Christian Houzel

Aux origines de la géométrie algébrique : les travaux de Picard sur les surfaces (1884-1905)

Introduction

Emile Picard a développé la géométrie algébrique des surfaces à partir de 1884 sous la forme d'une théorie transcendante, en considérant les intégrales de fonctions algébriques de deux variables complexes ; il utilisait systématiquement l'équation différentielle linéaire dite depuis de Picard-Fuchs (ou «connexion de Gauss-Manin») et la topologie algébrique en dimension 4. Une dizaine d'années plus tard, les géomètres italiens G. Castelnuovo et F. Enriques ont élaboré une théorie algébrico-géométrique des surfaces sans considération de nature transcendante. Ces travaux sont restés, dans les années suivantes, la principale source d'inspiration pour les recherches de géométrie algébrique. Les deux points de vue tirent leur origine des travaux de Max Noether (M. Noether 1870, 1875) d'une quinzaine d'années plus anciens ; nous commencerons en résumant quelques-uns de ces résultats antérieurs.

Il s'agit d'une extension au cas des surfaces des théories développées pour l'étude des courbes algébriques. Le point de vue transcendant pour les courbes est dû à Riemann : c'est sa théorie des intégrales abéliennes (Riemann 1857). Riemann considérait les intégrales de fonctions algébriques d'une variable, de la forme

$$\int R(s, z)\,\mathrm{d}z \tag{1}$$

où R est rationnel et s est lié à z par l'équation

$$F(s, z) = 0, \tag{2}$$

F polynôme. Il classait ces intégrales en trois *espèces* :

1° les intégrales partout finies sur la surface de Riemann (compacte) associée à l'équation (2) ;

2° les intégrales avec seulement des singularités polaires ;

3° les intégrales avec des singularités logarithmiques.

Il y a un nombre fini maximum p d'intégrales de première espèce linéairement indépendantes *modulo* les constantes ; c'est le nombre que Clebsch a appelé plus tard le *genre* de la courbe algébrique définie par l'équation (2). Comme la notion d'intégrale de première espèce est visiblement invariante par transformation birationnelle, il en est de même du genre p. La forme générale des intégrales de première espèce est

$$\int \frac{Q(s, z)}{F'_s}\,\mathrm{d}z \tag{3}$$

où Q est un polynôme qui s'annule en tous les points singuliers de (2), que l'on suppose des points doubles ordinaires pour simplifier, et qui est de degré convenable ; si F est de degré total m et qu'il n'y a pas de point singulier à l'infini, Q doit être de degré au plus m -3. Lorsque les singularités sont plus compliquées, on doit préciser les conditions relatives à ces singularités ; par exemple un point multiple d'ordre i pour (2) avec i tangentes distinctes doit être de multiplicité i -1 pour la courbe d'équation $Q\,(s, z) = 0$. On trouve ainsi que, si les seules singularités de (2) sont des points multiples à tangentes distinctes, le genre est donné par la formule numérique de M. Noether

(4) $$p = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - \sum \frac{i\,(i-1)}{2}$$

où la somme est étendue à tous les points multiples. On appelle *adjointes* à (2) les courbes algébriques $Q\,(s, z) = 0$ qui satisfont aux conditions voulues relatives aux points singuliers de (2) ; ainsi les intégrales de première espèce correspondent aux adjointes de degré $\leq m$ -3.

Il était naturel d'étendre ces considérations aux surfaces en introduisant les intégrales *doubles* de première espèce relatives à une surface d'équation

(5) $$f\,(x, y, z) = 0$$

et les *surfaces adjointes* correspondantes ; ceci fut fait par Clebsch (Clebsch 1868). Les intégrales considérées sont de la forme

(6) $$\iint R\,(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

avec R rationnelle, et on leur impose d'être partout finies sur la surface (y compris à l'infini) ; lorsque les singularités de (5) sont ordinaires (courbe double avec des points triples qui sont des points triples de la surface avec trois plans tangents distincts), la fonction R doit être de la forme

(7) $$\frac{Q\,(x, y, z)}{f'z}$$

où Q est un polynôme nul le long de la courbe double de (5) et de degré $\leq m$ -4 ($m = \deg f$). Si les singularités de (5) sont plus compliquées, il faut préciser les conditions qu'elles imposent à Q : une courbe multiple d'ordre i avec i plans tangents en général distincts doit être de multiplicité i -1 pour la surface d'équation $Q\,(x, y, z) = 0$ tandis qu'un point singulier isolé de multiplicité λ pour (5) doit être de multiplicité λ-2 pour $Q = 0$. Les surfaces algébriques $Q = 0$ satisfaisant aux conditions imposées par les singularités de (5) sont les *adjointes*, et les intégrales (6) de première espèce correspondent aux adjointes de degré $\leq m$ - 4. Clebsch a considéré le nombre maximum p_g d'adjointes de degré $\leq m$ - 4 linéairement indépendantes ; ce *genre géométrique* est un invariant birationnel de la surface (5) puisque la notion d'intégrale double de première espèce est invariante par les transformations birationnelles. M. Noether a entrepris l'étude du genre p_g qu'il appelait *Flächengeschlecht* (Noether 1870) ; sa détermination numérique est beaucoup plus difficile que dans le cas des courbes car il n'est pas évident de trouver le nombre de conditions linéaires qu'impose à une surface le fait de passer par une courbe gauche et on ne sait pas *a priori* si les conditions trouvées sont indépendantes. Considérons une courbe non singulière de degré d et de genre p dans l'espace de dimension 3 ; le nombre N_k de conditions linéaires que doit vérifier une surface de degré k pour passer par cette courbe s'écrit $kd - p + 1$ si k est assez grand, par exemple si $k \geq d - 2$. Lorsque la courbe considérée a t points triples ordinaires, on trouve (pour k assez grand)

(8) $$N_k = kd - p - 2t + 1 .$$

Si ces conditions sont indépendantes et d pas trop grand (par exemple $d \leq m - 2$), on trouve, en appliquant (8) pour $k = m - 4$, une formule numérique pour le genre de la surface :

(9) $$p_a = \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{6} - (m-4)d + 2t + p - 1 ;$$

mais le *genre arithmétique* défini par (9) peut être strictement plus petit que p_g comme Cayley ne tarda pas à le découvrir. En effet, dans le cas d'une surface *réglée*, c'est-à-dire une surface birationnellement équivalente à $C \times \mathbf{P}_1$ où C est une courbe algébrique de genre p, on a $p_g = 0$ tandis que Cayley a trouvé $p_a = -p < 0$ si C n'est pas rationnelle (Cayley 1871) ; la différence $q = p_g - p_a$ a été appelée plus tard l'*irrégularité* de la surface (5) (Picard disait le *défaut*), celle-ci étant qualifiée de régulière si $p_g = p_a$. Zeuthen a établi l'invariance birationnelle du genre arithmétique (Zeuthen 1871).

Premiers travaux de Picard : intégrales de différentielles totales

Picard est arrivé à l'étude des surfaces algébriques en cherchant à étendre à deux variables complexes des théories connues dans le cas d'une seule variable. C'est ainsi que, dès 1881, il avait déterminé le genre $p_g = 1$ d'une «surface hyperelliptique», c'est-à-dire d'une surface paramétrée d'une manière en général biunivoque (aux périodes près) par des fonctions thêta de deux variables (Picard 1881, **1882**) ; une telle surface est donc birationnellement équivalente au quotient $\mathbf{C}^2/\Gamma$ où Γ est un réseau de périodes (sous-groupe additif discret de rang 4). Il s'est ensuite intéressé aux «surfaces hyperfuchsiennes» D_4/Γ où D_4 est la boule unité $|x|^2 + |y|^2 < 1$ de $\mathbf{C}^2$ et Γ un groupe discontinu d'homographies à quotient compact (Picard 1883) ainsi qu'aux «surfaces hyperabéliennes» $(H \times H)/\Gamma$ où H est le demi-plan de Poincaré et $\Gamma \subset SL(2, \mathbf{C}) \times SL(2, \mathbf{C})$ est un sous-groupe discret à quotient compact (Picard 1885a) ; il considérait en particulier la topologie de ces surfaces en cherchant leurs nombres de Betti.

Mais le véritable point de départ des travaux de Picard en géométrie algébrique est son étude des *intégrales simples* associées à une surface algébrique (5) (Picard 1884a, 1884b, **1885c**). Ce sont des intégrales de différentielles totales étendues à un chemin tracé sur la surface :

(10) $$\int P\, dx + Q\, dy$$

où P et Q sont des fonctions rationnelles de x, y et z liées par (5) ; on impose la condition d'intégrabilité

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{11}$$

où z est regardé comme une fonction de x et y grâce à la relation (5). Picard donne une classification de ces intégrales en trois espèces analogues à celles de Riemann et il commence par l'étude des deux premières espèces. Si l'intégrale (10) est de première espèce, c'est-à-dire qu'elle reste partout finie, on voit d'abord, en se restreignant aux courbes sections de la surface par les plans y = const. ou x = const., qu'elle peut s'écrire

$$\int \frac{A\,\mathrm{d}y - B\,\mathrm{d}x}{f'_z}, \tag{12}$$

où A et B sont des polynômes en x, y et z de degré $\leq m-2$; plus précisément, A est de degré $\leq m-3$ en y, z tandis que B est de degré $\leq m-3$ en x, z. Un calcul facile montre que la condition d'intégrabilité (11) équivaut à l'existence d'un polynôme C de degré $\leq m-2$ en x, y, z et de degré $\leq m-3$ en x, y tel que

$$Af'_x + Bf'_y + Cf'_z = \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right)f \tag{13}$$

et l'intégrale (12) s'écrit d'ailleurs aussi bien

$$\int \frac{C\,\mathrm{d}x - A\,\mathrm{d}z}{f'_y} = \int \frac{B\,\mathrm{d}z - C\,\mathrm{d}y}{f'_x},$$

ce qui montre qu'elle reste finie en tout point ordinaire si (13) est vérifié ; en considérant les courbes intersections de la surface par des plans du type $y = \mu x$ ou $z = \mu x$ on voit encore que l'on peut écrire $A = x\,\varphi + A_1$, $B = y\,\varphi + B_1$ et $C = z\,\varphi + C_1$ où φ est un polynôme homogène de degré $m-3$ tandis que A_1, B_1, C_1 sont de polynômes de degrés $\leq m-3$. Si (a, b, c) est un point double isolé ordinaire (avec un cône de tangentes non dégénéré), on voit, en dérivant (13), que A, B et C s'annulent en ce point, et il en résulte que l'intégrale y est encore finie ; si la surface a une courbe double où se croisent deux nappes dont les plans tangents restent distincts (pas de «point-pince»), on impose à A, B et C de s'annuler le long de cette courbe et cela suffit à assurer la finitude de l'intégrale sur la courbe. Enfin on peut vérifier, en passant en coordonnées homogènes, que l'intégrale reste finie aux points à l'infini de la surface. On a donc une caractérisation complète des intégrales simples de première espèce pour les surfaces dont les seules singularités sont des points doubles isolés ordinaires et une courbe double sans point-pince. De cette caractérisation, Picard déduit que la surface «la plus générale» de degré m n'admet aucune intégrale simple de première espèce non constante, car il est en général impossible de trouver des polynômes A, B et C de la forme voulue et vérifiant (13).

Il passe ensuite au cas des surfaces qui admettent des singularités plus compliquées, mais toujours «ordinaires» : des points multiples isolés avec un cône de tangentes sans droite double et une courbe multiple d'ordre k avec k plans tangents restant distincts. Les polynômes A, B et C doivent s'annuler à l'ordre k

-1 le long de cette courbe pour que l'intégrale y reste finie ; pour les points isolés de multiplicité p il n'y a aucune condition à imposer (on peut voir que A, B et C s'y annulent à l'ordre p -2 comme conséquence de (13)), mais l'intégrale peut être indéterminée (tout en restant bornée) en un tel point si $p \geq 3$.

Comme les surfaces de degré ≤ 3 sont unicursales (sauf les cônes cubiques sans droite double), elles ne peuvent admettre d'intégrale simple de première espèce non constante. Pour les degrés supérieurs, Picard remarque que deux intégrales simples *indépendantes* de première espèce fournissent une intégrale double de première espèce ; en termes modernes, il associe à deux formes différentielles ω et ω' de degré 1 leur produit extérieur $\omega \wedge \omega'$ et la considération de cette nouvelle forme lui permet d'établir que les surfaces de degré 4 ou 5 ne peuvent admettre deux intégrales simples de première espèce indépendantes. Poincaré a caractérisé les surfaces de degré 4 qui admettent effectivement une intégrale simple de première espèce non constante : ce sont des surfaces réglées ou des surfaces de révolution non unicursales (Poincaré 1884).

