892], deux articles de J. Hadamard [1897 ; 1898][56], des articles de T. Levi-Civita (voir [Dell'aglio-Israël 1989]), un mémoire de I. Bendixson [1901][57].

Ce dernier travail *Sur les courbes définies par des équations différentielles* a une particulière importance sur le plan théorique car il généralise la théorie de Poincaré relative aux équations différentielles du premier ordre et du premier degré. En effet, considérant un système de deux équations différentielles autonomes

$$\frac{dx}{dt} = X(x,y)\,,\ \frac{dy}{dt} = Y(x,y)\,,$$

Bendixson montre que des résultats essentiels obtenus par Poincaré avec X et Y polynômes (sur une sphère), sont valables avec l'hypothèse plus faible que X et Y sont des fonctions réelles continûment dérivables, dans une région bornée A' du plan. Cette hypothèse est suffisante pour lui permettre d'utiliser le théorème d'existence et d'unicité de Picard et le théorème de continuité par rapport aux valeurs initiales de Lindelöf. Bendixson établit notamment le théorème de classification qui correspond au théorème XII de Poincaré :

> *"Si $x = x(t)$, $y = y(t)$, sont les équations d'une caractéristique [58] qui lorsque t croît de t_0 vers $+\infty$ reste toujours à l'intérieur de A', sans approcher indéfiniment d'aucun point singulier, deux cas seulement sont possibles. Ou la caractéristique sera elle-même une courbe fermée, ou elle s'approchera indéfiniment d'une caractéristique fermée."* [*op. cit.*, 11].

Sa démonstration, n'utilisant que des courbes différentiables et fondée sur la notion topologique essentielle de point limite d'une courbe intégrale, est à la fois plus générale et plus rigoureuse que celle de Poincaré. Après ce mémoire de Bendixson, le contenu de la théorie qualitative en dimension deux (sur une surface de genre zéro), s'est beaucoup rapproché de ce que l'on appelle aujourd'hui la théorie de Poincaré-Bendixson (*cf.* [Hartman 1982, ch VII]).

---

56. Soulignons que, outre ses travaux sur la question, Jacques Hadamard a fait beaucoup dans divers écrits pour montrer la spécificité et l'importance de la théorie qualitative des équations différentielles (voir, par exemple, son article sur l'œuvre mathématique de Poincaré reproduit dans [*Œuvres de Poincaré* XI, 152-242]).

57. Un peu plus tard, apparaîtront les travaux de George David Birkhoff qui joueront un rôle essentiel dans le domaine de l'étude qualitative des systèmes dynamiques [*Papers* I-II ; 1927]. On trouvera une liste de mathématiciens ayant apporté une contribution à la théorie au cours du XX^{e} siècle dans [Dieudonné 1977, 39].

58. Bendixson reprend cette expression de Poincaré, mais il s'agit chez lui de courbes paramétrées.

A ces divers travaux, il faut ajouter la présence d'un exposé de la théorie qualitative de Poincaré dans le *Traité d'analyse* de Picard en 1896 [*Traité* III], avec dans l'introduction ce commentaire :

> *"Le brillant développement de la théorie des fonctions d'une variable complexe avait fait un peu trop laisser de côté l'examen du cas où tous les éléments figurant dans les équations différentielles sont réels. Sous l'influence des travaux de M. Poincaré sur les courbes définies par des équations différentielles, ces questions depuis quelques années ont été reprises."*[59]

Cependant, quel que soit l'intérêt de ces publications concernant la théorie qualitative, elles sont encore peu nombreuses relativement à ce qui paraît alors dans l'ensemble du domaine des équations différentielles. De même, la plupart des grands traités édités à la fin du XIX^e^ siècle et au début du XX^e^ ne contiennent rien sur cette théorie : c'est le cas du *Cours d'analyse* de Jordan dans ses diverses éditions et du grand ouvrage *Theory of differential equations* de A. R. Forsyth qui affichait pourtant explicitement une ambition de complétude.

Pour mieux comprendre la conjoncture de l'époque, il nous semble intéressant de considérer particulièrement la position de Paul Painlevé, qui a conduit d'importants travaux sur la théorie analytique globale des équations différentielles et dont la communication au Congrès international des mathématiciens de 1904 était consacrée à un exposé de synthèse sur *Le problème moderne de l'intégration des équations différentielles* [*Œuvres* III, 753-768]. Examinons-en les thèmes essentiels[60]. Pour Painlevé, la période moderne de la théorie se caractérise d'abord par l'introduction systématique des variables imaginaires. Une fois ce cadre mis en place,

> *"l'intégration d'une équation différentielle se décomposera en deux opérations successives :*
> *1° Réduction de l'équation à des équations irréductibles ;*
> *2° Etude directe, dans tout le champ réel et complexe, de l'intégrale de ces équations irréductibles."* [*op. cit.*, 757].

