

# Jean-Pierre Kahane

## Séries de Fourier, séries de Taylor, séries de Dirichlet ; un aperçu de l'importance des travaux des mathématiciens français dans la période 1880-1910

### Avant 1880

On peut faire remonter les séries trigonométriques à Euler [Pap], les fonctions analytiques à Cauchy [HM], les séries de Dirichlet à la démonstration du théorème sur les nombres premiers dans les progressions arithmétiques [Ser] (les références indiquées contiennent toutes les références désirables sur les origines). Au cours du XIX<sup>e</sup> siècle, des progrès remarquables jalonnent leurs théories.

### Séries trigonométriques

Sur les séries trigonométriques, rappelons la formule de Parseval (1806) [Fat, p. 350], la théorie analytique de la chaleur et le formalisme de Fourier (1808), le premier théorème de convergence, en même temps que la première approche moderne de la notion de fonction, par Dirichlet (1829), la première étude historique, la première définition de l'intégrale, la distinction entre les séries absolument convergentes et les séries convergentes, le premier usage des primitives doubles et du procédé de sommation correspondant, dans la thèse de Riemann (1854), l'apparition des premières notions sur les ensembles de points en relation avec le problème de l'unicité d'une série trigonométrique de somme donnée, dans le prolongement que G. Cantor donne à sa thèse (1872), la solution du problème de Dirichlet pour le cercle au moyen de la formule de Poisson, par Schwarz (1872), la construction d'une fonction continue dont la série de Fourier diverge en un point par Paul du Bois-Reymond (1873), celle, à la même date, par Weierstrass, d'une fonction continue nulle part dérivable, au moyen d'une série trigonométrique lacunaire. Entre 1820 et 1880, la théorie des séries trigonométriques intéresse, outre les mathématiciens que je viens de nommer, Cauchy, Poisson, Liouville, Bonnet, Lipschitz, Heine, Ascoli, et surtout Dini dont le livre sur la série de Fourier (1880) est immédiatement salué par Hermite comme un événement [Her].

## Fonctions analytiques

Sur les fonctions analytiques, les travaux sont légion. Leur théorie est la théorie des fonctions par excellence. On y distingue, selon le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, la théorie générale et les études sur des fonctions particulières (élémentaires, elliptiques, hyperelliptiques, sphériques). Mais l'aspect *série de Taylor*, lien entre les propriétés de la fonction, et particulièrement son prolongement analytique, avec les propriétés du développement de Taylor en un point (disons, l'origine), n'apparaît qu'avec Méray [Mer] et surtout Weierstrass [Wei]. En 1880, le programme du prolongement analytique et de la détection des singularités à partir de la série de Taylor (le germe de la fonction à l'origine) est encore dans les limbes. Il allait fortement inspirer Hadamard et Borel, puis Fabry, Leau, Leroy, Servant, Fatou, Denjoy, et le sujet allait rester l'un des points forts de l'école française, avec S. Mandelbrojt notamment, au delà de la guerre de 1914-18 ([Bie], dans une liste de 225 références, cite 75 travaux français).

## Séries de Dirichlet

Pour les séries de Dirichlet, les textes fondateurs sont l'article de Dirichlet de 1834, intitulé démonstration d'un théorème sur la progression arithmétique, dans lequel il introduit les séries  $L (= \sum \chi(n) n^{-s})$  où  $\chi$  est un caractère modulo  $m$ , et l'article de Riemann de 1859, *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, où il reprend la formule d'Euler  $\prod (1 - p^{-s}) = \sum n^{-s}$ , désigne la somme par  $\zeta(s)$ , établit l'équation fonctionnelle et le prolongement analytique de  $\zeta(s)$  comme fonction méromorphe dans le plan, et formule sa conjecture sur les zéros de  $\zeta(s)$ . En 1880, non seulement le sujet est resté en l'état, mais personne n'a l'idée d'une théorie générale des séries de Dirichlet  $\sum a_n n^{-s}$  (séries de Dirichlet au sens strict) ou  $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$  (séries de Dirichlet au sens large). La terminologie n'existe pas encore ; elle n'apparaît qu'au début des années 1900. Cependant les années 1880 voient l'amorce de la théorie générale, avec la formule de Jensen

$$\left| e^{-\lambda_n s} - e^{-\lambda_{n+1} s} \right| \leq \frac{|s|}{|\sigma|} (e^{-\lambda_n \sigma} - e^{-\lambda_{n+1} \sigma})$$

qui est à la base de l'étude de la convergence des séries de Dirichlet générales [Jen1] et les travaux de Stieltjes de 1885, sur lesquels je reviendrai. Puis, autour de 1895, ce seront les travaux de Cahen, Hadamard, la Vallée Poussin, une période de latence jusque vers 1908, et une véritable explosion du sujet entre 1908 et 1910.

## Quatre observations générales

Avant de revenir à la période 1880-1910 pour chacun des trois sujets *séries de Fourier*, *séries de Taylor*, *séries de Dirichlet*, et au rôle des mathématiciens français, quelques observations générales me paraissent utiles.

### La terminologie

D'abord, la remarque sur la terminologie que je viens de faire sur les séries de Dirichlet s'applique également aux deux autres sujets. Dans la littérature antérieure à 1900, on voit mentionner plus fréquemment les *formules de Fourier*, le *théorème de Fourier*, que les *séries de Fourier* [Pap]. D'ailleurs, il arrive qu'on parle de fonctions de Fourier pour ce que nous appelons fonctions de Bessel [Nic]. Les résultats sur les séries de Fourier les plus importants apparaissent au titre de la solution de l'équation  $\Delta u = 0$  dans un cercle [Schw] ou de la représentation des fonctions [Wei2][Pic1], quelquefois de l'intégrale de Poisson [Val2] ou de l'intégrale de Dirichlet [Stä]. Il arrive qu'on parle indifféremment de séries trigonométriques ou de séries de Fourier. Cependant *série trigonométrique* a une acception plus large. Les notes de Poincaré sur les séries trigonométriques sont inspirées par la mécanique céleste, et traitent de séries dont les fréquences, au lieu d'être entières, tendent vers 0 ; elles préfigurent l'étude des fonctions presque-périodiques sans s'y ramener, et elles mériteront un jour une relecture [Poi1 à 5]. Dans un sens plus restreint, on appelle série trigonométrique, comme Riemann, toute série formelle de la forme  $\sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ . La terminologie actuelle s'impose avec Lebesgue [Leb7] : les *séries de Fourier* sont les séries trigonométriques dont les coefficients s'obtiennent par les formules intégrales de Fourier à partir d'une fonction intégrable-Lebesgue. L'influence de Lebesgue est telle que cette terminologie est immédiatement adoptée [Hob].