Picard s'intéresse ensuite aux intégrales simples de première espèce sur les surfaces hyperelliptiques ; il remarque d'abord que les deux paramètres u et v tels que les coordonnées d'un point de la surface s'expriment au moyen de fonctions thêta de u et v sont nécessairement de telles intégrales et qu'elles sont indépendantes. Il n'y a pas d'autre intégrale simple de première espèce indépendante de u et v. Ceci ne s'applique pas à la surface de Kummer bien qu'on puisse la paramétrer au moyen de fonctions thêta de deux variables ; en effet un tel paramétrage définit une surface hyperelliptique revêtement de degré 2 de la surface de Kummer, mais cette dernière n'est pas hyperelliptique. Comme il n'y a que deux intégrales simples de première espèce indépendantes, le genre géométrique d'une surface hyperelliptique est 1. Inversement, Picard considère une surface de genre 1 avec deux intégrales simples de première espèce indépendantes u et il étudie si on peut exprimer les coordonnées x, y, z au moyen de fonctions uniformes de u et de v; ces fonctions sont alors nécessairement quadruplement périodiques. Les points qui font problème sont les points singuliers de la surface et ses points d'intersection avec la surface adjointe, qui est unique ; Picard suppose que les singularités sont des points doubles isolés et une courbe double. L'intersection de la surface avec sa surface adjointe est composée de la courbe double et d'une courbe complémentaire Γ ; les points de la courbe double qui ne sont pas sur Γ ne font pas problème. Si u_0, v_0 sont les valeurs de u et en un point de Γ, Picard remarque que (u_0, v_0) doit être un point d'indétermination pour les fonctions méromorphes x, y, z de (u, v) ; comme les points d'indétermination d'une fonction méromorphe sont isolés, on a $u = u_0$ et $v = v_0$ le long de Γ. On voit alors que les seuls points de Γ qui pourraient poser problème sont les points doubles isolés de la surface ou bien ceux où la surface adjointe lui est tangente ; ce sont les points doubles de Γ ou ses points d'intersection avec la courbe double. L'analyse de Picard montre qu'il n'y a aucun problème en ces derniers points mais que les premiers empêchent l'uniformité de x, y, z en fonction de u et v ; la première condition à imposer est donc que Γ n'ait pas de point double. Une autre condition est relative aux points doubles isolés de la surface ; dans le cas considéré la surface adjointe, donc la courbe Γ, passe par ces points car l'intégrale double de première espèce est $\iint du \wedge dv$ et Picard établit que x, y, z ne peuvent être fonctions uniformes de u et v au voisinage de tels points. La surface ne peut donc avoir aucun point double isolé. Enfin Picard démontre que $\frac{du}{dv}$ prend une seule fois chaque valeur le long d'une composante de Γ et qu'une telle composante est donc *unicursale* ; c'est un cas particulier d'un résultat plus général de M. Noether selon lequel une courbe «exceptionnelle» c'est-à-dire contenue dans toutes les adjointes de degré m - 4 (et distincte de la courbe double) est nécessairement unicursale (Noether 1870). Si toutes ces conditions sont vérifiées, la surface est hyperelliptique ; son degré doit être au moins 6 et Picard donne un exemple de surface de degré 6 hyperelliptique, avec une courbe double de degré 6 décomposée en une cubique plane et 3 droites. Comme application, Picard étudie à quelles condition une équation aux dérivées partielles polynomiale

$$f\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \tag{14}$$

admet une solution u fonction uniforme quadruplement périodique de (x, y) ; il faut d'abord que la surface d'équation $f(u, v, w) = 0$ soit hyperelliptique.

Intégrales simples de seconde espèce

Picard définit les intégrales simples de *deuxième espèce* comme des intégrales (10) soumises à la condition d'intégrabilité (11) et telles que, pour tout changement de variables $x\text{-}x_0 = t\,\lambda(t)$, $y\text{-}y_0 = t\,\lambda_1(t)$ au voisinage d'un couple quelconque (x_0, y_0) de valeurs de x et y, avec λ, λ_1 holomorphes pour t assez petit, l'intégrale devienne une fonction de t avec au plus une singularité *algébrique* en $t = 0$; cela revient à dire que l'intégrale étendue à un cycle «infiniment petit» est toujours nulle, les singularités logarithmiques étant exclues (Picard 1885b, 1886a, **1886b**).

Les méthodes calculatoires utilisées pour l'étude des intégrales simples de première espèce ne peuvent plus s'appliquer. Picard part de la remarque fondamentale suivante : en considérant $y = y_0$ comme constant dans (10), on obtient une intégrale abélienne $\int P\,dx$ relative à la courbe algébrique $f(x, y_0, z) = 0$ section de la surface (5) par le plan $y=y_0$ et toute période de cette intégrale abélienne est une période de (10) (une période est la valeur de l'intégrale étendue à un cycle). Il en résulte que les dites périodes sont *indépendantes* de y_0 ; d'ailleurs toutes les périodes de (10) se ramènent aux périodes précédentes car tout cycle de dimension 1 de la surface (5) est *homologue* à un cycle contenu dans un plan $y = y_0$. Picard en déduit que, lorsque (5) est «la plus générale» de son degré, toute intégrale simple de deuxième espèce a toutes ses périodes nulles ; c'est alors une fonction uniforme, donc rationnelle. Pour cela, il considère les valeurs singulières y'_0 de y pour lesquelles le plan $y = y'_0$ est tangent à la surface ; pour une telle valeur le contour apparent de la surface a un point double où deux branches se croisent et Picard observe que la période relative à un cycle dans le plan $y = y_0$ (point ordinaire) qui entoure les deux points où ces branches percent le plan mais pas d'autre point du contour apparent est nécessairement nulle car elle devient nulle lorsque y se déplace de y_0 à y'_0 .

Il faut alors déterminer dans quels cas il existe des intégrales simples de deuxième espèce non rationnelles. Picard commence par établir que, sur une courbe algébrique de degré m, d'équation $F(x, z) = 0$ et de genre p, l'espace des formes différentielles de deuxième espèce a une base $\left(\frac{Q_j(x, z)}{F'_z}\, dx\right)$, où Q_1, Q_2, …, Q_{2p} sont des polynômes de degré $\leq 2m - 4$; dans le cas où la courbe est la section de la surface (5) par un plan y = const., on a $F(x, z) = f(x, y, z)$ où y est un paramètre et les coefficients des Q_j sont des polynômes en y. L'intégrale (10), supposée de deuxième espèce, donne une intégrale de deuxième espèce $\int P\, dx$ sur cette courbe, donc de la forme

$$\sum_{j=1}^{2p} a_j \int \frac{Q_j}{f'_z}\, dx \tag{15}$$

avec des coefficients a_j fonctions rationnelles de y et ses périodes doivent être *indépendantes* de y. Les périodes $P_{j,k}$ ($k = 1, 2, …, 2p$) des intégrales $\int \frac{Q_j}{f'_z}\, dx$ sur un système de $2p$ cycles indépendants de la courbe $f(x, y, z) = 0$ sont des fonctions de y mais les combinaisons

$$\sum_{j=1}^{2p} a_j P_{j,k} = \alpha_k \tag{16}$$

sont constantes. Des équations (16) on tire

$$a_j = \sum_{k=1}^{2p} Q_{j,k}\, \alpha_k \tag{17}$$

où les $Q_{j,k}$ sont les cofacteurs de la matrice $(P_{j,k})$ divisés par son déterminant qui est une fonction rationnelle de y . Or, d'après Fuchs, les périodes $P_{j,k}$ sont, pour chaque j, solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre $2p$ en général et à coefficients polynomiaux en y (Fuchs 1871) et le groupe de monodromie de cette équation ne dépend pas de j ; il en résulte que les $Q_{j,k}$ vérifient, pour chaque j, une équation du même type et a_j est une solution rationnelle de cette équation. Picard note E l'équation pour $j = 1$ et remarque qu'à chaque solution rationnelle a_1 de E correspond une solution rationnelle a_j de l'équation d'indice j ; ces solutions permettent de construire une intégrale abélienne $\int R\, dx$ de deuxième espèce dont les périodes sont indépendantes de y et il reste à trouver une fonction rationnelle $S(x, y, z)$ telle que $\int R\, dx + S\, dy$ soit une intégrale de deuxième espèce pour la surface (5). La condition d'intégrabilité $\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial y}$ impose que

$$S(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial R}{\partial y} \mathrm{d}x = \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^{x} R \, \mathrm{d}x$$

et on pose donc

$$S(x, y, z) = \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial y} \sum_{i=1}^{m} \int_{x_0, z_i}^{x, z} R(x, y, z) \mathrm{d}x \tag{18}$$

où $z_1, \ldots, z_m$ sont les solutions de $f(x_0, y, z) = 0$; les intégrales sont définies *modulo* les périodes mais, comme celles-ci ne dépendent pas de y, S est une fonction uniforme, donc rationnelle. Comme l'intégrale abélienne $\int R \, \mathrm{d}x$ a des périodes non nulles, l'intégrale ainsi construite n'est pas une fonction rationnelle ; la détermination des intégrales simples de deuxième espèce non triviales sur la surface (5) est ainsi ramenée à celle des solutions rationnelles d'une équation différentielle linéaire E .

Comme exemple de surfaces admettant des intégrales simples de deuxième espèce non rationnelles, Picard cite les surfaces hyperfuchsiennes ou hyperabéliennes dont nous avons parlé ci-dessus. Si Γ est un groupe hyperfuchsien ou hyperabélien, il considère un homomorphisme ρ de Γ dans le groupe additif $\mathbf{C}$ et il construit une fonction méromorphe $\varphi(u, v)$ telle que

$$\varphi(g(u, v)) = \varphi(u, v) + \rho(g) \tag{19}$$

pour tout élément g de Γ ; on l'obtient comme quotient de deux séries de fonctions rationnelles en (u, v). Alors $\mathrm{d}\varphi$ est invariant par les transformations de Γ et φ est donc une intégrale simple de deuxième espèce pour la surface associée à Γ. Si $\sum_1, \ldots, \sum_{p_3}$ est un système fondamental de cycles de dimension 3 sur cette surface, on associe à chaque $\sum_j$ une transformation hyperbolique g_j de Γ et on voit que l'on peut choisir arbitrairement les valeurs des $\rho(g_j)$ pour déterminer ρ ; il en résulte que le nombre maximum d'intégrales simples de deuxième espèce linéairement indépendantes *modulo* les fonctions rationnelles est égal au nombre de Betti p_3, qui est aussi le nombre des périodes indépendantes de chacune de ces intégrales. Picard remarque enfin que ces surfaces sont très spéciales : on ne peut donc pas espérer paramétrer une surface arbitraire par des fonctions hyperfuchsiennes ou hyperabéliennes comme on paramètre toutes les courbes de genre ≥ 2 au moyen des fonctions fuchsiennes.

Picard reprend cette théorie dans un mémoire couronné par le grand prix de l'Académie des Sciences en 1888 (Picard 1889a). Il établit par un raisonnement très simple que, sur les surfaces les plus générales, les intégrales simples (10) sont constantes si elles sont de première espèce et rationnelles si elles sont de deuxième espèce.

Dans le cas de la surface d'équation $z^2 = (x-a_1)(x-a_2)...(x-a_{2p})(x-y)$ on voit que les exposants caractéristiques de l'équation de Fuchs relative au point singulier $y = \infty$ sont $\frac{1}{2}$ avec la multiplicité $2p$-1 et p-$\frac{1}{2}$ avec la multiplicité 1 ; la monodromie relative à ce point n'a donc qu'une seule valeur propre -1 de multiplicité $2p$ et, en particulier, elle n'admet pas 1 comme valeur propre. Il en résulte que, dans le cas le plus général, 1 ne peut pas être valeur propre de la monodromie relative à un point singulier ; or les périodes

(20) $$a_1, a_2, \ldots, a_{2p}$$

de $\int P\, dx$ sont indépendantes de y, donc invariantes par la monodromie et il en résulte qu'elles sont toutes nulles. Reprenant le raisonnement du mémoire précédent (Picard 1886b), il démontre aussi que, sur la surface la plus générale de degré m, les périodes *cycliques* des intégrales simples de troisième espèce sont nulles ; ces intégrales n'ont donc que des périodes *polaires*, relatives à des cycles arbitrairement petits entourant une *courbe logarithmique* de l'intégrale.