La première opération (liée à la réductibilité éventuelle de l'équation à des équations simples) relève de l'intégration "formelle", algébrique, et utilise de façon essentielle la théorie des groupes. En ce qui concerne la seconde, l'intégration analytique, Painlevé lui fixe le but suivant :

---

59. Ce mouvement se traduit notamment, dans [*Traité* II], par un exposé cohérent de Picard sur les théorèmes d'existence pour les équations différentielles, marquant la plus grande généralité du théorème dit de Cauchy-Lipschitz dans le domaine réel. Cependant, il faut remarquer que, dans son mémoire, Poincaré, contrairement à Bendixson, se place toujours dans le cadre algébrique (ou analytique) réel. Ce n'est donc pas la recherche de la généralité des hypothèses qui le conduit à s'écarter du cadre de la variable complexe mais la nature des problèmes posés et des méthodes utilisées, qui concernent les propriétés qualitatives des courbes réelles.

60. Painlevé y reprend notamment des idées émises à diverses reprises, par exemple dans l'introduction de ses *Leçons de Stockholm* (1895) ou dans celle de l'*Analyse* de ses travaux rédigée en 1900 [*Œuvres de Painlevé* I].

"D'une manière générale, une équation différentielle irréductible devra être regardée comme intégrée si, par un procédé quelconque d'approximation indéfinie (série, fraction continue, intégrale définie, etc.), on arrive à représenter l'intégrale générale dans tout son domaine d'existence (réel et complexe), avec une erreur aussi petite qu'on veut et dont on saura donner une limite, la représentation mettant en évidence les propriétés fondamentales de l'intégrale." [*op. cit.*, 762-763][61]

Dans ce sens, il cite ses recherches sur les équations différentielles dont les intégrales sont uniformes, et particulièrement le cas de l'équation $y'' = 6y^2 + x$, qu'il présente comme *"le premier exemple d'une équation différentielle qui n'est attaquable par aucune méthode d'intégration formelle [irréductibilité] et qui comporte, de par la théorie des fonctions, une intégration parfaite au sens moderne du mot."* [*op. cit.*, 764].

Cependant, reconnaissant qu'une telle intégration parfaite n'est pas encore réalisée pour nombre d'équations intervenant dans les applications, Painlevé ajoute un paragraphe sur "L'intégration approchée dans le domaine réel" :

"Quand une équation différentielle qui se présente dans une application ne comporte (ou ne paraît comporter), ni intégration formelle, ni intégration analytique, comment en aborder l'étude dans l'état actuel de la science ? La seule ressource est de l'attaquer directement à l'aide des procédés d'approximation aujourd'hui acquis." [*op. cit.*, 765].

Il indique que la question a alors un double aspect, qu'elle peut être "d'espèce qualitative" ou au contraire "quantitative", et, insistant sur l'influence de la théorie des fonctions analytiques dans les deux cas, Painlevé conclut :

"Intégration formelle ; intégration analytique, aussi parfaite que possible, dans le champ complexe ; intégration approchée dans le domaine réel[62] : telles sont les trois directions dans lesquelles se sont développées les Mathématiques. Au centre de toutes ces recherches, la théorie des fonctions apparaît comme jouant un rôle directeur et prépondérant." [*op. cit.*,768]

Le domaine analytique complexe joue donc un rôle nettement dominant dans la conception de Painlevé de l'intégration des équations différentielles, tant au niveau du but fixé que des moyens utilisés pour l'atteindre. Le domaine réel apparaît ainsi comme simple lieu d'application des résultats obtenus dans le domaine complexe ou comme celui d'une intégration

---

61. La difficulté est évidemment de trouver une représentation qui satisfasse à la fois à ces trois conditions: analytique, numérique et qualitative. Cela est bien illustré par le cas du problème des trois corps. K. F. Sundman [1913] est parvenu, en utilisant des travaux de Poincaré et de Painlevé, à exprimer les coordonnées des corps à l'aide de développements valables même en cas de choc. Cependant, ce remarquable résultat d'intégration analytique s'est avéré peu pertinent, tant en ce qui concerne le calcul numérique des solutions que leur étude qualitative.