Sur la série de Taylor, il n'y a guère d'hésitation. La série de Taylor d'une fonction  $f$  au point  $a$  est la série formelle

$$\sum_0^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n.$$

Pour  $a = 0$ , on l'appelle parfois série de Mac-Laurin, et c'est, en fait, comme l'a montré E. Borel, la série formelle  $\sum_0^{\infty} c_n x^n$  la plus générale [Bor0, I, p. 274]. En général, elle ne détermine pas la fonction  $f$  ; mais il en est ainsi si  $f$  est analytique ou appartient à une classe quasi-analytique convenable [HM]. Si l'on part de la série  $\sum_0^{\infty} c_n z^n$ , la première question est celle du rayon de convergence, puis celle du prolongement et de la localisation des singularités de la fonction obtenue. Or la formule d'Hadamard

$$R = (\overline{\lim} |c_n|^{1/n})^{-1}$$

ne date que de 1888 [Had1], et à l'époque on parle de séries entières [Lec] ou, comme Hadamard, de séries ordonnées suivant les puissances d'une variable [Had1]. Ce n'est qu'en abordant la seconde partie du programme que s'impose

à partir de 1892, avec Hadamard toujours, l'usage du terme de *série de Taylor* [Had2].

### Des sujets d'importance relative

En second lieu, il faut relativiser l'importance de ces sujets. Dans le *Jahrbuch*, durant cette période 1880-1910, les trois grandes divisions de l'analyse sont les séries, le calcul différentiel et intégral (une et plusieurs variables) et la théorie des fonctions, que j'ai déjà mentionnée. La théorie générale des séries connaît une grande vogue, avec les séries divergentes, les procédés de sommation et leur comparaison, la multiplication des séries et une foule de problèmes spéciaux. Dans les années 1890 apparaissent les procédés de sommation de Cesaro (liés à la multiplication des séries) et de Borel (lié au prolongement analytique des séries de Taylor) ; vers les années 1910 les nouveaux procédés de M. Riesz seront liés aux séries de Dirichlet. Dans l'intervalle, en 1900, le grand succès de Fejér est de montrer que le plus simple des procédés de sommation, celui de la moyenne arithmétique (ou moyenne de Cesaro d'ordre 1) donne enfin une version correcte et simple du "théorème de Fourier" pour toutes les fonctions continues. La théorie générale des séries et les procédés de sommation dominent la scène, et les séries de Fourier, séries de Taylor et séries de Dirichlet ont dans le *Jahrbuch* une place bien réduite (0, 0, 0 en 1890 ; 3, 4, 0 en 1902 ; 17, 7, 9 en 1912).

Cependant l'histoire de ces sujets est intéressante, vue d'aujourd'hui, précisément parce que c'est la période de leur éclosion sous la forme où nous les connaissons maintenant ; en particulier, la période où la terminologie actuelle s'affirme. Cette terminologie, qui est un point de départ dans les exposés actuels (p. ex. [Ser]), est l'aboutissement de longs efforts, qu'il vaut la peine d'étudier.

### Les modes et leurs ressorts

En troisième lieu, il apparaît que ces efforts ne sont pas ininterrompus, mais connaissent, pour chaque sujet, des périodes d'activation et des périodes de relaxation. Ainsi la grande période des séries de Taylor va de 1892 à 1900 ; celle des séries de Fourier part de 1900 ; les séries de Dirichlet connaissent une phase d'activation autour de 1885, une autre autour de 1895, et un grand essor entre 1908 et 1910. Il y a là comme des modes qui se succèdent. Peut-on en analyser le mécanisme ? Voici quelques éléments.

a) l'influence des succès. Lorsqu'est introduit un outil nouveau, puissant et simple, son utilisation découvre des champs nouveaux, et peut réactiver des sujets anciens. Cas typiques : les formules de Fourier, l'intégrale de Lebesgue.

b) l'influence des échecs. Lorsqu'on bute sur un obstacle, l'obstacle devient problème ouvert : c'est, après Dirichlet 1829, le problème de la convergence des séries de Fourier des fonctions continues ; après Riemann 1859, la conjecture

sur les zéros de la fonction dzêta. Mais il y a des échecs plus cuisants : des énoncés imprécis, des énoncés faux, des démonstrations fausses. Cas typiques : le "théorème de Fourier" sur la convergence des séries de Fourier est, selon la façon dont on le prend, imprécis ou faux ; la démonstration de la convergence que donne Cauchy est complètement fautive. Plus encore que Fourier, c'est la faute de Cauchy qui donne des ailes à Dirichlet et à Riemann.

c) l'influence des personnalités dominantes, des langues dominantes, des journaux dominants. Inutile d'insister sur l'atout considérable qui constituait, à côté de l'originalité et de la portée de certains travaux français, l'audience des *Comptes Rendus* et la place du français comme langue scientifique.

### La théorie des fonctions d'une variable réelle

Pour terminer avec les observations générales, il faut noter une grande absence dans le *Jahrbuch* : les fonctions d'une variable réelle. A vrai dire, en 1900, malgré les travaux de pionniers de G. Cantor et de l'école italienne, malgré la recherche sur les fondements qui apparaît dans les éditions successives du cours de Camille Jordan [Gis], la théorie des fonctions d'une variable réelle reste à naître. Les séries trigonométriques y jouent alors un rôle de ferment et de révélateur, comme un peu plus tard pour le développement de l'analyse fonctionnelle.

### Les séries de Fourier

J'ai mentionné la période faste des années 1872-73 : les exemples de Paul du Bois-Reymond et de Weierstrass, et le théorème de Schwarz sur la convergence de l'intégrale de Poisson. Suivent des conditions suffisantes pour la convergence (du Bois Reymond, Dini), et le décennie se conclut avec le livre de Dini.

Mais l'information ne circule pas très bien. En 1879, du Bois-Reymond redémontre le théorème de Schwarz (en partant, il est vrai, des séries trigonométriques au lieu de l'équation du potentiel) [Boi]. Ossian Bonnet déclare aussitôt qu'il y a longtemps qu'il possède cette formule fondamentale [Bon]. Néanmoins Emile Picard, en 1891, démontre à nouveau que

$$(1) \quad f(t) = \lim_{r \uparrow 1} \sum_0^{\infty} r^n (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

avec comme application le théorème d'approximation de Weierstrass [Pic1]. Le contenu de la note [Pic1] se trouve d'ailleurs intégralement dans son *Cours d'analyse* [Pic2], avec alors la précision qu'il s'agit de la méthode de Schwarz.

Il y a pire. En 1881, J. Boussinesq, qui allait devenir membre de l'Institut pour ses travaux de mécanique, ignorant les exemples et les théorèmes de Paul

du Bois-Reymond, prétend démontrer la convergence de la série de Fourier pour les fonctions périodiques les plus générales [Bou]. A la fin de l'histoire des séries trigonométriques de son livre de 1906, Henri Lebesgue cite Boussinesq en note, à la suite d'une remarque assassine, appliquée à un argument heuristique : "*il est évident que cet argument ne peut remplacer une démonstration mathématique*".