Picard ajoute, dans ce mémoire, quelques précisions relatives à la définition des intégrales simples de deuxième espèce, pour le cas où l'intégrale deviendrait infinie en un point isolé ; un tel point est nécessairement un point singulier de la surface et Picard établit qu'il doit être un point singulier isolé. On se ramène alors au cas déjà considéré en faisant éclater ce point, qui devient une courbe sur la surface transformée.

Picard est revenu beaucoup plus tard à la question du nombre des intégrales simples de seconde espèce indépendantes en liaison avec son étude des intégrales doubles de seconde espèce (Picard 1905a, **1905b**, **1905c**, 1905d, 1905e). Ses résultats nouveaux proviennent du fait que les points singuliers de l'équation de Picard-Fuchs sont «de nature logarithmique», c'est-à-dire que les solutions au voisinage d'un tel point b sont toutes de la forme $f(y)+\Omega(y)\log(y-b)$ où f et Ω sont holomorphes (Picard et Simart 1897, chapitre IV) ; par conséquent si une solution

(21) $$\lambda_1\omega_1+\lambda_2\omega_2+\ldots+\lambda_{2p}\,\omega_{2p}$$

de cette équation (ω_i solutions fondamentales, λ_i constantes) est invariante par la monodromie, c'est un *polynôme* en y. La condition d'invariance par la monodromie de (21) s'exprime par le fait que la monodromie transposée laisse invariant $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2p})$; comme la monodromie laisse invariante la forme bilinéaire alternée de Riemann (pour les périodes des intégrales abéliennes), on voit que le nombre r des solutions polynomiales indépendantes de l'équation de Picard-Fuchs est égal au nombre des intégrales simples de deuxième espèce indépendantes. De plus l'espace des solutions de l'équation de Picard-Fuchs se décompose en somme directe orthogonale (pour la forme de Riemann) du sous-espace de dimension r formé des solutions polynomiales et d'un sous-espace de dimension $2p$-r ; comme la forme de Riemann est *non dégénérée*, il en résulte que r est *pair*. Si on choisit une base symplectique dans le sous-espace des solutions polynomiales et dans le sous-espace supplémentaire orthogonal, les solutions formant ces bases sont les périodes de l'intégrale abélienne attachée à la courbe $y = \text{const.}$ relatives à un système canonique de rétrosections sur la surface de Riemann correspondante ; les $2p$-r derniers cycles sont homologues à 0 dans la surface (5). Ceci implique que le nombre maximum r_0 d'intégrales simples de *première espèce* sur (5) est au plus $\frac{r}{2}$.

Or Severi venait d'établir qu'une surface *régulière* ne peut admettre aucune intégrale simple de seconde espèce non rationnelle (Severi 1904). Picard obtient le même résultat en utilisant le fait que, d'après Enriques, les adjointes de degré m-3 découpent alors sur un plan le système complet des adjointes de degré m-3 pour la section plane de la surface (Enriques 1896) ; en choisissant un système fondamental d'intégrales abéliennes de deuxième espèce sur la courbe y = const. dans lequel les p premières intégrales sont de première espèce et de la forme $\int \frac{Q_h \, \mathrm{d}x}{f'_z}$ avec des Q_h polynômes adjoints de degré m-3 pour la surface (5), il est conduit à la conclusion que toute intégrale simple de seconde espèce est aussi de première espèce car le système de ses périodes est orthogonal, pour la forme de Riemann, à celui de chacune des p premières intégrales abéliennes du système fondamental. Comme on peut construire un système fondamental d'intégrales de seconde espèce avec des périodes arbitrairement choisies, ceci implique que le nombre r des intégrales de seconde espèce indépendantes est nul.

Dans le cas d'une surface irrégulière, Enriques définit, pour chaque degré $h \geq m$-3, un défaut ω_h égal à la différence entre la dimension du système complet des adjointes de degré h pour une section plane de la surface et la dimension du système découpé sur le plan par les adjointes de degré h pour la surface elle-même ; il établit que l'irrégularité de la surface est égale à la somme de tous les défauts ω_h (qui sont nuls pour h assez grand). Picard s'intéresse au cas où $\omega_h = 0$ pour $h \geq m$ -2, de sorte que l'irrégularité est égale au seul défaut $\omega = \omega_{m\text{-}3}$ non nul ; les p formes de première espèce ont des numérateurs $Q_1, Q_2, \ldots, Q_p$ dont les p-ω premiers sont des polynômes adjoints de degré m-3 tandis que les ω derniers sont des polynômes adjoints de degré m-2 pour la surface (5). Dans ce cas, le système des périodes défini par une intégrale simple de deuxième espèce est orthogonal à ceux des p-ω premières intégrales abéliennes du système fondamental et il en résulte que le nombre d'intégrales simples de première espèce est $r_0 = r$-ω.

Cette formule, démontrée indépendamment par Severi (Severi 1905), implique que $r \leq 2\omega$. Ensuite Picard a considéré le cas général : il établit encore que les $p - \omega_{m\text{-}3}$ intégrales abéliennes de première espèce induites par des adjointes de degré m-3 pour la surface ont r périodes nulles, donc seulement $2p$-r périodes indépendantes. Comme s intégrales abéliennes indépendantes ne peuvent avoir moins de $2s$ périodes, on trouve $2p\text{-}r \geq 2(p\text{-}\omega_{m\text{-}3})$ soit $r \leq 2\omega_{m\text{-}3}$. Castelnuovo a finalement établi que le nombre r d'intégrales simples de seconde espèce indépendantes est le double de r_0 et qu'il est égal à $2q$ où q est l'irrégularité (Castelnuovo 1905). Ces résultats conjugués donnent enfin $q = \omega_{m\text{-}3}$ et $\omega_h = 0$ pour $h \geq m$ -2 (Picard 1905c) ; le nombre des intégrales simples de première espèce indépendantes est égal à l'irrégularité. Malheureusement les démonstrations de Severi et Castelnuovo étaient fondées sur l'existence d'un système continu *non linéaire* à q paramètres de courbes tracées sur la surface, qu'ils déduisaient d'un théorème d'Enriques affirmant que la série caractéristique d'un système continu complet est complète et Severi s'est aperçu en 1921 que la démonstration de ce théorème était incorrecte ; en 1945 Zappa a d'ailleurs pu trouver un contre-exemple. Mais entre temps Poincaré avait établi l'existence d'un système continu à q paramètres par une méthode complètement différente et entièrement correcte ; l'idée est de repérer les courbes Γ tracées sur la surface (5) au moyen des fonctions de y obtenues en faisant la somme des valeurs de chaque intégrale abélienne de première espèce attachée aux sections y = const. en les différents points où Γ rencontre le plan y = const. et de mettre ces fonctions sous une forme où apparaissent les q paramètres (Poincaré 1909, 1910, 1911).

Topologie des surfaces algébriques

Le deuxième chapitre du mémoire couronné de Picard est consacré à l'étude topologique des surfaces algébriques ; il s'agit de définir les cycles de dimension 1 ou 2 sur une telle surface et de déterminer le nombre maximum de tels cycles indépendants *modulo* l'homologie, c'est-à-dire les nombres de Betti p_1 et p_2. Les cycles de dimension 3 ne nécessitent pas une étude particulière car, pour une variété fermée (c'est-à-dire compacte) $p_3 = p_1$ en vertu de la «dualité de Poincaré» que Picard considère comme connue (elle se trouve établie dans Poincaré 1895).

Les cycles de dimension 1 sont tous homologues à des cycles contenus dans un plan y = const. et Picard étudie ces cycles au moyen de l'équation différentielle des périodes d'une intégrale abélienne de seconde espèce attachée à la courbe $f(x, y, z) = 0$; les points singuliers de cette équation «de Picard-Fuchs» sont les valeurs y'_0 pour lesquelles le plan $y = y'_0$ est tangent à la surface, de sorte que le genre de la courbe $f(x, y'_0, z) = 0$ est plus petit que le genre p d'une section plane générique, et tous ces points sont réguliers. Dans le cas général, l'équation de Picard-Fuchs est irréductible d'ordre $2p$, c'est-à-dire qu'aucune de ses solution ne vérifie une équation linéaire à coefficients polynomiaux en y d'ordre $< 2p$; cela revient à dire, pour parler en termes modernes, qu'il n'y a pas de sous-espace de solutions non trivial stable par la monodromie. Comme les opérations de monodromie sur les périodes proviennent de celles sur les cycles, Picard déduit de ces remarques que tous les cycles se réduisent à un seul, qui est homologue à 0 sur la surface; ainsi $p_1 = 0$ en général. Cependant, comme Poincaré l'a remarqué plus tard, le groupe fondamental peut être non trivial même si $p_1 = 0$; c'est le cas pour des surfaces d'équation $z^2 = F(x, y)$ où F est un polynôme réductible (Poincaré 1902a).

Lorsque l'équation de Picard-Fuchs est réductible, elle se décompose en $\frac{2p}{q}$ équations d'ordre q et les cycles d'une courbe $f(x, y, z) = 0$, $y =$ const. se ramènent, dans la surface (5) à $\frac{2p}{q}$ d'entre eux. Certains de ces cycles peuvent se réduire à 0 ; il s'agit de ceux que Poincaré a appelés *évanouissants* (Poincaré 1902b), qui se réduisent à 0 lorsque y s'approche d'un point singulier b de l'équation de Picard-Fuchs. À chaque point ordinaire (a, b, c) de la surface tel que b soit singulier pour l'équation de Picard-Fuchs correspond un unique cycle évanouissant, mais la situation est plus compliquée lorsque
(a, b, c) est un point singulier de la surface. Lorsque la surface admet une intégrale simple de première espèce non triviale $p_1 \geq 2$; comme exemples, Picard propose les surfaces hyperelliptiques ($p_1 = 4$) et les produits de deux courbes algébriques de genres respectifs p et p' ($p_1 = 2p+2p'$).

La recherche des intégrales simples de deuxième espèce non rationnelles se fait au moyen des considérations précédentes ; une telle intégrale correspond à une intégrale de la forme (15). Si l'équation de Picard-Fuchs se décompose en $\frac{2p}{q}$ équations irréductibles d'ordre q, un choix convenable des cycles fondamentaux donne des périodes α_k égales par groupes de q : $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_q = \alpha$ etc. En supposant que les coefficients a_j dans les équations (16) pour $1 \leq k \leq q$ sont des fonctions *uniformes* de y, on voit que, si $\alpha \neq 0$, la monodromie de l'équation différentielle d'ordre q correspondante s'exprime par des matrices à coefficients entiers dont la somme des lignes est toujours 1 ; les α_k correspondant à des équations d'ordre q dont les groupes de monodromie vérifient cette condition peuvent être choisis arbitrairement tandis que les autres doivent être nuls et les équations (16) donnent des a_j uniformes en y, donc rationnels car tous les points singuliers sont réguliers. Picard établit ainsi que le nombre maximum d'intégrales simples de seconde espèce linéairement indépendantes *modulo* les fonctions rationnelles est égal au nombre de périodes indépendantes de ces intégrales. Le même raisonnement appliqué aux intégrales simples de troisième espèce montre que le nombre maximum des périodes d'une telle intégrale indépendantes des périodes polaires (correspondant à de petits cycles entourant des courbes logarithmiques) est encore égal au nombre précédent. Picard a complété ces résultats plus tard en établissant que ce nombre est précisément le premier nombre de Betti p_1 (Picard 1897b) ; ainsi p_1 est un invariant birationnel de la surface. Les résultats ultérieurs de Castelnuovo et de Picard montre d'ailleurs que p_1 est le double de son irrégularité q (Picard 1905c).

L'étude des cycles de dimension 2 est plus délicate ; Picard considère ceux qui sont engendrés par un cycle de dimension 1 d'une courbe $f(x, y, z) = 0$, $y =$ const. lorsque l'on fait décrire à y un lacet ramenant le cycle à à position initiale. Il exprime la période correspondante d'une intégrale double de première espèce au moyen de la théorie des résidus d'intégrales doubles élaborée par Poincaré (Poincaré 1887) et il observe que cette période est nulle si le lacet parcouru par y n'entoure qu'un point singulier de l'équation de Picard-Fuchs.

Il devait remarquer que, contrairement à p_1, le nombre de Betti p_2 en dimension 2 n'est pas un invariant birationnel (Picard 1898c, 1901e). Poincaré a déterminé les divers types de cycles de dimension 2 sur une surface algébrique : outre les cycles $y =$ const. et $x =$ const., il faut considérer les cycles engendrés par une combinaison linéaire de cycles de dimension 1 de $f(x, y, z) = 0$, $y =$ const. lorsque y décrit un lacet qui ramène cette combinaison à sa valeur initiale (Poincaré 1901, 1902b, 1906). Picard est revenu plus tard à la description des cycles de dimension 2 d'une surface (Picard 1903e).