62. Poincaré, dans l'*Analyse* de ses travaux en 1901 soulignait au contraire le caractère rigoureux des résultats de l'étude qualitative réelle du problème des trois corps, par opposition à ceux correspondant au calcul approché [*Œuvres* VII, 5].

imparfaite. Dans ce contexte, les études qualitatives, bien que citées, ne trouvent pas leur place théorique spécifique.

La communication de Poincaré sur *L'avenir des mathématiques* au congrès suivant des mathématiciens, en 1908, contraste sur ce point avec celle de Painlevé. Rappelant que l'on ne peut pas en général résoudre une équation différentielle à l'aide des fonctions connues, il indique :

> *"Ce que nous pouvons toujours faire, ou plutôt ce que nous devons toujours chercher à faire, c'est de résoudre le problème qualitativement pour ainsi dire, c'est-à-dire de chercher à connaître la forme générale de la courbe qui représente la fonction inconnue. Il reste ensuite à trouver la solution quantitative du problème [...]*
> *Mais alors il n'y a plus des problèmes résolus et d'autres qui ne le sont pas ; il y a seulement des problèmes plus ou moins résolus selon qu'ils le sont par une série de convergence plus ou moins rapide, ou régie par une loi plus ou moins harmonieuse."* [Poincaré 1908a, 173]

Cette conception de l'intégration des équations différentielles énoncée par Poincaré est la même qui, dès les premières années de sa carrière, s'est manifestée par l'extrême diversité de ses travaux en la matière, par sa capacité originale à suivre simultanément des voies multiples voire opposées (*cf. supra* paragraphe 1)[63]. Aujourd'hui, l'approche qualitative et géométrique (topologique) dans le cadre réel occupe une place importante dans le domaine des équations différentielles ; son caractère à la fois spécifique et complémentaire des approches analytique, algébrique ou numérique, nous semble confirmer la modernité de la conception fondamentalement pluraliste du problème de l'intégration qui était celle d'Henri Poincaré[64].

63. Son attitude par rapport aux séries de Lindstedt en mécanique céleste est de ce point de vue exemplaire: il a, à partir de 1883, développé une démarche critique qui l'a conduit à établir la non convergence de ces séries et donc leur non pertinence quant au problème global de la stabilité ; mais, simultanément, il s'attachait à montrer la valeur pratique de ces séries pour le calcul numérique et à perfectionner la méthode en ce sens.

64. Il nous semble intéressant de rapprocher la situation ainsi rencontrée en théorie des équations différentielles à la fin du XIX^{e} siècle, de celle, contemporaine, en géométrie algébrique, avec l'affirmation récente d'une théorie réelle autonome (voir [Bochnak-Coste-Roy 1987]).

Bibliographie

R. ABRAHAM - J. E. MARSDEN [1981], *Foundations of mechanics*, 2e éd., Benjamin.
A. BELLIVIER [1956], *Henri Poincaré ou la vocation souveraine*, Gallimard.
I. BENDIXSON [1901], "Sur les courbes définies par des équations différentielles", *Acta Math.*, t. 24.
G. D. BIRKHOFF [*Papers*], *Collected Mathematical Papers*, 3 vol., Dover, 1968.
G. D. BIRKHOFF [1927], *Dynamical Systems*, American Mathematical Society.
J. BOCHNAK - M. COSTE - M.F. ROY [1987], *Géométrie algébrique réelle,* Springer.
G. DARBOUX [1878], "Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré", *Bulletin Sc. Math.*, 2e s., t. II.
L. DELL'AGLIO - G. ISRAEL [1989], "La théorie de la stabilité et l'analyse qualitative des équations différentielles ordinaires dans les mathématiques italiennes : le point de vue de Tullio Levi-Civita" *Cahiers du Séminaire d'histoire des mathématiques*, t. 10.
J. DIEUDONNE [1977], *Panorama des mathématiques pures. Le choix bourbachique,* Gauthier-Villars.
J. DIEUDONNE [1978], "L'analyse fonctionnelle", *Abrégé d'histoire des mathématiques 1700-1900*, t. II, Hermann.
J. DIEUDONNE [1989], *A history of algebraic and differential topology 1900-1960,* Birkhäuser.
V.A. DOBROVOLSKY [1972], "Sur l'histoire de la classification des points singuliers des équations différentielles", *Revue d'histoire des sciences*, t. XXV, n°1.
H. DULAC [1923], "Sur les cycles limites", *Bulletin SMF*, t. 51.
G. FOURET [1874], *CRAS*, t. 78 (29 juin).
G. FOURET [1878], *CRAS*, t. 86 (4 mars).
G. FOURET [1879], "Sur les faisceaux ponctuels plans de caractéristique ν, ayant un point principal multiple d'ordre ν", *Bulletin SMF*, t. 7.
J. HADAMARD [1897], "Sur certaines propriétés des trajectoires en dynamique", *Journal Math.,* 5e s., t. III.
J. HADAMARD [1898], "Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques", *Id.*, t. IV.
J. GRAY [1986], *Linear differential equations and group theory from Riemann to Poincaré*, Birkhäuser.
Y. HAGIHARA [1970-1976], *Celestial Mechanics*, vol. I-V, The MIT Press ; Japan Society for the Promotion of Science.
S. C. HARETU [1877], *CRAS*, t. 85 (3 septembre).
S. C. HARETU [1878], *Sur l'invariabilité des grands axes des orbites planétaires*, Thèse, Paris, Gauthier-Villars.
P. HARTMAN [1982], *Ordinary differential equations*, 2e éd., Birkhäuser.