Dans les tomes 92 et 95 des *Comptes Rendus* (1881 et 1882), on trouve trois notes sur les séries de Fourier, de Jordan [Jor], Hugoniot [Hug] et Halphen [Hal]. Les deux dernières établissent et utilisent (en vue de montrer que les coefficients de Fourier tendent vers zéro) une formule du type de Parseval. Celle de Jordan mérite une attention spéciale. C'est là, en effet, qu'il introduit les fonctions à variation bornée (appelées dans cette note fonctions d'oscillation limitée). Il généralise pour ces fonctions le théorème de convergence de Dirichlet. Et enfin (rôle stimulant des erreurs des grands hommes) il donne un exemple de fonction à variation bornée ayant des discontinuités dans tout intervalle pour infirmer une affirmation imprudente de Dirichlet, disant qu'une fonction ne peut être intégrée que si tout intervalle contient un intervalle de continuité ("*cette inadvertance d'un géomètre si justement considéré comme un modèle de précision nous paraît mériter d'être signalée.*") Bien avant que la notion de mesure soit introduite, il y avait donc là l'exemple d'une mesure discrète chargeant tout intervalle.

Au début des années 1880, il y a à l'étranger d'autres travaux estimables (Alexander, Arzela, Ascoli, Beau, Cantor, du Bois-Reymond, Gilbert, Hankel, Harnack, Hobson, Hölder, Johnson, Kopcke, Kronecker, Lindemann, Pringsheim, Sharp, Veltmann, Voss, Weierstrass, références citées dans [Pap]). En regard, très peu de choses en France. Insistons sur les contributions de Cantor et de Weierstrass, parce qu'elles deviennent vite classiques.

En termes actuels, le théorème de Cantor dit ceci : si une série trigonométrique converge vers 0, sauf peut-être sur un compact dénombrable, c'est la série nulle. Par quoi peut-on remplacer les compacts dénombrables ? C'est le problème des *ensembles d'unicité*, dont la relation avec la théorie des ensembles se manifeste à nouveau, après un siècle, par les travaux de R. Kaufman, Solovay, Kechris, Louveau, Debs, Saint-Raimond et autres [Kech].

Le travail de Weierstrass, lui, traite de la possibilité de représenter une fonction continue par une série uniformément convergente de polynômes ou de polynômes trigonométriques. Les outils sont, avant la lettre, la convolution et les identités approximatives (particulièrement à l'aide du noyau gaussien, qu'on appelle aussi noyau de Weierstrass). L'un des résultats est une version corrigée du «théorème de Fourier» : en substituant au noyau

$$\bar{\chi}(x, n) = \sum_{\nu=-n}^n \cos \nu x$$

d'autres noyaux de la forme

$$\chi(x, n) = 1 + 2(n, 1)\cos x + 2(n, 2)\cos 2x + \dots + 2(n, n)\cos nx$$

où les  $(n, \nu)$  représentent des coefficients convenables, tendant vers 1 quand  $\nu$  est fixé et  $n \rightarrow \infty$ , on obtient des procédés d'approximation uniforme des fonc-

tions continues  $2\pi$ -périodiques par des polynômes trigonométriques. C'est ce travail qui avait inspiré Picard [Pic1]. En 1900, le grand succès de L. Fejér est de montrer qu'il suffit de choisir  $(n, \nu) = 1 - \nu/n$ .

Entre 1885 et 1900, la production se ralentit, le sujet des séries de Fourier n'est plus à la mode. Avec l'insolence de la jeunesse, Fejér écrit au début de sa thèse que son travail traite d'un thème de l'analyse dont les mathématiciens considéraient la théorie comme épuisée et close depuis quelque quinze ans, et que, durant cette période, rien d'essentiellement nouveau n'a été publié sur le sujet [Fej0, pp. 56 et 94]. En vérité, il y avait quelques très bons travaux. En particulier, Charles de la Vallée Poussin donne en 1891 une démonstration élégante et rapide du théorème de Dirichlet-Jordan, inspirée par le *Cours d'analyse* de Camille Jordan de 1883 [Val1]. En 1893, il établit de nouveau (comme Schwarz, du Bois-Reymond, Bonnet, Picard, et en semblant les ignorer) la convergence des sommes d'Abel-Poisson (formule (1)), et l'utilise pour établir l'égalité de Parseval (expression de  $\int fg$  à l'aide des coefficients de Fourier) dans les conditions les plus étendues qu'on ait pu considérer à l'époque, c'est-à-dire quand  $\int f^2$  et  $\int g^2$  existent comme intégrales de Riemann généralisées [Val2].

Mais Fejér n'a pas tort, dans ce sens que les travaux sur les séries de Fourier sont dispersés et mal connus. Quand la Vallée Poussin a besoin d'un théorème d'approximation pour obtenir la formule de Parseval, il ne va pas le chercher dans la littérature, il l'établit. Quand A. Hurwitz, en 1901, a besoin de la formule de Parseval (dans le seul cas de fonctions bornées et intégrables au sens de Riemann) pour la solution du problème des isopérimètres au moyen des séries de Fourier, il la démontre au lieu de la chercher chez la Vallée Poussin, au moyen d'un théorème d'approximation qu'il démontre aussi [Hur1]. Cette égalité de Parseval lui paraît si importante qu'il la désigne comme "*Fundamentalsatz der Fourierschen Konstanten*" [Hur2], et E. Fischer, en 1904, lui consacre encore deux nouvelles démonstrations, en se bornant toujours à des fonctions bornées et intégrables-Riemann (donc avec un énoncé plus restrictif que celui de la Vallée Poussin) [Fis1]. Tous ces travaux sur l'égalité de Parseval, vus d'aujourd'hui, semblent dans l'attente d'une nouvelle définition de l'intégrale, et du théorème général qu'allait établir Fatou. Ils expliquent en tous cas pourquoi la Vallée Poussin, Hurwitz, Fischer ont immédiatement accepté et assimilé l'intégrale de Lebesgue. J'y reviendrai.