Picard ajoute un résultat sur les résidus d'intégrales doubles de fonctions de trois variables. Une telle intégrale double s'écrit

$$\iint A \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + B \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x + C \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \tag{22}$$

où A, B, C sont des fonctions de x, y, z vérifiant la condition d'intégrabilité $\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0$; Picard remarque que, lorsque $A = \frac{P}{S}$, $B = \frac{Q}{S}$ et $C = \frac{R}{S}$ où P, Q, R et S sont des polynômes dont le dernier est supposé irréductible, cette condition implique que

$$\int \frac{P \, \mathrm{d}y - Q \, \mathrm{d}x}{S'_z} \tag{23}$$

est une intégrale simple attachée à la surface d'équation $S = 0$ (cf.(13)). Il en déduit que les résidus de (22) sont les périodes de (23). De même les résidus d'une intégrale triple

$$\iiint \frac{P \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z}{Q} \tag{24}$$

(P, Q polynômes) sont les périodes de l'intégrale double

$$\iint \frac{P \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y}{Q'_z}$$

attachée à la surface d'équation $Q = 0$ (voir aussi (Picard 1889b)).

Transformations birationnelles d'une surface

Picard a obtenu des résultats remarquables sur le groupe des transformations birationnelles d'une surface algébrique en elle-même (Picard 1886e, 1886f, 1886g, 1886h, **1889a**, 1895a, 1895b). Tout d'abord, s'il existe une famille transitive de transformations birationnelles, le genre géométrique est au plus 1 ; Picard l'établit en démontrant d'abord qu'une forme différentielle $\frac{Q\,dx\,dy}{f'_z}$ de degré 2 et de première espèce (Q polynôme adjoint de degré $\leq m$-4) est *invariante* par toute famille connexe de transformations birationnelles, de sorte que le rapport de deux polynômes adjoints Q_1 et Q_2 de degrés $\leq m$ -4 est constant sur les orbites. Mais il existe des surfaces de genre géométrique > 1 admettant une famille à un paramètre de transformations birationnelles : c'est le cas du produit d'une courbe de genre 1 par une courbe de genre $p \geq 2$, où on voit que $p_g = p$. D'une manière générale, si une surface de genre $p_g \geq 2$ a une telle famille de transformations, les orbites sont contenues dans les courbes intersection de la surface avec Q_1-$\lambda Q_2 = 0$ où λ est une constante ; les composantes mobiles avec λ de ces courbes sont de genre 1 et leur module ne dépend pas de λ. Un résultat de Noether permet d'ailleurs de préciser qu'il y a exactement p_g-1 composantes mobiles qui appartiennent toutes à une même famille à un paramètre de courbes elliptiques tracées sur la surface (Noether 1875) ; Picard établit alors que la surface est «dominée» par le produit d'une courbe elliptique et d'une autre courbe algébrique.

Dans le cas où on ne fait plus d'hypothèse sur le genre géométrique de la surface, Picard établit d'abord que, s'il existe un *groupe de Lie commutatif* de transformations birationnelles transitif sur la surface, il y a deux formes différentielles $P\,dx + Q\,dy$ et $P_1 dx + Q_1 dy$ de degré 1 (fermées) invariantes par le groupe ; il en déduit que les coordonnées x, y, z sont des fonctions *uniformes* des deux intégrales simples $\int P\,dx + Q\,dy = u$ et $\int P_1 dx + Q_1 dy = v$. Or si un groupe de Lie de transformations birationnelles est transitif, il est nécessairement commutatif. Lorsqu'on a seulement un groupe de transformations birationnelles à un paramètre, les orbites sont des courbes de genre 1 ou 0 et la surface contient donc une famille à un paramètre de telles courbes.

Picard étudie en détail le premier cas, où x, y, z sont des fonctions uniformes de deux intégrales simples u et v, d'abord dans le cas où ces intégrales ont 4 périodes ; le genre géométrique est alors 1 et u et v sont des intégrales de première espèce. La surface est hyperelliptique et Picard enseigne comment construire un système d'équations aux dérivées partielles vérifié par les fonctions thêta de u et v numérateurs et dénominateur de x, y et z ; ce système est analogue à celui qui définit les fonctions Al de Weierstrass. Il y a un cas dégénéré où u et v n'ont que 3 périodes ; la surface est de genre 0 et u est une intégrale de première espèce. Dans ce cas il existe une famille à un paramètre de courbes de genre 0 et une famille à un paramètre de courbes de genre 1, toutes de même module. Picard étudie enfin le cas encore plus dégénéré où il y a moins de trois périodes ; alors x, y, z sont fonctions rationnelles de deux intégrales simples U et V ou bien des fonctions rationnelles de e^{aU} et V (a constante).

Enfin Picard établit que si une surface de genre géométrique ≥ 2 admet une infinité de transformations birationnelles en elles-mêmes, elles admettent une famille continue de telles transformations. Dans le cas où $p_g \geq 4$, la méthode consiste à considérer l'homomorphisme du groupe des transformations birationnelles dans le groupe linéaire de l'espace des polynômes adjoints de degré $\leq m$-4 ; l'image est le groupe des transformations linéaires qui laissent stable le cône algébrique des polynômes Q tels que la surface $Q = 0$ soit tangente à la surface considérée (5). On utilise alors le fait que le noyau de l'homomorphisme contient un sous-groupe à un paramètre s'il est infini et le fait analogue pour le groupe des transformations linéaires du cône (c'est un groupe algébrique). Pour le genre géométrique 3 la méthode est analogue en utilisant le groupe linéaire du produit de l'espace des polynômes adjoints de degré $\leq m$-4 par lui-même ; l'image est alors le sous-groupe des transformations linéaires qui laissent stable le cône des couples (Q_1, Q_2) de polynômes tels que la courbe $Q_1 = Q_2 = 0$ soit tangente à la surface (5). Enfin pour $p_g = 2$ Picard fait usage d'un résultat de Noether selon lequel toute surface adjointe de degré $\leq m$-4 coupe la surface suivant une courbe mobile irréductible de genre 1 (Noether 1875).

A partir des mêmes considérations, Picard donne une méthode pour reconnaître si deux surfaces sont birationnellement équivalentes et pour déterminer une transformation birationnelle de l'une dans l'autre dans le cas où il en existe. Il applique ses résultats à l'étude des équations différentielles polynomiales de la forme $f(y, y', y'') = 0$ ou $f(x, y, y', y'') = 0$ dans le cas où on suppose que les solutions sont des fonctions uniformes de x ; par exemple, si les solutions de $f(y, y', y'') = 0$ sont telles que $y(x+h)$, $y'(x+h)$, $y''(x+h)$ s'expriment rationnellement en fonction de $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$, alors ces solutions s'écrivent à l'aide des fonctions elliptiques ou de leurs dégénérescences ou bien elles sont de la forme $y = \Theta(ax+\alpha, bx+\beta)$ où Θ est une fonction méromorphe quadruplement périodique de deux variable, a et b sont des constantes convenables et α et β sont des constantes d'intégration.

Résolution des singularités

Dans ses travaux Picard fait toujours l'hypothèse que les singularités des surfaces considérées sont «ordinaires» ; comme les propriétés envisagées sont birationnellement invariantes, cela n'introduit pas de restriction véritable si on sait établir que toute surface est birationnellement équivalente à une surface à singularités ordinaires. M. Noether avait essayé, dès 1871, de «résoudre» les singularités d'une surface par des *transformations quadratiques* (ou éclatements), selon la méthode qu'il employait avec succès pour les courbes algébriques et il était revenu sur ce problème en 1888 ; divers auteurs l'ont repris à sa suite (Del

Pezzo 1892, Kobb 1892, Segre 1896). La résolution locale au voisinage d'un point singulier fournit des paramétrages birationnels des diverses branches passant par le point considéré par des surfaces non singulières.

Picard expose sa méthode dans le chapitre 4 de sa *Théorie des Fonctions algébriques de deux variables indépendantes* (Picard et Simart 1897) ; au lieu d'utiliser des transformations quadratiques, il désingularise simultanément les sections de la surface par les plans passant par une droite fixe, ce qui conduit à une nouvelle surface pouvant avoir de nouvelles singularités. Mais l'image du graphe de la transformation utilisée par un plongement de Segre de $\mathbf{P}_3 \mathrm{x} \mathbf{P}_3$ dans $\mathbf{P}_{15}$ n'a plus aucune singularité ; Picard projette alors cette surface sur une sous-variété linéaire projective de dimension 5, ce qui donne une surface non singulière dans $\mathbf{P}_5$ birationnellement équivalente à la surface initiale. On peut utiliser cette surface non singulière pour définir des notions topologiques telles que l'homologie des cycles de diverses dimensions, dont la définition est ambiguë lorsqu'il y a des singularités. En projetant d'une manière générique sur une sous-variété linéaire projective de dimension 3, on obtient une surface dans $\mathbf{P}_3$ avec des singularités ordinaires : une courbe double avec des points triples qui sont des points triples de la surface où les trois plans tangents sont distincts («points triplanaires»). On sait qu'une démonstration satisfaisante du théorème de résolution des singularités des surfaces n'a été obtenue qu'en 1935 (Walker 1935).

Intégrales doubles de seconde espèce

Après l'étude des intégrales simples de différentielles totales et celle des transformations birationnelles d'une surface, le troisième volet des travaux de Picard en géométrie algébrique des surfaces est constitué par ses recherches sur les intégrales doubles *de deuxième espèce* attachées à une surface algébrique (Picard 1897c, 1898a, 1898b, 1898d, **1899a**, 1899b). Picard dit qu'une intégrale double

$$\iint R\,(x, y, z\,)\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y \tag{25}$$

où x, y, z sont liés par (5) et R est rationnelle est de seconde espèce si, pour tout point A de la surface, il existe des fonctions rationnelles U et V telle qu'elle ne diffère de

$$\iint\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y \tag{26}$$

que par une fonction finie au voisinage de A. Cette définition n'est correcte que si A est un point simple de la surface ; sinon il faut résoudre localement la singularité de A pour se ramener à des points simples. Le premier résultat qu'il établit est l'invariance birationnelle de la forme (25) ; cela vient de ce qu'on peut l'écrire

$$\iint\frac{\mathrm{D}(U, y\,)}{\mathrm{D}(x, y\,)}\;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y\;+\iint\frac{\mathrm{D}(x, V\,)}{\mathrm{D}(x, y\,)}\;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y$$

(où $\dfrac{D(P, Q)}{D(x, y)}$ désigne le jacobien de P, Q par rapport à x, y).

Picard démontre ensuite, en supposant que les singularités de la surface sont ordinaires, que toute intégrale double de seconde espèce, non infinie en général sur la courbe double, est la somme d'une intégrale de la forme (26) et d'une autre du type

(27)
$$\iint \frac{P(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z}$$

où P est un polynôme qui s'annule sur la courbe double. Cette réduction est très longue et difficile. On commence, en écrivant

$$R(x, y, z) = \frac{A(x, y, z)}{B(x, y)}$$

où A et B sont des polynômes, par décomposer en éléments simples $\dfrac{1}{B(x, y)}$ regardé comme fraction rationnelle en x à coefficients fonctions rationnelles de y ; on est ainsi ramené à une somme d'intégrales de la forme

(28)
$$\iint \frac{P(x, y, z)\,dx\,dy}{W(y)(R(x, y))^{\alpha} f'_z}$$

où P, W et R sont des polynômes, ce dernier irréductible, et où α est un entier. L'intégrale (28) devient infinie le long de l'une des composantes irréductibles de l'intersection de la surface (5) avec le cylindre $R(x, y) = 0$; en soustrayant une intégrale convenable de la forme (26) de manière que la différence reste finie au voisinage d'un point de cette composante par où passe une autre composante de l'intersection (sauf en ce point), on se ramène à une intégrale de la forme (28) où P est divisible par $(R(x, y))^{\alpha}$. On peut donc supposer que $\alpha = 0$ dans (28) ; il faut ensuite éliminer le dénominateur W par soustraction d'intégrales (26). En décomposant W en facteurs et en échangeant x et y, Picard est conduit à une intégrale de la forme

(29)
$$\iint \frac{P(x, y, z)}{(x-a)^{\alpha} f'_z}\,dx\,dy$$

où il faut ramener α à 0 par soustraction d'intégrales (26) ; ceci se fait en deux étapes dont la première conduit à $\alpha = 1$ et la seconde ramène α de 1 à 0. Ces réductions ne sont pas trop difficiles lorsque la surface n'a pas de singularité et que le plan $x = a$ n'est pas tangent à la surface ; lorsqu'il est tangent, on ne peut éviter d'introduire au dénominateur des facteurs du type $(y-b)^{\beta}$ où b est tel que l'équation $f(a, b, z) = 0$ ait une racine double. On est alors ramené à la réduction précédente car on peut supposer qu'aucun plan $y = b$ n'est tangent à la surface. Lorsque la surface a des singularités (ordinaires) et que le plan $x = a$ ne passe pas par un *point-pince* ou par un *point triple* on peut procéder à peu près de la même manière; mais, si $x = a$ passe par un point-pince ou par un point triple, les réductions sont beaucoup plus délicates et Picard fait appel, pour la deuxième étape, à un résultat de Castelnuovo sur le système linéaire de courbes découpé sur un plan par un système linéaire complet de surfaces (ce système est complet si les surfaces sont de degré assez grand, Castelnuovo 1897).