D. HILBERT [1900], "Sur les problèmes futurs des mathématiques", *Compte rendu du 2e Congrès international des mathématiciens.*

M. KLINE [1972], *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford University Press.

A.M. LIAPOUNOV [1892], "Problème général de la stabilité du mouvement", *Annales Fac. Sc. Toulouse*, 2e s., t. IX (1907) [trad. fr.].

P. PAINLEVE [*Œuvres*], *Œuvres de Paul Painlevé,* vol. I-III, CNRS.

E. PICARD [*Traité*], *Traité d'analyse*, t. I-III, 1re éd. (1891-1896).

H. POINCARE [*Œuvres*], *Œuvres de Henri Poincaré,* t. I-XI, Gauthier-Villars (nouveau tirage 1950-1965)

H. POINCARE [*Sur les courbes*], "Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle", (1re partie) *Journal Math.,* 3e s., t. VII (1881) = [*Œuvres* I, 3-44] ; (2e partie) *Id.,* 3e s., t.VIII (1882) = [*Œuvres* I, 44-84] ; (3e partie) *Id.,* 4e s., t.I (1885) = [*Œuvres* I, 90-158] ; (4e partie) *Id.,* 4e s.,t.II (1886) = [*Œuvres* I, 167-222].

H. POINCARE [1880], *CRAS* (22 mars) = [*Œuvres* I, 1-2].

H. POINCARE [1881], *CRAS* (5 décembre) = [*Œuvres* I, 85-86].

H. POINCARE [1882a], *CRAS* (13 février) = [*Œuvres* I, 159-161].

H. POINCARE [1882b], *CRAS* (27 février) = [*Œuvres* I, 162-163].

H. POINCARE [1884a], *Notice sur les travaux scientifiques*, Gauthier-Villars.

H. POINCARE [1884b], *CRAS* (4 février) = [*Œuvres* I, 87-89].

H. POINCARE [1886], *Notice sur les travaux scientifiques*, Gauthier-Villars.

H. POINCARE [*Méthodes nouvelles*], *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, t. I-III, Paris (1892-1899).

H. POINCARE [1908a], "L'avenir des mathématiques", *Atti del IV Congresso internazionale dei matematici*, vol. I.

H. POINCARE [1908b], *Science et méthode*, Flammarion.

E. SCHOLZ [1980], *Geschichte des Mannigfaltigkeitsbegriffs von Riemann bis Poincaré*, Birkhäuser.

C. STURM [1836], "Mémoire sur les équations différentielles linéaires du second ordre", *Journal Math.,* 1re s., t. I.

K. F. SUNDMAN [1913], "Mémoire sur le problème des trois corps", *Acta Math.,* 36.

J. TANNERY [1875], "Propriétés des intégrales des équations différentielles linéaires à coefficients variables", *Annales sc. ENS*, 2e s., t. IV.

F. TISSERAND [1876], *CRAS*, t. 82 (21 février).

F. TISSERAND [*Traité*], *Traité de mécanique céleste*, t. I-IV (1889-1896).

J.-C. YOCCOZ [1987], "Non-accumulation de cycles limites", *Séminaire Nicolas Bourbaki*, vol. 1987-88.