Reste qu'entre 1885 et 1900 les séries de Fourier sont passées de mode. Les quelques travaux théoriques sur les séries de Fourier tombent dans l'indifférence générale. Le désintérêt pour le sujet qui s'était manifesté en France dans la décennie précédente semble avoir gagné toute l'Europe. Pourquoi cette situation ? Je la rapprocherai de certaines déclarations bien connues d'Hermite et de Poincaré [HS] [Poi6] : Hermite se détourne avec effroi et horreur des fonctions continues qui n'ont point de dérivée, et Poincaré se plaint qu'alors qu'autrefois on inventait des fonctions pour des buts pratiques, on trouve plaisir aujourd'hui à en construire pour le seul usage de mettre en défaut les raisonnements de nos pères. Darboux, qui, en 1875, avait utilisé des séries trigonométriques pour produire de nouveaux exemples et contre-

exemples [Dar], a bien compris la leçon : il se tourne vers la géométrie la plus classique. En vérité, depuis 1873, le programme légué par Dirichlet (montrer la convergence des séries de Fourier des fonctions continues) est infirmé par l'exemple de du Bois-Reymond ; l'impression, aggravée par des tentatives malheureuses comme celle de Boussinesq, sur laquelle le mieux est de jeter un voile pudique, est que les séries de Fourier sont le règne du bizarre, de l'incertain, du piégé. L'impression est aggravée par les constructions de fonctions continues sans dérivée au moyen de séries trigonométriques [Wei3][Dar]. Les séries trigonométriques semblent n'être bonnes qu'à produire des monstres. Pour ceux qui, malgré tout, s'y intéressent, des questions étranges apparaissent. N'y aurait-il pas des fonctions continues dont la série de Fourier diverge partout, comme il existe des fonctions continues partout non dérivables ? Fejér pose la question au début de sa thèse [Fej0, p. 95] et il n'y sera répondu qu'en 1966, négativement, par le théorème de Carleson [Car]. La série de Fourier ne peut-elle converger sans représenter la fonction, comme c'est le cas pour les séries de Taylor de certaines fonctions indéfiniment dérivables ? Minkowski, paraît-il, a posé cette question [Fej0, p. 26]. En fait, il est aisé d'y répondre en lisant le cours de Picard, mais Picard ignore sans doute la question de Minkowski, et Minkowski le chapitre de Picard sur les séries trigonométriques. Le chapitre, d'ailleurs, n'est qu'un sous-produit de l'étude du problème de Dirichlet pour le cercle, que Picard traite après le problème de Dirichlet pour la sphère : signe des priorités du temps.

La situation se modifie radicalement, au début du siècle, avec les deux notes aux Comptes-Rendus de Fejér [Fej1] et de Lebesgue [Leb1] et les travaux qui suivent.

Fejér, toute sa vie, en commençant son cours sur les séries de Fourier, écrivait en toutes lettres la référence à sa note "Sur les fonctions bornées et intégrables". Certes on aurait dû savoir, par des travaux antérieurs, qu'il fallait, au lieu de la convergence, considérer la sommabilité des séries de Fourier ; cependant c'est bien la note de Fejér, par sa simplicité inattendue, qui met le fait en pleine lumière. Il y a déjà, en 1900, une vaste littérature sur les procédés de sommation. Fejér vient de passer une année à Berlin, où il a suivi des cours de L. Fuchs, de G. Frobenius et de H. A. Schwarz ; il s'est initié aux travaux de Frobenius et de Cesaro sur les procédés de sommation. Cependant, au tout début de sa thèse, à qui rend-il hommage pour l'introduction de ce point de vue dans l'analyse ? A Poincaré, Stieltjes et surtout à Borel [Fej0, p. 94]. C'est ainsi que les travaux des mathématiciens français sur le prolongement analytique des séries de Taylor et des séries de Dirichlet ont eu une influence directe sur l'introduction explicite des procédés de sommation dans la théorie des séries de Fourier.

Dans le livre de Hobson de 1907 sur la théorie des fonctions d'une variable réelle et des séries de Fourier [Hob], la théorie de l'intégration de Lebesgue apparaît déjà comme le cadre naturel de l'analyse de Fourier. La portée de l'intégrale de Lebesgue ne peut pas être surestimée. Comme on sait, Lebesgue



a été influencé par Borel pour la mesure et par Baire pour les fonctions. Cependant son intégrale apparaît comme un point de départ. Et, d'emblée, son impact dans l'analyse se fait par l'intermédiaire des séries de Fourier.

Lebesgue a consacré aux séries de Fourier, juste après sa thèse, une série de notes et d'articles [Leb1 à 6], et le livre qui rassemble les leçons professées au Collège de France en 1904 - 1905 dans le cadre du cours Peccot "*Leçons sur les séries trigonométriques*" [Leb7]. Dès la première note [Leb1] il établit un théorème frappant : si une série trigonométrique converge partout vers une fonction bornée, ses coefficients sont donnés par les formules de Fourier, où l'intégrale est entendue au sens de Lebesgue. Dès lors, Lebesgue est bien fondé, comme il le fait dans les "*Leçons*", à définir comme séries de Fourier les séries trigonométriques dont les coefficients sont obtenus par les formules de Fourier à partir d'une fonction  $2\pi$ -périodique localement sommable (c'est-à-dire intégrable en son sens). Le principal héritage de cette note allait être la seconde théorie de la totalisation de Denjoy, qui permet de calculer (au moyen de la "totale" ou intégrale de Denjoy) les coefficients d'une série trigonométrique partout convergente quand la somme est donnée [Den]. A la fin de la note [Leb1], Lebesgue fait une erreur qu'il rectifie dès l'article suivant [Leb2] et qui, elle aussi, a un héritage fructueux. Utilisant la théorie de Cantor, il observe que son résultat (calcul des coefficients par les formules de Fourier) est encore valable si l'ensemble où la série diverge est réductible (nous dirions aujourd'hui : contenu dans un compact dénombrable), et il ajoute qu'il subsiste lorsque cet ensemble est de mesure nulle. Il en résulterait que tout ensemble de mesure nulle est un ensemble d'unicité au sens de la théorie de Cantor. Cela n'a été infirmé que bien plus tard, en 1916, par Menchoff [Men] ; à partir de là, la distinction, parmi les ensembles de mesure nulle, entre "ensembles d'unicité" et "ensembles de multiplicité" est devenu un des grands problèmes de la théorie des séries trigonométriques (pour une revue du sujet, voir [Sal] et [Kech]).

L'article qui suit [Leb2] abonde en idées, en exemples et en théorèmes, tout en se cantonnant, pour l'essentiel, aux fonctions bornées. Il résume d'abord, en deux pages, les théories de la mesure et de l'intégration. Puis il indique son propos : "*appliquer la notion d'intégrale à l'étude du développement trigonométrique des fonctions non intégrables au sens de Riemann*". Il donne un exemple de fonction non intégrable au sens de Riemann, et cependant représentable par une série trigonométrique partout convergente, puis de nouveaux critères de convergence, fondés sur ce qu'on appelle aujourd'hui le théorème de Riemann-Lebesgue (les coefficients de Fourier d'une fonction intégrable tendent vers 0), et enfin la version correcte de [Leb1] : "*lorsqu'une fonction bornée admet un développement trigonométrique pour toutes les valeurs de la variable, sauf peut-être pour certaines valeurs formant un ensemble réductible, c'est la série de Fourier*".