Le même résultat de Castelnuovo, appliqué cette fois dans le plan à l'infini, sert à Picard pour abaisser le degré p de P dans (27) en prouvant que, si p est assez grand, il existe une intégrale de la forme (26) (avec U et V de dénominateur f'_z) qui, soustraite à (27), donne un reste du type (27) avec un numérateur de degré p-1. On peut ainsi ramener toutes les intégrales doubles de seconde espèce à la somme d'une intégrale (26) et d'une intégrale (27) avec un numérateur P de degré borné par une constante p_0 qui ne dépend que de la surface ; par exemple, si la surface est de degré m et suffisamment générale on peut prendre $p_0 = 2m$-4. Il résulte de ceci qu'il y a un nombre maximum fini ρ_0 d'intégrales doubles de deuxième espèce linéairement indépendantes *modulo* les intégrales de la forme (26).

Les méthodes de réduction précédentes permettent aussi à Picard d'établir l'équivalence de sa définition des intégrales doubles de seconde espèce avec la nullité de tous les *résidus* de l'intégrale ; il avait commencé par croire une telle caractérisation impossible. À chaque courbe C le long de laquelle le dénominateur de R s'annule correspondent des résidus de l'intégrale (25), définis de la manière suivante ; écrivons $z = S(x, y)$, $\varphi(x, y) = 0$ les équations de C et désignons, pour chaque point (x, y) tel que $\varphi(x, y) = 0$, par $\chi(x, y)$ le résidu en $X = x$ de $R(X, y, S(X, y))dX$. Les résidus de (25) relatifs à C sont les périodes de l'intégrale abélienne $2\pi i\int\chi(x, y)dy$ attachée à la courbe $\varphi(x, y) = 0$ (Poincaré 1887). Picard se ramène d'abord au cas où C est l'intersection de la surface avec le plan $x = 0$, de sorte que l'intégrale (25) considérée s'écrit $\iint\frac{S(x, y, z)}{x^{\alpha}}\,dx\,dy$ où S est une fraction rationnelle non identiquement nulle pour $x = 0$; on se ramène, comme plus haut, à $\alpha = 1$ et on observe que la condition relative à C qu'il faut imposer à cette intégrale pour qu'elle soit de seconde espèce est l'existence d'une fonction rationnelle $T(x,y,z)$ telle que cette intégrale diffère de $\iint\frac{\partial}{\partial y}(\frac{T}{x})\,dx\,dy$ par une fonction finie au voisinage de C. Cette condition implique évidemment la nullité des résidus ; inversement, si les résidus sont nuls, $\int S(0, y, z)dy$ est une fonction rationnelle K de y et z liés par $f(0, y, z) = 0$ et on peut prendre $T(x, y, z) = K(y, z)$. Dans le cas particulier où la surface est un plan on a $\rho_0 = 0$ et l'équivalence ainsi démontrée signifie que, pour qu'une fonction rationnelle F de deux variables indépendantes x et y puisse se mettre sous la forme $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$ où P et Q sont rationnelles, il faut et il suffit que les résidus de $\iint F(x, y)dx\,dy$ soient tous nuls (Picard 1902f).

Picard cherche ensuite les conditions à imposer à une intégrale de la forme (27) pour qu'elle soit de deuxième espèce ; ces conditions sont toutes relatives aux points à l'infini de la surface et on fait donc un changement de coordonnées $x=\frac{1}{X}$ y= $\frac{Y}{X}$ $z=\frac{Z}{X}$ transformant l'intégrale en $\iint \frac{H\,(X, Y, Z)\mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y}{X^{p-(m-4)}F'_Z}$ où $F=0$ est l'équation de la surface dans les nouvelles coordonnées et H est un polynôme nul sur la courbe double. On peut supposer p-(m -4) ≥ 1 sinon l'intégrale est de première espèce ; on exprime alors que l'intégrale est de seconde espèce en écrivant que ses résidus sont nuls. Ces résidus sont les périodes d'une intégrale abélienne attachée à la courbe à l'infini $X = 0$, $F\,(0,Y, Z) = 0$; si la courbe à l'infini est de genre π (le genre d'une section plane générique de la surface), il y a 2π périodes cycliques, à quoi il faut ajouter m périodes polaires qui sont les résidus aux points à l'infini. Comme la somme de ces résidus à l'infini est nulle, Picard compte $2\pi+m$-1 conditions ; il s'est aperçu plus tard que les conditions relatives aux résidus à l'infini étaient automatiquement vérifiées, de sorte que le nombre de conditions se réduit à 2π (Picard 1902d).

Toujours par les mêmes méthodes, Picard établit l'*invariance birationnelle* de la notion d'intégrale double de seconde espèce ; il en résulte que le nombre maximum ρ_0 des intégrales doubles de seconde espèce linéairement indépendantes *modulo* les intégrales (26) est un invariant birationnel. La difficulté provient du fait que, sur la surface (5), il peut exister des *points fondamentaux A* de la transformation birationnelle, auxquels correspondent, sur la surface transformée, des courbes exceptionnelles ; dans un tel cas, à une intégrale I double de seconde espèce de la surface transformée correspond une intégrale double i sur (5) qui peut devenir infinie sur certaines courbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_k$ passant par A. En écrivant que I est de seconde espèce, on trouve, pour chacune de ces courbes, une intégrale de type (26) qui diffère de i d'une fonction finie au voisinage de cette courbe sauf peut-être en A, et on est donc ramené à une intégrale $\iint \frac{B\,(x, y, z)}{(x-a)^{\alpha}f'_z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ où a est l'abscisse de A et B est une fonction rationnelle finie en A ; on peut ensuite se ramener à $\alpha = 1$, puis à $\alpha = 0$ comme ci-dessus, et on voit que i est de seconde espèce.

Intégrales simples de troisième espèce

La détermination du nombre ρ_0 des intégrales doubles de seconde espèce indépendantes exige qu'on sache reconnaître dans quel cas une intégrale (27) est de la forme (26) ; ce problème a amené Picard à revenir sur les intégrales simples de troisième espèce et l'a conduit à un résultat très remarquable (Picard 1901b, **1901c**, 1916). Il se propose de trouver une intégrale simple avec des courbes logarithmiques *données*

(30) $$C_1, C_2, \ldots, C_\lambda\ ;$$

à chacune de ces courbes C_i, de degré d_i, il associe une intégrale abélienne J_i de troisième espèce attachée à la courbe

(31) $$f(x, \bar{y}, z) = 0$$

(où $\bar{y}$ est un paramètre intervenant d'une manière rationnelle) de sorte que les d_i points de C_i dans le plan $y =$

Erreur !

(32) $$a_1 I_1 + \ldots + a_{2p} I_{2p} + c_1 J_1 + \ldots + c_\lambda J_\lambda$$

soient indépendantes de y. Or les périodes de J_1, par exemple, sont $2p$ périodes cycliques ω_1, ω_2, …, ω_{2p} et la période polaire 1, indépendante de y ; la monodromie agit sur ces périodes par des transformations à coefficients entiers du type

(33) $$\omega'_j = m^j_1\, \omega_1 + m^j_2\, \omega_2 + \ldots + m^j_{2p}\, \omega_{2p} + \mu^j$$

où les m^j_k sont les mêmes que pour les périodes d'une intégrale de seconde espèce. Pour J_2, …, J_λ on a des formules du même type avec des entiers ν^j, …, π^j au lieu des μ^j. Le problème est alors ramené à la détermination des périodes cycliques K_1, K_2, …, K_{2p} de (32), indépendantes de y c'est-à-dire constantes, et des coefficients c_i tels que l'on ait, pour $j = 1, 2, \ldots, 2p$

(34) $$K_j = m^j_1\, K_1 + m^j_2\, K_2 + \ldots + m^j_{2p}\, K_{2p} + c_1 \mu^j + c_2 \nu^j + \ldots + c_\lambda \pi^j$$

quelle que soit l'opération de monodromie considérée ; s'il y a k points singuliers pour l'équation de Picard-Fuchs (points pour lesquels le genre de (31) devient $< p$), on trouve ainsi un système de $2pk$ équations linéaires et homogènes en les K_j et les c_i . Ces équations équivalent au fait que le système de $2p$ relations exprimant que (32) a K_1, K_2, …, K_{2p} pour périodes cycliques est invariant par la monodromie ; il en résulte que les a_j déterminés par ce système sont des fonctions *uniformes,* donc *rationnelles* de y.

Lorsque λ est assez grand, il est clair que le système de $2pk$ équations (34) admet une solution dans laquelle tous les c_i ne sont pas nuls ; alors la surface (5) admet une intégrale simple de troisième espèce avec comme seules courbes logarithmiques certaines des C_i et éventuellement la courbe à l'infini. En prenant la plus petite valeur possible de λ Picard démontre ainsi qu'il existe, sur la surface (5), des courbes algébriques irréductibles C_1, C_2, …, C_λ telles qu'aucune intégrale simple de troisième espèce n'ait pour seules courbes logarithmiques certaines de ces courbes et éventuellement la courbe à l'infini mais que, si Γ est une nouvelle courbe arbitraire, il existe une intégrale simple dont les courbes logarithmiques sont Γ, certaines des C_i et éventuellement la courbe à l'infini. On peut d'ailleurs ne plus faire jouer à la courbe à l'infini un rôle particulier et trouver un système de courbes C_1, C_2, …, C_ρ ($\rho = \lambda + 1$) qui ne peuvent être les seules singularités logarithmiques d'une intégrale simple tandis que pour toute autre courbe Γ il existe une intégrale simple dont les singularités logarithmiques sont Γ et certaines des C_i. Picard remarque tout de suite que le nombre ρ n'est pas un invariant birationnel ; il est seulement invariant par *isomorphisme* de surfaces.

Dans le cas du plan, on a $\rho = 1$ car on peut prendre pour C_1 une droite $ax + by + c = 0$; en effet si Γ est une courbe algébrique quelconque, de degré m et d'équation $f(x, y) = 0$, la fonction $\log\dfrac{f(x, y)}{(ax+by+c)^m}$ est une intégrale simple avec comme courbes logarithmiques C_1 et Γ. Le même résultat est valable pour les surfaces hyperelliptiques ; d'après les résultats de G.Humbert sur ces surfaces (Humbert 1893), toute courbe algébrique a une équation de la forme $\Theta(u-\lambda, v-\mu) = 0$ où Θ est une fonction thêta normale de caractéristique nulle et λ et μ sont des constantes. Si Θ est d'ordre m et que θ est une fonction thêta normale de caractéristique nulle et d'ordre 1, on a une intégrale simple $\log\dfrac{\Theta(u-\lambda, v-\mu)}{\theta^m(u-\lambda, v-\mu)}$ avec comme singularités logarithmiques la courbe précédente et la courbe d'équation $\theta(u-\lambda, v-\mu) = 0$; on peut donc toujours se ramener à des courbes de ce dernier type, qui varient d'une manière continue avec λ et μ. Si on en considère deux assez voisines C_1 et C_2 les entier correspondants μ^j et ν^j sont égaux dans le système (34) et on peut donc résoudre ce système en prenant $K_j = 0$ et $c_2 = -c_1$; on voit ainsi qu'il existe une intégrale simple avec comme singularités logarithmiques deux (quelconques) de ces courbes et on a donc $\rho = 1$.