Je passe sur tous les autres articles de Lebesgue, pour dire quelques mots de ses "*Leçons sur les séries trigonométriques*". On ne peut lire ces leçons sans penser à la thèse de Riemann. Comme Riemann, Lebesgue commence par définir son

intégrale, puis il brosse une histoire des séries trigonométriques, puis il développe ses méthodes. Dans les "Leçons", les fonctions intégrables apparaissent sous leur forme actuelle (elles ne sont pas nécessairement bornées). La définition de l'intégrale prend deux pages (pp. 10-11). Puis on trouve le "théorème de convergence dominée" (p. 14) et le théorème de continuité de la translation dans  $L^1$ , exprimé sous la forme

$$\int |f(x+\delta) - f(x)| dx \text{ tend vers } 0 \text{ quand } \delta \text{ tend vers } 0 \text{ (p. 15).}$$

C'est, à ma connaissance, le premier exposé des gros outils de la nouvelle théorie. Les leçons sont d'une merveilleuse richesse, même dans les premières pages. L'influence est immédiate et profonde, et se traduit par l'acceptation générale de la terminologie de Lebesgue : "séries de Fourier" signifie "séries de Fourier-Lebesgue" dans tous les ouvrages qui suivent sur les séries trigonométriques, notamment [Hob], [Zyg]. J'aurai cependant à nuancer ce propos en ce qui concerne l'influence en France ; j'y reviendrai dans un instant.

Comme test d'influence je me limiterai à l'égalité de Parseval

$$\frac{1}{2\pi} \int |f|^2 = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

qu'aujourd'hui, avec les coefficients de Fourier complexes et la normalisation convenable nous écrivons

$$(2) \quad \int |f|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2.$$

Je me permets le léger anachronisme de la discuter sous la forme (2). Nous l'avons vu apparaître chez Hugoniot et Halphen, puis chez la Vallée Poussin et Hurwitz. A la suite d'Hurwitz, E. Fischer en donne deux nouvelles démonstrations, et, sous la variante

$$(3) \quad \int f\bar{g} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \bar{d}_n$$

(écriture moderne) il l'appelle "Fundamentalsatz der Fourierschen Konstanten".

Or c'est l'intégrale de Lebesgue qui fournit le cadre naturel pour la formule (2). Etant donné  $f$  de carré intégrable sur un intervalle de période, et  $(c_n)$  la suite de ses coefficients de Fourier, on a (2) en toute généralité. Le théorème est énoncé pour la première fois dans la thèse de Fatou ([Fat], p. 379), et Lebesgue le désigne comme théorème de Parseval-Fatou dans sa notice de 1922 ([Leb0], I, p. 132).

Mais il y a mieux : on peut lire (2) dans les deux sens. Etant donné une suite  $(c_n)$  de carré sommable, c'est la suite des coefficients de Fourier d'une fonction  $f$  telle que (2) ait lieu. Comme le dit plaisamment F. Riesz [Rie2], la transformation de Fourier fournit un billet aller-retour permanent entre les suites de carré sommable et les fonctions de carré intégrable. La clé de ce théorème est la complétion de  $L^2$ . Deux preuves indépendantes en ont été données, à quelques semaines d'intervalle, dans les *Comptes Rendus*, par F. Riesz et par E. Fischer

(bien préparé par ses cogitations sur le Fundamentalsatz). Dans les deux articles, le cadre est élargi à des systèmes orthonormaux (pour aller des  $(c_n)$  à  $f$ , la totalité n'est pas requise). Riesz part des séries de Fourier, Fischer développe d'emblée la théorie des espaces de Hilbert, et c'est sans doute l'acte de naissance de l'approche géométrique des espaces de Hilbert [Rie1], [Fis2].

Il y aurait beaucoup à dire de l'influence de Lebesgue à travers ses leçons, et de Fatou à travers sa thèse, qui exploite la relation profonde entre séries de Fourier, séries de Fourier conjuguées, et comportement d'une série de Taylor au voisinage du cercle de convergence. Cette influence est éclatante quand on consulte le rapport de Plancherel [Pla] ou le livre de Zygmund [Zyg]. Elle va d'ailleurs plus loin ; elle a contribué à changer toute l'analyse réelle et une partie de l'analyse complexe, à fonder l'analyse fonctionnelle, à fournir le cadre pour les probabilités. On peut dire qu'elle a été immédiate et dans tout l'Europe, à une exception près.

L'exception, c'est la France. Sauf Denjoy, Lebesgue et Fatou n'ont pas d'héritier direct. Leur influence s'exerce en France à travers les travaux hongrois, russes, anglais. Les grands traités d'analyse français — au contraire du livre de Hobson [Hob] et du cours d'analyse de la Vallée Poussin [Val3] — ignorent l'intégrale de Lebesgue. La responsabilité en revient d'abord à Lebesgue, et à son souci, d'ailleurs légitime, de ne pas décoller de l'analyse classique. Il s'en explique dans sa notice de 1922 [Leb0, I] : *"il ne faut pas qu'une analyse dissidente grandisse en voulant ignorer l'analyse classique ; il faut que celle-ci s'incorpore les plus féconds résultats des recherches récentes"*. Résultat : alors que la théorie des séries trigonométriques, en se renouvelant, inspire les plus grands analystes et probabilistes (disons, pour me borner à trois noms, Hardy, Kolmogorov, Wiener), elle est presque ignorée en France. Plus grave, l'intégrale de Lebesgue est absente des cours des Facultés et du Collège de France jusque vers 1950. Sur plus de 200 références données par Plancherel en 1924 [Pla], seulement 14 françaises (6 de Lebesgue, 3 de Fatou, 3 de Denjoy, 2 de Kogbetliantz). En 1959, dans la référence fondamentale sur les séries trigonométriques qu'est le livre de Zygmund, et malgré la place occupée par Salem, la proportion est encore plus faible.

## Les séries de Taylor

La thèse de Fatou que je viens de mentionner, "Séries trigonométriques et séries de Taylor" a pour sources la théorie de la mesure et la représentation d'une fonction au moyen des sommes d'Abel-Poisson (formule (1)). C'est dans cette thèse que se trouve le "lemme de Fatou"  $\int \lim \leq \lim \int$  ([Fat], p. 375), le "théorème de Fatou" sur les limites non-tangentes des fonctions analytiques bornées dans le disque en presque tout point de la frontière (p. 364), le théorème de Parseval-Fatou dont il donne un historique (pp. 352, 379), la stabilité par conjugaison des classes de Lipschitz-Hölder qui annonce les travaux de Marcel Riesz (p. 363), une étude des séries de Taylor à coefficients entiers qui annonce, entre autres, les travaux de PÓlya et de Salem (p. 371), la convergence des séries de Taylor dont les coefficients tendent vers 0 en tout point régulier du cercle unité (p. 389), et une foule de remarques et de problèmes sur les séries trigonométriques et les séries de Taylor, qui ont inspiré, entre autres, Denjoy, Steinhaus, Kolmogorov (pp. 395-400).

Cette thèse, dont le retentissement mondial et durable est considérable, connaît en France le sort de son auteur : elle est insuffisamment appréciée et insuffisamment connue. A vrai dire, à part quelques pages (p. 371 et voisines) et quelques lignes à la fin, elle ne s'inscrit pas dans la problématique dominante en France : lien entre une série de Taylor et la nature des singularités de la fonction représentée.

Dans les années 1880-1900, et particulièrement dans la décennie 1890-1900, cette problématique anime en France de nombreux mathématiciens, et des plus grands : Poincaré, Hadamard, Borel. Selon Poincaré, son promoteur est Weierstrass et sa conception du prolongement analytique [Poi7] : *"conception nouvelle qui a son origine dans les travaux de Cauchy et que M. Weierstrass a si clairement exposé dans son mémoire "Zur Functionenlehre" (Monatsberichte, août 1880, p. 12)"*. Je renvoie à [HM] et [Bie] pour une analyse détaillée des principaux travaux de cette période. Je me limiterai à quelques travaux de Poincaré, d'Hadamard et de Borel, intimement liés au prolongement analytique des séries de Taylor, en raison de leur influence, qui va bien au delà de la théorie des fonctions d'une variable complexe.

Dans l'analyse que fait Darboux des travaux scientifiques de Poincaré ([Poi0, II], p. XXI), il parle d'abord de sa thèse, soutenue le 1er août 1879 après les corrections imposées par le rapporteur, et précise que *"sa thèse se recommande par plusieurs notions nouvelles et importantes. J'en citerai deux seulement : celle des fonctions à espaces lacunaires, qui avaient beaucoup frappé Hermite, et celle des fonctions algébroides, qui est appelée à jouer en analyse un rôle des plus essentiels"*.

La notion d'espace lacunaire se rattache précisément au prolongement analytique selon Weierstrass. Les "espaces lacunaires" sont les espaces auquel se heurte le prolongement : leur bord est pour la fonction une coupure essentielle. C'est pour construire des fonctions admettant des "espaces lacunaires" donnés — nous dirions aujourd'hui, en passant au complémentaire, un domaine

d'existence donné — que Poincaré développe sa méthode des séries de fractions rationnelles

$$\sum A_n(x-a_n)^{-1},$$

qui sont le cœur de son article de 1892. A l'occasion du prolongement analytique hors du disque unité, il observe, sans donner de preuve ni de référence, que la série  $\sum z^{-n}x^{3^n}$ , n'est pas prolongeable, c'est à dire que le cercle unité est une coupure essentielle [Poi7].

La thèse d'Hadamard est un "Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor" et elle date de 1892 comme l'article de Poincaré [Had2]. Elle a été précédée, en 1888, d'une note "sur le rayon de convergence des séries ordonnées suivant les puissances d'une variable" où se trouve la célèbre formule  $R = (\overline{\lim} |a_n|^{1/n})^{-1}$ , et aussi la correction d'un énoncé incorrect de Lecornu paru en 1887, sur la localisation des points singuliers. Ainsi, par l'intermédiaire du jeune Hadamard, la faute de Lecornu a joué dans l'histoire du sujet un rôle plus important que ses résultats. La thèse reprend le calcul du rayon de convergence et montre comment il permet la détection des singularités (détection que S. Mandelbrojt a précisée en donnant une formule pour l'argument du point singulier sur le cercle de convergence le plus proche de  $R$ ). Elle donne l'exemple  $1 - bx^c + \dots - b^v x^{c^v} + \dots$ , attribué à Weierstrass, et le généralise sous la forme suivante : "la série  $\sum b_\mu x^{c_\mu}$ , admet son cercle de convergence comme ligne singulière si le rapport  $(c_{\mu+1} - c_\mu) / c_\mu$  est constamment supérieur à un nombre fixe  $s$ " ( $>1$ ). Ce théorème est loin de l'hypothèse minimale (Fabry a montré que la conclusion subsiste sous la seule hypothèse  $\lim (c_\mu / \mu) = \infty$ ). Mais l'hypothèse est restée dans la littérature comme la "condition de lacunarité d'Hadamard". L'essentiel de la thèse porte ensuite sur la détection des pôles au moyen des "déterminants d'Hadamard", et sur le comportement comparé de la suite des coefficients de Taylor, et de la fonction au voisinage du cercle de convergence. C'est un peu plus tard, en 1897, qu'Hadamard publie son célèbre théorème de composition des séries entières : les points singuliers d'une fonction  $\sum a_n b_n x^n$  ne peuvent être que de la forme  $\alpha\beta$ , où  $\alpha$  est point singulier de la fonction  $\sum a_n x^n$  et  $\beta$  de la fonction  $\sum b_n x^n$  [Had4]. Ce théorème est le point de départ de très nombreux travaux sur les singularités des fonctions représentées par des séries de Taylor ou de Dirichlet, en particulier de S. Mandelbrojt [Bie].

La thèse de Borel date de 1895 [Bor2] et elle est résumée en une note [Bor1]. Elle est directement inspirée par l'article [Poi7] de Poincaré. Son premier objet est de montrer que, dans certains cas, une fonction analytique peut se prolonger de façon naturelle au delà d'une coupure essentielle ; et ce sont les séries de fractions rationnelles utilisées par Poincaré pour démontrer le non-prolongement qui lui servent d'exemple de base pour établir la possibilité du prolongement. Sans avoir d'incidence directe sur la théorie à venir des fonctions quasi-analytiques, l'approche de Borel a stimulé l'intérêt de Denjoy, l'un des pères de la quasi-analyticité, et l'intérêt de Denjoy pour les méthodes de Borel ne s'est jamais démenti (j'en ai le souvenir personnel, lors de la soutenance de ma thèse). Ensuite, et comme application des "fonctions à espace lacunaire",

Borel établit que toute fonction de classe  $C^\infty$  sur  $[-\pi, \pi]$  peut s'écrire comme somme d'une série de Fourier et d'une série de puissances et montre en passant que toute série entière est la série de Taylor d'une fonction de classe  $C^\infty$ . C'est à la fin de cette thèse [Bor0, I, p. 281] que se trouve la première version du théorème de recouvrement qu'on a appelé théorème de Borel-Lebesgue ou théorème de Heine-Borel. Voici comment Borel, dans sa Notice de 1912 [Bor0, I, p. 146] apprécie ces premiers travaux sur les séries de fractions rationnelles : *"c'est cette étude qui a été l'origine de la plupart de mes recherches sur les ensembles et sur les variables réelles"*.