Picard se pose ensuite la question de savoir, pour une surface donnée qui n'admet que des intégrales simples de deuxième espèce rationnelles, si les intégrales simples de troisième espèce sont toutes de nature algébrico-logarithmique. Dans l'affirmative, en écrivant sous forme algébrico-logarithmique une intégrale dont les courbes logarithmiques sont $C_1, C_2, \ldots, C_\rho$ et une courbe arbitraire Γ, il trouve une fonction rationnelle nulle sur Γ et dont les zéros et les pôles sont tous le long de certaines courbes C_i ; il en déduit que si $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{\rho+1}$ sont des courbes irréductibles arbitraires de la surface, il existe une fonction rationnelle $R(x, y, z)$ dont les zéros et les pôles sont tous le long de certaines des Γ_i (Picard 1902g, 1902h).

Il aborde ce problème dans le cas des surfaces d'équation $z^2 = f(x, y)$ où f est un polynôme, en commençant par remarquer que toute intégrale simple (10) relative à cette surface peut se ramener au cas où le dénominateur commun de P et de Q est de la forme

$$\chi(y)AB\ldots L\sqrt{f(x, y)}, \tag{35}$$

où $\chi(y)$, $A(x, y)$, $B(x, y)$, …, $L(x, y)$ sont des polynômes, ces derniers irréductibles et premier avec $f(x, y)$; de plus les cylindres du type $A(x, y) = 0$ coupent la surface selon *deux* courbes distinctes, c'est-à-dire qu'il existe des polynômes $U(x, y)$, $V(x, y)$ premiers entre eux et tels que $U^2 - V^2 f$ soit divisible par A. Si on a une identité $U^2 - V^2 f = \varphi\psi$ où U, V, φ et ψ sont des polynômes en x à coefficients rationnels en y, la soustraction d'un multiple constant convenable de

$$\log\frac{U-V\sqrt{f}}{U+V\sqrt{f}}$$

ramène une intégrale qui a pour courbes logarithmiques $\varphi = 0$, $z = \pm\frac{U}{V}$ à une autre qui a pour courbes logarithmiques $\psi = 0$, $z = \pm\frac{U}{V}$; en utilisant cette remarque, Picard établit qu'on peut se ramener à ne considérer que des courbes logarithmiques avec $\deg\varphi \leq \frac{m-1}{2}$ si le degré m de f par rapport à x est impair et des courbes logarithmiques avec $\deg\varphi \leq \frac{m}{2}-1$ si m est pair. Ainsi, pour $m = 3$, $\frac{m-1}{2} = 1$ et on doit chercher s'il existe des fonctions rationnelles x et z de y telles que $z^2 = f(x, y)$; dans le cas contraire, toutes les intégrales simples sont de la forme algébrico-logarithmique. Picard établit que c'est ce qui arrive en général en considérant le cas particulier de la surface d'équation $z^2 = x^3+P(y)$ (P polynôme). Dans le cas de la surface d'équation $z^2 = f(x)F(y)$ où f est un polynôme de degré 3, on note que, si x et z rationnels en y existent tels que $z^2 = f(x)F(y)$, on a

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \frac{dx}{dy}\frac{F(y)}{z}\frac{dy}{\sqrt{F(y)}} = R(y)\frac{dy}{\sqrt{F(y)}}$$

où R est rationnelle ; comme le premier membre est une forme de première espèce, R est nécessairement constante, ce qui ne peut avoir lieu pour un polynôme F arbitraire du troisième degré. Picard en déduit que les intégrales simples de la surface considérée sont toutes algébrico-logarithmiques en général (Picard 1901a, 1903a, **1903b**). Il étudie en détail le cas où $F = f$, qui fait intervenir la multiplication des fonctions elliptiques et il arrive à la même conclusion. Picard note à ce sujet que $\rho = 1$ si F est arbitraire, mais qu'il monte à 2 lorsque $F = f$ et à 3 si la courbe elliptique $z^2 = f(x)$ admet de la multiplication complexe ; ainsi ρ a un caractère *arithmétique* (Picard 1903c, 1903d, 1904a).

Il obtient encore le même résultat pour les surfaces d'équation $z^m = x^m+P(y)$ où P est un polynôme assez général de degré m ; dans ce cas, Picard démontre qu'en soustrayant une combinaison convenable de logarithmes de fonctions rationnelles, on peut ramener toute intégrale simple à une intégrale dont les seules courbes logarithmiques sont de la forme $y = a$, $z^m = x^m$ où a est une racine de P et il en tire la conclusion. En choisissant une des racines a_1 de P et une racine m-ième ε_1 de l'unité, on peut encore faire disparaître les
$2m-1$ droites données par les équations $y = a_1$ et $z-\varepsilon_1 x = 0$ au moyen de la soustraction de

(36) $A_2\log(y-a_2)+\ldots+A_m\log(y-a_m)+B_1\log(z-\varepsilon_1 x)+\ldots+B_m\log(z-\varepsilon_m x)$;

il en résulte que l'on a $\rho = (m-1)^2+1$ pour la surface considérée.

Un autre cas considéré par Picard est celui de la surface de Kummer, pour lequel il applique un résultat de G. Humbert : toute courbe tracée sur cette surface est de degré pair et il existe une surface de degré moitié circonscrite à la surface de Kummer et ne la coupant pas en dehors de cette courbe. Soient Γ_1 et Γ_2 deux courbes sur la surface de Kummer et soient $f_1(x, y, z) = 0$ et $f_2(x, y, z) = 0$ les équations des surfaces circonscrites le long de ces courbes, de degrés respectifs m_1 et m_2 ; alors la fonction $\log \dfrac{f_1^{m_2}}{f_2^{m_1}}$ est une intégrale simple avec singularités logarithmiques le long de Γ_1 et de Γ_2 on en titre toujours la même conclusion (Picard 1902g). Par la suite, Picard a remarqué qu'un résultat ancien de Noether (1882), dont la démonstration n'était d'ailleurs pas très satisfaisante, lui permettait d'établir que, pour la surface la plus générale de degré m ($m \geq 4$), on a $\rho = 1$ et toute intégrale simple est de type algébrico-logarithmique (Picard 1904a, 1904c); d'après Noether, sur une surface assez générale de degré $m \geq 4$, toute courbe est l'intersection complète de cette surface avec une autre. On peut donc représenter deux courbes arbitraires C_1 et C_2 par les intersections de la surface considérée avec des surfaces $F_1 = 0$ et $F_2 = 0$ et on procède comme dans le cas de la surface de Kummer. Enfin Severi a établi que, sur une surface *régulière* toute intégrale simple est de nature algébrico-logarithmique (Severi 1906, Picard 1916).

Périodes des intégrales doubles

La caractérisation des intégrales doubles qui se mettent sous la forme (26) exige une étude détaillée des périodes de ces intégrales, que l'on obtient en les étendant à des cycles de dimension 2. C'est une question que Picard a abordée en même temps que l'étude des intégrale doubles de seconde espèce (Picard 1897d, 1901e, 1901f, **1902b**). Il commence par le cas des périodes d'intégrales doubles de première espèce, portant sur une forme (7) ; pour

$y = \bar{y}$, $\displaystyle\int \frac{Q(x, \bar{y}, z)\,\mathrm{d}x}{f'_z}$ est une intégrale abélienne de première espèce attachée à (31) et ses $2p$ périodes (p = genre d'une section plane de (5)) vérifient une équation différentielle de Picard-Fuchs dont les points singuliers b_1, b_2, ..., b_N sont les valeurs de

Erreur !

$$\Sigma m_i\, \Omega_i(y) = 0 \qquad (37)$$

et l'intégrale $\displaystyle\int_C \omega(y)\,\mathrm{d}y$ s'écrit

$$\Sigma m_i \int_{b_i}^{a} \Omega_i(y)\,\mathrm{d}y\ ; \qquad (38)$$

on voit que (37) implique que (38) ne dépend pas du choix de a.

Inversement, Picard établit que toute expression (38) pour laquelle (37) est vérifiée est une période de l'intégrale double considérée; pour cela, il considère le cycle $\Sigma m_i \Gamma'_i$ de la courbe (31), où Γ'_i est le cycle qui donne la période Ω'_i de l'intégrale abélienne. Lorsque y parcourt C, ce cycle se retrouve en a augmenté de $\Sigma m_i \Gamma^a_i$, où Γ_i est le cycle correspondant à Ω_i, et cette variation du cycle «limite une portion P sur la surface de Riemann qui correspond à $y = a$» c'est-à-dire est homologue à 0 sur cette surface ; le cycle $\Sigma m_i \Gamma'_i$ engendre un système de «surfaces ouvertes» (une chaîne) dont le bord est le même que celui de P, et on peut donc construire un cycle de dimension 2 de la surface (5) en adjoignant P à ce système. La période de l'intégrale double sur le cycle de dimension 2 ainsi obtenu est précisément (38).

Si l'équation de Picard-Fuchs est irréductible, il y a $2p$ des Ω_i qui sont indépendantes, par exemple les $2p$ premières ; mais pour tout $h > 2p$ on a une relation à coefficients entiers

(39)
$$m^h_1 \Omega_1 + \ldots + m^h_{2p} \Omega_{2p} + m_h \Omega_h = 0$$

donc une période

$$A_h = m_1^h \int_{b_1}^{a} \Omega_1(y)\mathrm{d}y + \ldots$$

$$+ m_{2p}^h \int_{b_{2p}}^{a} \Omega_{2p}(y)\mathrm{d}y + m_h \int_{b_h}^{a} \Omega_h(y)\mathrm{d}y$$

de l'intégrale double. On voit alors que toute période du type (38) est liée aux A_h par une relation linéaire à coefficients entiers, que l'on obtient en éliminant les $\int_{b_h}^{a} \Omega_h(y)\mathrm{d}y$ de son expression (les intégrales des Ω_i, $1 \le i \le 2p$ disparaissent à cause de l'indépendance de ces périodes et du fait que l'on a une relation entre quantités qui ne dépendent pas de a). D'autre part les N -$2p$ périodes A_h sont liées par $2p$ relations que l'on obtient en écrivant que les résidus de toutes les solutions de l'équation de Picard-Fuchs à l'infini sont nuls.

Une étude topologique assez délicate permet à Picard d'établir que *toutes* les périodes d'une intégrale double proviennent de relations de la forme (37) et qu'elles s'écrivent sous la forme (38) (Picard 1903f). Le nombre des périodes indépendantes d'une intégrale double de première espèce est donc N - $4p$ où N est la classe de la surface et p est le genre d'une de ses sections planes générique.

Dans le cas général d'une intégrale double (27) non nécessairement de première espèce, l'intégrale abélienne $\int \frac{P\,\mathrm{d}x}{f'_z}$ n'est plus de première espèce ; elle a $2p$ +m -1 périodes dont m -1 correspondent àux résidus à l'infini et sont des polynômes en y (Picard 1902d) ; ces périodes sont solutions d'une équation différentielle linéaire E' d'ordre $2p + m - 1$ à coefficients polynomiaux en y qui remplace l'équation de Picard-Fuchs habituelle (Picard 1903f). Les points singuliers b_1, b_2, ..., b_N sont toujours les mêmes et on associe à chacun d'eux une solution holomorphe Ω_i qui apparaît comme coefficient dans le terme logarithmique d'une autre solution. Si les solutions Ω_1, Ω_2, ..., Ω_{2p+m-1} sont indépendantes, en procédant comme plus haut on construit N - $2p$ -(m -1) périodes A_h ($2p + m \le h \le N$) auxquelles tout autre période est liée par une relation linéaire à coefficients entiers ; Picard établit d'ailleurs, par des considérations habituelles de monodromie, que l'hypothèse d'indépendance de $2p$ +m -1 parmi les Ω est toujours satisfaite lorsque la surface n'a aucune intégrale simple de deuxième espèce non rationnelle (c'est-à-dire lorsqu'elle est régulière). Picard étudie l'indépendance de ces périodes A_h ; il démontre d'abord que, si elles sont liées par une relation linéaire à coefficients entiers, la même relation vaut pour les périodes correspondantes de toute autre intégrale double (28), en particulier pour les intégrales où P est remplacé par $y^m P$ (m

entier quelconque) et par suite pour celle où P est remplacé par $\frac{P}{y-\eta}$, η suffisamment grand (car $(y-\eta)^{-1} = -\Sigma\frac{y^m}{\eta^{m+1}}$), et on voit facilement que ceci est absurde pour P général. Parmi les périodes considérées, $2p$ correspondent aux résidus relatifs à la courbe à l'infini de la surface ; ils sont nuls si l'intégrale double est de seconde espèce et on trouve ainsi que le nombre des périodes indépendantes d'une intégrale double de seconde espèce est
$N-4p-(m-1)$.