Dans la même notice, c'est dans le chapitre "fonctions d'une variable complexe", et plus précisément en relation avec le prolongement analytique des fonctions représentées par des séries de Taylor qu'on voit apparaître les procédés de sommation de Borel et la théorie des séries divergentes, dont j'ai eu l'occasion de dire l'influence sur le jeune Fejér. Il se réfère à la thèse d'Hadamard, aux déterminants d'Hadamard, au théorème sur la composition des singularités, pour obtenir de nouveaux résultats sur les singularités des séries de Taylor. Il introduit une "méthode nouvelle", "la considération de la fonction entière associée à une série de Taylor donnée", qui est essentiellement ce que nous appelons aujourd'hui transformation de Borel. Et il ajoute ceci, qui me semble mériter commentaire [ibid p. 154] :

*"un résultat qui me paraît plus important est le suivant : une série de Taylor admet, en général, son cercle de convergence comme coupure."*

Borel a consacré à ce sujet une note et un article développé [Bor3][Bor4]. Voici ce qu'il en dit dans sa Notice :

*"La difficulté principale était d'en préciser le sens avant d'en donner la démonstration... On peut partager la série en une infinité de groupes successifs de termes et, à chaque groupe, faire correspondre un point du cercle de convergence qui ne dépend que des coefficients de ce groupe ; ces points forment un ensemble  $E$  ; tout point de l'ensemble dérivé  $E'$  est un point singulier. Il est clair, dès lors, que si les coefficients successifs sont choisis au hasard, c'est-à-dire d'une manière indépendante des coefficients précédents, la probabilité pour que l'ensemble  $E$  soit dense sur tout le cercle est égale à l'unité."*

Cette dernière phrase n'est pas soulignée par Borel, mais par moi. C'est à l'occasion du prolongement analytique des séries de Taylor que Borel développe ses idées probabilistes. Voici, par exemple, l'énoncé primitif du "lemme de Borel-Cantelli [Bor4]" :

*«On a donc sur le cercle une infinité d'arcs indépendants, dont la somme dépasse tout nombre donné, donc, en général, tout point du cercle appartiendra à une infinité d'arcs.»*

L'héritage de cette phrase est considérable. Implicitement, la probabilité  $y$  apparaît comme fonction totalement additive des événements. Mais la probabilité  $y$  est donnée par l'intuition, non construite. On sait que la première construction d'espaces probabilisés répondant à l'axiomatique des probabilités

a été l'oeuvre de Kolmogorov en 1933. Cependant le lien entre probabilités et mesure de Lebesgue était apparu, déjà, dans les travaux de Wiener sur le mouvement brownien, et, de façon plus nette encore, dans l'article que Steinhaus consacre aux séries de Taylor aléatoires à la Borel (en considérant les phases comme équidistribuées et indépendantes, et les modules des coefficients comme donnés). Pour une description de l'approche de Steinhaus, reprise ensuite par Paley et Zygmund, et aussi pour les problèmes de recouvrement du cercle par des arcs aléatoires indépendants, je renvoie aux deux éditions de mon livre *Some random series of functions* [Kah1]. L'assertion de Borel a été largement commentée, illustrée (voir par exemple les dernières lignes de la thèse de Fatou), critiquée, car elle est, dans la terminologie actuelle, formellement incorrecte. Mon propos était de montrer son rôle séminal dans la théorie des probabilités.

## Les séries de Dirichlet

Je me contenterai d'illustrer à propos des séries de Dirichlet le thème des fautes stimulantes. Je pense à une faute de Stieltjes et à une faute de Cahen.

En 1885, sous le titre anodin "Sur une fonction uniforme" [Sti1] annonce la solution de l'hypothèse de Riemann : tous les zéros de la fonction  $\zeta(s)$  se trouvent sur la droite  $\operatorname{Re} s = 1/2$ . Comptant lui attribuer le prix, L'Académie des Sciences met au concours l'étude de  $\pi(x)$ , nombre des nombres premiers inférieurs à  $x$ . Mais la preuve de l'assertion de Stieltjes tarde à venir, et le Grand Prix des Sciences Mathématiques va à Hadamard pour sa thèse (1892), dans laquelle se trouve précisée l'allure des modules des zéros de  $\zeta(s)$  [Had2]. Quelques années plus tard (1896), Hadamard (comme, indépendamment, la Vallée Poussin) établit une version faible de l'hypothèse de Riemann (pas de zéro sur la droite  $\operatorname{Re} s = 1$ ) et en tire le grand théorème des nombres premiers  $\pi(x) \sim \operatorname{li} x$  [Had3].

La note de Stieltjes inspire également un ingénieur des téléphones de Copenhague, J.L.W.V. Jensen, auquel on doit déjà la formule mentionnée dans l'introduction [Jen1]. Prenant pour acquise l'assertion de Stieltjes, il détermine la position des premiers zéros de  $\zeta(s)$  sur la droite critique [Jen2], et donne une démonstration élémentaire (non fondée sur l'équation fonctionnelle) que  $(1-s)\zeta(s)$  est une fonction entière. Cette note sera fréquemment citée par Harold Bohr comme source d'inspiration.

Stieltjes lui-même s'intéresse aux séries de Dirichlet. Pour obtenir des résultats sur les nombres premiers à partir de l'hypothèse de Riemann — crue démontrée — il avait besoin de multiplier des séries de Dirichlet. Et il énonce un résultat curieux : si les deux séries  $\sum a_n n^{-s}$  et  $\sum b_n n^{-s}$  sont convergentes pour  $\sigma = \operatorname{Re} s > 0$ , la série produit  $\sum c_n n^{-s}$  (avec  $c_n = \sum_{jk=n} a_j b_k$ ) est convergente pour  $\sigma > 1/2$  [Sti2]. L'héritage de cet énoncé est important, par l'intermédiaire d'une faute de Cahen.

La thèse d'E. Cahen est consacrée aux séries de Dirichlet, et elle introduit des formules devenues classiques sur les abscisses de convergence de différents types en fonction des coefficients [Cah]. Cahen cherche aussi à étendre le théorème de Stieltjes sur la multiplication, et croit montrer que la série produit est nécessairement convergente pour  $\sigma > 0$ . Pour apprécier le rôle de Cahen, on peut consulter l'aperçu historique que donne E. Landau de la théorie des séries de Dirichlet [Lan], pp. 723-724.