Lorsque la surface possède r intégrales simples de seconde espèce indépendantes, il faut modifier la valeur précédente car le nombre total des périodes de (28) est $N-2p-(m-1)+r$ (Picard 1904c, **1905b**).

Calcul de l'invariant ρ_o

Les conditions pour qu'une intégrale double (27) puisse se mettre sous la forme (26) sont difficiles à trouver car les fonctions U et V de (26) peuvent être infinies sans que P le soit ; les résultats de Picard sur les intégrales simples de troisième espèce lui ont permis de surmonter cette difficulté (Picard 1902g). Soient $G(x, y) = 0$ l'équation de la projection de la courbe double sur le plan des xy et $g(x, y) = 0$ celle de la projection du contour apparent ; on peut supposer que le dénominateur commun de U et de V est de la forme

(40) $$gG\,\varphi_1\cdots\varphi_r f'_z$$

où $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ sont des polynômes irréductibles en x et y premiers entre eux et premiers à g et à G . Soient $C_1, \ldots, C_{\rho-1}$ des courbes sur la surface telles que, pour toute courbe Γ, il existe une intégrale simple avec des singularités logarithmiques le long de Γ et de certaines des C_i et éventuellement de la courbe à l'infini ; les projections de ces courbes ont pour équations $g_i(x, y) = 0$ ($i = 1, 2, \ldots, \rho-1$). On applique cette propriété à l'une des courbes où U et V deviennent infinis, par exemple se projetant selon $\varphi_1(x, y) = 0$, ce qui donne une forme de troisième espèce $\frac{P\,dx + Q\,dy}{\varphi_1 g_1\cdots g_{\rho-1} f'_z}$ avec P, Q polynômes en x et z à coefficients rationnels en y ; le résidu de cette forme relatif à Γ est $\frac{P}{\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} g_1\cdots g_{\rho-1} f'_z}$, qui reste donc constant le long de Γ. En tenant compte du fait que (27) est fini sur Γ, on voit encore $V\cdot\frac{\partial}{\partial x}\log\varphi_1$ s'interprète comme le résidu relatif à Γ d'une forme différentielle et que cette expression reste donc constante le long de Γ ; il existe donc une constante C telle que $V.\varphi_1 + C\frac{P}{g_1\cdots g_{\rho-1} f'_z}$ s'annule sur Γ. On peut alors, sans changer (26), remplacer U par $U - C\frac{Q}{\varphi_1 g_1\cdots g_{\rho-1} f'_z}$ et V par

$V + C\dfrac{P}{\varphi_1 g_1 \cdots g_{\rho-1} f'_z}$, ce qui supprime la ligne d'infini Γ ; en procédant ainsi pour toutes les autres, on ramène finalement le dénominateur (40) à la forme

$$g G g_1 \cdots g_{\rho-1} f'_z \tag{41}$$

où les lignes d'infini de U et V sont fixées à l'avance. On peut d'ailleurs supposer que les numérateurs sont divisibles par gG qui disparaît donc de (41).

La recherche de U et de V procède alors ainsi (Picard 1903c, **1903d**; 1903e, **1903f**) : on prend un système fondamental $I_1 \mathrm{d}x$, $I_2 \mathrm{d}x$, …, $I_{2p}\,\mathrm{d}x$ de formes différentielles de deuxième espèce attachées aux sections planes y = const., un système $J_2 \mathrm{d}x$, …, $J_m\,\mathrm{d}x$ de formes de troisième espèce dont les pôles, d'ordre 1, sont O_1 le résidu +1 et, respectivement O_2, …, O_m avec le résidu -1 (où O_1, O_2, …, O_m sont les points à l'infini de la section plane) et enfin un système $H_1 \mathrm{d}x$, …, $H_{\rho-1}\mathrm{d}x$ de formes de troisième espèce sont les pôles sont respectivement les points des courbes C_1, …, $C_{\rho-1}$ dans le plan y = const. avec les résidus +1 et O_1 avec le résidu $-d_i$ (où d_i est le degré de C_i). On cherche V sous la forme

$$\alpha_1 I_1 + \ldots + \alpha_{2p} I_{2p} + \gamma_2 J_2 + \ldots + \gamma_m J_m + \eta_1 H_1 + \ldots + \eta_{\rho-1} H_{\rho-1} \tag{42}$$

où les α et les γ sont des fonctions rationnelles de y tandis que les η sont des constantes. En écrivant que $\dfrac{P}{f'_z} - \dfrac{\partial V}{\partial y}$ est la dérivée partielle par rapport à x d'une fonction rationnelle U de x, y, z, on trouve un système de $2p + m$ -1 équations différentielles linéaires d'ordre 1 en les α et les γ, où les constantes η interviennent linéairement.

Lorsque $\rho = 1$, il n'y a pas de fonctions H ; en intégrant l'identité supposée

$$\frac{P}{f'_z} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \tag{43}$$

sur un cycle de la section par y = const., on obtient une identité $\omega = \dfrac{\mathrm{d}\omega'}{\mathrm{d}y}$ où ω et ω' sont des périodes correspondantes des intégrales abéliennes $\displaystyle\int \frac{P\,\mathrm{d}x}{f'_z}$ et $\displaystyle\int V\,\mathrm{d}x$; en intégrant en y sur un lacet autour d'un point singulier b_i de l'équation de Picard-Fuchs, on en déduit alors une identité $\displaystyle\int_{b_i}^{a} \Omega_i(y)\,\mathrm{d}y = \Omega'_i(a)$ avec des notations évidentes. Or les périodes de (27) sont des combinaisons (38) pour lesquelles (37) est vérifié ; ces relations (37) impliquent $\Sigma m_i\, \Omega'_i(y) = 0$ car le groupe de monodromie est indépendant de l'intégrale abélienne considérée. Les identités précédentes conduisent alors à la nullité de toutes les périodes (38) de l'intégrale double (27). Ainsi, lorsque ρ = 1, une condition nécessaire pour qu'une intégrale double (27) puisse se mettre sous la forme (26) est que *toutes ses périodes soient nulles*. On peut établir la réciproque sans faire d'hypothèse sur ρ : la condition précédente est suffisante dans tous les cas. En raisonnant comme on l'a fait plus haut pour voir qu'il n'y avait pas de relation entre les périodes A_h, on voit que les $N - 2p - (m - 1)$ conditions imposées par la nullité des périodes sont indépendantes. Ceci permet de donner une formule numérique pour le nombre ρ_0 d'intégrales doubles de seconde espèce indépendantes *modulo* les intégrales (26) : on trouve $\rho_0 = N - 4p - (m - 1)$ dans le cas où l'on a $\rho = 1$. Dans le cas général, où ρ est quelconque, on a $\rho_0 = N - 4p - (m - 1) - (\rho - 1)$.

Lorsque la surface possède r intégrales simples de deuxième espèce indépendantes, la formule est à corriger car il y a $N - 2p - (m - 1) + r$ périodes et il faut $2p - r$ conditions pour exprimer qu'une intégrale double (27) est de seconde espèce: on trouve donc

(44) $$\rho_0 = N - 4p - (m - 1) + 2r - (\rho - 1) .$$

Les points doubles isolés éventuels de la surface viennent encore modifier la valeur de ρ_0 ; lorsqu'il y en a d il faut remplacer N par $N + d$ (Picard 1904c, **1905b**).

Comme exemple, Picard donne le cas de la surface d'équation $z^2 = f(x)F(y)$ où f et F sont des polynômes de degré respectifs $2p + 1$ et $2q + 1$; il trouve $\rho_0 = 4pq$ en général, soit 4 si f et F sont de degré 3 ; mais on a seulement $\rho_0 = 3$ lorsque $F = f$ ou même $\rho_0 = 2$ si de plus la courbe elliptique $z^2 = f(x)$ a de la multiplication complexe (Picard 1903c, 1903d). Pour la surface la plus générale de degré m, $\rho_0 = (m - 1)(m^2 - 3m + 3)$ car la classe N vaut $m(m - 1)^2$ et $p = \dfrac{(m - 1)(m - 2)}{2}$; mais pour la surface d'équation $z^m = x^m + P(y)$ (P polynôme de degré m, $m \geq 4$) on a seulement $\rho_0 = (m - 1)(m - 2)^2$. Les autres exemples traités par Picard sont les surfaces unicursales, pour lesquelles il trouve $\rho_0 = 0$ comme on pouvait s'y attendre, la surface de Kummer, pour laquelle $N = 4$, $d = 16$, $p = 3$ et $\rho = 1$, ce qui donne $\rho_0 = 5$ et les surfaces hyperelliptiques, pour lesquelles on a aussi en général $\rho_0 = 5$ (Picard 1904a, **1905b**).

L'invariant (relatif, c'est-à-dire par isomorphismes) $N - 4p - (m - 1)$ avait déjà été rencontré par Zeuthen et par Noether (Zeuthen 1871, Noether 1875) ; dans les notations de Noether, le degré de la surface était noté n, sa classe n' et il introduisait un nombre $a = 2(n - 1) + 2p$ où p est le genre d'une section plane générique. Noether avait établi que, si on a une équivalence birationnelle entre deux surfaces d'équations respectives $f = 0$ et $f_1 = 0$, on a

(45) $$n' - 2a + 3n + \sum\mu = n'_1 - 2a_1 + 3n_1 + \sum\mu_1$$

en notant $\sum\mu$ la somme des multiplicités de tous les «points fondamentaux» de $f = 0$ (points qui correspondent à des courbes exceptionnelles dans $f_1 = 0$) plus la somme des multiplicités des points multiples non fondamentaux et en utilisant les mêmes notations pour $f_1 = 0$. Or il est clair que

$$n' - 2a + 3n = N - 4p - m + 4$$

avec les notations de Picard. Picard retrouve une formule analogue à (45) en utilisant l'invariance birationnelle de ρ_0 et de r, qui donne celle de

(46) $$N + d - 4p - (m - 1) - \rho ;$$

il démontre par ailleurs que, si deux surfaces $f = 0$ et $f' = 0$ sont en correspondance birationnelle avec F points fondamentaux sur la première et F' points fondamentaux sur la seconde, on a $\rho+F = \rho'+F'$, donc
$N+d-4p-(m-1)+F = N'+d'-4p'-(m'-1)+F'$ (Picard 1904c, 1905b, 1908). Le même invariant a été aussi rencontré par Enriques, donné, pour une surface sans aucune courbe exceptionnelle par la formule

$$I = 12p_a - p^{(1)} + 9 \tag{47}$$

où p_a désigne le genre arithmétique de la surface et $p^{(1)}$ son *Curvengeschlecht* au sens de Noether, c'est-à-dire le genre d'une courbe intersection de la surface avec une adjointe de degré m -3 (Enriques 1901 ; Castelnuovo et Enriques 1901) ; on l'appelle l'invariant de Zeuthen-Segre.

Conclusion

La théorie des surfaces algébriques développée par Picard est une construction impressionnante. Il a introduit un certain nombre d'idées fondamentales pour le développement ultérieur de la géométrie algébrique: l'étude systématique d'une surface comme famille de ses sections planes par les plans y = const., qui permet d'utiliser les résultat connus sur les courbes algébriques ; l'utilisation de l'équation de Picard-Fuchs et de la monodromie ; les développements topologiques, qu'il a abordés avant le mémoire fondateur de Poincaré (Poincaré 1895). Bien sûr, les démonstrations relatives à la résolution des singularités ne sont pas encore satisfaisantes et les concepts topologiques n'ont qu'une base intuitive un peu imprécise ; Picard fait tous ses raisonnements pour des surfaces dont les singularités sont ordinaires et il ne fait pas usage des modèles minimaux de surfaces algébriques, découverts en 1901 par Castelnuovo et Enriques (Castelnuovo et Enriques 1901).

Ces idées ont été exploitées et développées par Lefschetz dans les années 1920 (Lefschetz 1920, 1921, 1924, 1967) avant d'être reprises par Grothendieck dans le cadre de la géométrie algébrique abstraite (Grothendieck 1972). L'autre aspect de l'histoire de la géométrie algébrique vers la fin du siècle dernier concerne les travaux des géomètres italiens, développés ensuite par Zariski (Zariski 1935) ; peut-être est-il moins méconnu que celui que nous avons essayé d'aborder.

Bibliographie

G. CASTELNUOVO (1897), *Alcune proprietà fundamentali dei sistemi lineari di curve tracciate sopra una superficie algebrica*, Ann. di mat. ser. 2, t.XXV

G. CASTELNUOVO (1905), *Sugli integrali semplici appartenenti ad una superficie irregolare*, Rendiconti della R. Acc. dei Lincei

G. CASTELNUOVO et F.ENRIQUES (1901), *Sopra alcune questioni fondamenttali…*, Ann. di mat.ser. 3, t.6

A. CAYLEY (1871), *On the Deficiency of certain surfaces*, Math.Ann.3

A. CLEBSCH (1868), *Sur les surfaces algébriques*, CRAS 67, 1238-1239

P. DEL PEZZO (1892), *Intorno ai punti singolari delle superficie algebriche*, Rendiconti del circ. mat. di Palermo

F. ENRIQUES (1896), *Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche*, Mem. della Soc. It. delle Sc. ser. 3, t.X

F. ENRIQUES (1901), *Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche*, Ann. di mat.

L. FUCHS (1871), *Ueber die linearen Differentialgleichungen, welchen die Periodicitätsmoduln des Abelschen Integrale genügnen, und über verschiedene Arten von Differentialgleichungen für $\theta(0, 0, \ldots, 0)$*, J.für die reine und angew. Math. 73, 324-339

A. GROTHENDIECK (1972), *Groupe de monodromie en géométrie algébrique*, SGA7

G. HUMBERT (1893), *Théorie générale des surfaces hyperelliptiques*, J. de math. pures et appl. sér. 4, t.9

G. KOBB (1892), *Sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables*, J. de math. pures et appl. sér. 4, t.8

S. LEFSCHETZ (1920), *Algebraic surfaces, their cycles and integrals*, Ann. of math. 21, 225-258

S. LEFSCHETZ (1921), *On certain numerical invariants of algebraic varieties with application to abelian varieties*, Trans. AMS. 22, 327-482

S. LEFSCHETZ (1924), *L'analysis situs et la géométrie algébrique*, Paris

S. LEFSCHETZ (1967), *A page of mathematical autobiography*, Bull. AMS. 74, 854-879

M. NOETHER (1870), *Zur Theorie des eindeutigen entsprechends algebraischer Gebilde*, Math. Ann. 2

M. NOETHER (1875), *Zur Theorie des eindeutigen entsprechends algebraischer Gebilde*, Math. Ann. 8

E. PICARD (1881), *Sur les surfaces pour lesquelles les coordonnées d'un point quelconque s'expriment par des fonctions abéliennes de deux paramètres*, CRAS. 92, 1495-1498

E. PICARD (1882), *Sur un théorème relatif aux surfaces pour lesquelles les coordonnées d'un point quelconque s'expriment par des fonctions abéliennes de deux paramètres*, Math. Ann. 19, 569-577

E. PICARD (1883), *Sur une classe de fonctions de deux variables indépendantes*, CRAS. 96, 320-323

E. PICARD (1884a) *Sur les intégrales de différentielles totales algébriques*, CRAS. 99, 961-963

E. PICARD (1884b), *Sur les intégrales de différentielles totales algébriques et sur une classe de surfaces algébriques*, CRAS. 99, 1148-1149

E. PICARD (1885a), *Sur les fonctions hyperabéliennes*, J. de Math. pures et appl. sér. 4, t. 1, 87-128

E. PICARD (1885b), *Sur les intégrales de différentielles totales*, CRAS. 100, 843-845

E. PICARD (1885c), *Sur les intégrales de différentielles totales algébriques de première espèce*, J. de Math. pures et appl. sér. 4, t. 1, 281-346

E. PICARD (1886a), *Sur les intégrales de différentielles totales de seconde espèce*, CRAS. 102, 250-253

E. PICARD (1886b), *Sur les intégrales de différentielles totales de seconde espèce*, J.de Math. pures et appl. sér. 4, t. 2, 329-372

E. PICARD (1886e), *Sur la transformation des surfaces algébriques en elles-mêmes*, CRAS. 103, 517-520

E. PICARD (1886f), *Sur la transformation des surfaces algébriques en elles-mêmes et sur un nombre fondamental dans la théorie des surfaces*, CRAS. 103, 549-552

E. PICARD (1886g), *Sur la transformation des surfaces et une classe d'équations différentielles*, CRAS. 103, 635-638

E. PICARD (1886h), *Sur les surfaces algébriques susceptibles d'une double infinité de transformations birationnelles*, CRAS. 103, 731-732

E. PICARD (1889a), *Mémoire sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables*, J. de Math. pures et appl. sér. 4, t. 5, 135-319

E. PICARD (1889b), *Sur les intégrales multiples relatives à trois variables complexes*, CRAS. 108, 132-133

E. PICARD (1895a), *Sur la théorie des surfaces et des groupes algébriques*, CRAS. 120, 658-660

E. PICARD (1895b), *Sur la théorie des groupes et des surfaces algébriques*, Rendiconti del circ. mat. di Palermo 9, 244-255

E. PICARD (1897b), *Sur la théorie des surfaces algébriques au point de vue de la géométrie de situation et sur les intégrales de différentielles totales*, CRAS. 124, 532-538

E. PICARD (1897c), *Sur les intégrales doubles de seconde espèce*, CRAS. 125, 909-910

E. PICARD (1897d), *Sur les périodes des intégrales doubles de fonctions algébriques*, CRAS. 125, 1068-1070

E. PICARD (1898a), *Sur la réduction des intégrales doubles et sur un nouvel invariant dans la théorie des surfaces algébriques*, CRAS. 126, 297-300

E. PICARD (1898b), *Sur la réduction des intégrales doubles de fonctions algébriques*, CRAS. 126, 1116-1117

E. PICARD (1898c), *Quelques remarques relatives aux périodes des intégrales doubles et aux cycles à deux dimensions dans les surfaces algébriques*, CRAS. 126, 1457-1459

E. PICARD (1898d), *Sur les intégrales doubles de seconde espèce dans la théorie des surfaces algébriques*, CRAS. 127, 579-584
E. PICARD (1899a), *Sur les intégrales doubles de seconde espèce dans la théorie des surfaces algébriques*, J. de math. pures et appl. sér. 5, t. 5, 5-54
E. PICARD (1899b), *Quelques remarques sur les intégrales doubles de seconde espèce dans la théorie des surfaces algébriques*, CRAS. 129, 539-540
E. PICARD (1901a), *Sur la résolution de certaines équations à deux variables à l'aide de fonctions rationnelles et sur un théorème de M.Noether*, Arch. Math.Phys. 1, 209-212 et Bull. SMF. 25, 81-84
E. PICARD (1901b), *Sur les intégrales de différentielles totales de troisième espèce dans la théorie des fonctions algébriques de deux variables*, CRAS. 132, 18-19
E. PICARD (1901c), *Sur les intégrales de différentielles totales de troisième espèce dans la théorie des sufaces algébriques*, Ann. de l'ENS. 18, 397-420
E. PICARD (1901e), *Sur les périodes des intégrales doubles dans la théorie des fonctions algébriques de deux variables*, CRAS. 133, 795-800
E. PICARD (1901f), *Sur les périodes des intégrales doubles dans la théorie des fonctions algébriques de deux variables*, CRAS. 133, 1171-1173
E. PICARD (1902b), *Sur les périodes des intégrales doubles dans la théorie des fonctions algébriques de deux variables*, Ann. de l'ENS. 19, 65-73
E. PICARD (1902d), *Sur le nombre de conditions exprimant que certaines intégrales doubles sont de deuxième espèce*, Ann. de l'ENS. 19, 79-87
E. PICARD (1902f), *Sur les intégrales doubles de fonctions rationnelles dont tous les résidus sont nuls*, Bull. SMF. 26, 143-152
E. PICARD (1902g), *Sur quelques points fondamentaux dans la théorie des fonctions algébriques de deux variables*, Acta math. 26, 273-285
E. PICARD (1902h), *Sur une propriété curieuse d'une classe de surfaces algébriques*, CRAS. 135, 217-220
E. PICARD (1903a), *Sur certaines surfaces algébriques pour lesquelles les intégrales de différentielles totales se ramènent à des combinaisons algébrico-logarithmiques*, CRAS. 136, 913-918
E. PICARD (1903b), *Sur certaines surfaces algébriques dont les intégrales de différentielles totales sont algébrico-logarithmiques*, Ann. de l'ENS. 20, 349-377
E. PICARD (1903c), *Sur les relations entre la théorie des intégrales doubles de seconde espèce et celle des intégrales de différentielles totales*, CRAS. 137, 541-547
E. PICARD (1903d), *Sur les relations entre la théorie des intégrales doubles de seconde espèce et celle des intégrales de différentielles totales*, Ann. de l'ENS. 20, 519-529
E. PICARD (1903e), *Sur les périodes des intégrales doubles et leurs rapports avec la théorie des intégrales doubles de seconde espèce*, CRAS. 137, 594-600
E. PICARD (1903f), *Sur les périodes des intégrales doubles et leurs rapports avec la théorie des intégrales doubles de seconde espèce*, Ann. de l'ENS. 20, 531-584
E. PICARD (1904a), *Sur quelques points de la théorie des fonctions algébriques de deux variables et de leurs intégrales*, CRAS. 138, 437-440

E. PICARD (1904c), *Sur la formule générale donnant le nombre des intégrales doubles de seconde espèce dans la théorie des surfaces algébriques*, CRAS. 139, 949-953

E. PICARD (1905a), *Sur quelques théorèmes relatifs aux surfaces algébriques de connexion linéaire supérieure à l'unité*, CRAS. 140, 949-953

E. PICARD (1905b), *Sur la formule générale donnant le nombre des intégrales doubles distinctes de seconde espèce relatives à une surface algébrique*, Ann. de l'ENS. 22, 69-100

E. PICARD (1905c), *Sur quelques questions se rattachant à la connexion linéaire dans la théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, J. für die reine und angew. Math. 129, 275-286

E. PICARD (1905d), *Sur la dépendance entre les intégrales de différentielles totales de première et de seconde espèce d'une surface algébrique*, CRAS. 140, 915-917

E. PICARD (1905e), *Sur une inégalité relative à la connexion linéaire et sur le calcul du genre numérique d'une surface algébrique*, CRAS. 141, 5-8

E. PICARD (1908), *De l'influence des points multiples isolés sur le nombre des intégrales doubles de seconde espèce d'une surface algébrique*, CRAS. 147, 954-955

E. PICARD (1916), *Sur la nature algébrico-logarithmique des intégrales de différentielles totales relatives aux surfaces algébriques régulières*, CRAS. 163, 637-642 et Ann. de l'ENS. 33, 373-379

E. PICARD et G. SIMART (1897), *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, t.I

H. POINCARE(1884), *Sur les intégrales de différentielles totales*, CRAS 99, 1145-1147

H. POINCARE(1887), *Sur les résidus des intégrales doubles*, Acta math. 9, 321-380

H. POINCARE(1895), *Analysis Situs*, J. de l'Ec. Pol. 1, 1-121

H. POINCARE(1901), *Sur la connexion des surfaces algébriques*, CRAS. 133, 969-973

H. POINCARE(1902a), *Sur certaines surfaces algébriques; troisième complément à l'* Analysis situs, Bull. SMF. 30, 49-70

H. POINCARE(1902b), *Sur les cycles des surfaces algébriques; quatrième complément à l'* Analysis situs, J. de Math. pures et appl. sér. 5, t. 8, 169-214

H. POINCARE(1906), *Sur les périodes des intégrales doubles*, J. de Math. pures et appl. sér. 6, t. 2, 135-189

H. POINCARE(1909), *Sur les courbes tracées sur les surfaces algébriques*, CRAS. 149, 1026-1027

H. POINCARE(1910), *Sur les courbes tracées sur les surfaces algébriques*, Ann. de l'ENS. 27, 55-108

H. POINCARE(1911), *Sur les courbes tracées sur une surface algébrique*, Sitzungsb. der Berliner math. Gesellschaft 10, 28-55

B. RIEMANN (1857), *Theorie des Abel'schen Functionen*, J. für die reine und angew. Math. 54

C. SEGRE (1896), *Sulla composizione dei punti singolari delle superficie algebriche*, Ann. di mat.

F. SEVERI (1904), *Sulle superficie algebriche che possegono integrali di Picard della secunda specie*, Atti della Acc. dei Lincei
F. SEVERI (1905), *Sulla differenza tra i numeri degli integrali di Picard della prima e della secunda specie appartenenti ad una superficie algebrica*, Atti della Acc. di Torino
F. SEVERI (1906), *Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica*, Math. Ann.62
R. WALKER (1935), *Reduction of the singularities of an algebraic surface*, Ann. of Math. 36, 336-365
O. ZARISKI (1935), *Algebraic surfaces*, Berlin
H. G. ZEUTHEN (1871), *Études géométriques de quelques-unes des propriétés de deux surfaces dont les points se correspondent un a un*, Math. 4