Après la thèse de Cahen et les articles d'Hadamard et La Vallée Poussin de 1896, le sujet des séries de Dirichlet reste en latence jusque vers 1907. Il se produit alors un brusque regain d'intérêt pour le thème. Cela commence par un long article d'Edmund Landau sur la multiplication des séries de Dirichlet [Lan2], où il donne la première preuve publiée de l'énoncé de Stieltjes, et montre la fausseté de l'assertion de Cahen : il existe un  $\varepsilon > 0$  et deux séries  $\sum a_n n^{-s}$  et  $\sum b_n n^{-s}$  convergentes pour  $\sigma > 0$ , telles que la série produit  $\sum c_n n^{-s}$  soit divergente pour  $\sigma = \varepsilon$ . Le sujet donne matière à controverse : les *Rendiconti* de Palerme publient en 1908 deux articles d'Hadamard [Had5] et un de Landau sur les séries de Dirichlet [Lan2] (voir [Had0, I]). En 1908 encore, O. Perron fait une revue du sujet [Per], W. Schnee écrit sa thèse [Sch1] et indique une relation importante entre l'ordre et la convergence [Sch1][Sch2], E. Lindelöf, à propos de la fonction  $\zeta(s)$ , introduit et étudie la fonction

$$\mu(\sigma) = \inf\{a \mid f(\sigma + it) = O(t^a)\} \quad (t \rightarrow \infty) \quad [\text{Lin}].$$

En 1909, Marcel Riesz publie aux *Comptes Rendus* trois notes de grande portée, toutes sur les séries de Dirichlet. Enfin Harald Bohr commence l'année par une note aux *Comptes Rendus* [Boh1], et la termine avec la soutenance de sa thèse, sur les séries de Dirichlet [Boh2].

L'histoire des séries de Dirichlet se poursuit ensuite avec, notamment, G. Hardy, J. Littlewood, G. Polya, A. Ostrowski, V. Bernstein, S. Mandelbrojt, inspirée tantôt par la théorie des nombres, tantôt par la théorie des fonctions. Je m'attarderai un instant sur la thèse de Bohr. Bohr avait lu Landau et connaissait l'histoire du problème de la multiplication des séries de Dirichlet, la part qu'y avaient prise Stieltjes, Cahen et Landau lui-même. Restait une question : dans l'énoncé de Landau, corrigeant celui de Cahen, quelle est la borne supérieure des  $\varepsilon$  ? D'après Stieltjes, c'est au plus  $1/2$ . Un des résultats de la thèse de Bohr dit que c'est exactement  $1/2$ . Bohr y attachait un prix particulier, comme le montre l'article qu'à la fin de sa vie il consacrait à la multiplication des séries de Dirichlet [Boh3]. La méthode de Bohr consiste à construire une série de Dirichlet dont la fonction de Lindelöf  $\mu(\sigma)$  est convenable fixée. En fait, tout le reste de la thèse de Bohr est consacrée à la relation entre  $\mu(\sigma)$  et les propriétés de sommabilité de la série en un point  $s = \sigma + it$ . Ce sujet n'est pas encore épuisé [Kah2]. En fait, la multiplication des séries de Dirichlet est le sujet d'un travail tout récent (inédit) de H. Delange et G. Tenenbaum.



## Sur l'impact des imprudences

Il est paradoxal de mesurer l'influence des mathématiciens à la portée de leurs fautes, et il serait très injuste de ne considérer Stieltjes et Cahen que sous ce rapport. Mais il est exact que certaines fautes, de par la personnalité de leurs auteurs, ou par la subtilité des arguments mis en jeu, ont un rôle stimulant. Pour qui s'intéresse à l'évolution des sujets et des modes en mathématiques, c'est un facteur à ne pas négliger. Il nous suffit, une fois de plus, de nous référer à Lebesgue dans son discours de Cracovie en 1938 [Leb0]. Ayant d'abord rendu hommage à "Cantor, Dini, Jordan, Borel et tant d'autres" qui lui ont préparé "une récolte que je n'eus qu'à moissonner", voici la double "chance" dont il se dit bénéficiaire : "Si j'eus la chance de trouver, j'eus aussi la chance de me tromper, de faire de grosses fautes qui furent des points de départ."

Naturellement, Lebesgue pense en premier lieu à la projection des ensembles mesurables, et à ce qui devait devenir la théorie des ensembles analytiques. Ne pense-t-il pas aussi à sa première note sur les séries trigonométriques, et au membre de phrase imprudent qu'allait infirmer la découverte d'ensembles de multiplicité de mesure nulle ? Et n'est-il pas vrai que, dans la modestie outrée de sa formule, il pouvait avoir en tête, dans le seul champ des séries trigonométriques, de Fourier à Cauchy, de Cauchy à Dirichlet, de Dirichlet à Jordan, l'exemple d'imprudences et de fautes d'éminents mathématiciens qui furent des points de départ de travaux éminents ?

## Références

- [Bie] L. BIEBERBACH *Analytische Fortsetzung*. Springer-Verlag 1955.
- [Boh1] H. BOHR Sur la série de Dirichlet, *C. R. Acad. Sc. Paris* 148 (1909), 75-80 (I A1 in Collected Mathematical Works).
- [Boh2] H. BOHR *Bidrag til de Dirichlet'ske Raekkers Theori*, Dissertation, KoBenhavn 1910. (I A3 and III S1 in CMW).
- [Boh3] H. BOHR On multiplication of summable Dirichlet series, *Math. Tidsskr.* 1950, 71-75 (I A19 in CMW).
- [Boi] P. du BOIS-REYMOND Détermination de la valeur limite d'une intégrale qui se présente dans la théorie des séries trigonométriques, *Bull. Sc. Math.* (2), 3 (1879), 343-352.
- [Bon] O. BONNET Note sur la formule qui sert de fondement à une théorie des séries trigonométriques, *Bull. Sc. Math.* (2), 3 (1879), 480-484.
- [Bor0] E. BOREL *Oeuvres*.
- [Bor1] E. BOREL Sur quelques points de la théorie des fonctions, *C. R. Acad. Sc. Paris* 118 (12 février 1894), 340-342.
- [Bor2] E. BOREL Sur quelques points de la théorie des fonctions, *Ann. Sc. Ec. Norm. Sup.* 12 (1895), 9-55.

- [Bor3] E. BOREL Sur les séries de Taylor, *C. R. Acad. Sc. Paris* 123 (décembre 1896), 1051-1052.
- [Bor4] E. BOREL Sur les séries de Taylor, *Acta Math.* 20 (1897), 243-247.
- [Bou] J. BOUSSINESQ Coup d'oeil sur la théorie générale des séries trigonométriques et sur une raison naturelle de leur convergence, *J. Math. Pures et Appl.* (3), 7 (1881), 147-160.
- [Cah] E. CAHEN Sur la fonction  $\zeta(s)$  et sur des fonctions analogues, *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.* 11 (1894), 75-164.
- [Can] G. CANTOR Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, *Math. Ann.* 5 (1872), 123- (Traduction française: extension d'un théorème de la théorie des séries trigonométriques, dans *Acta Mathematica*, t. 2 (1883), où d'autres articles de Cantor sont réunis).
- [Car] L. CARLESON On convergence and growth of partial sums of Fourier series, *Acta Math.* 116 (1966), 249-304.
- [Dar] J. DARBOUX Mémoire sur les fonctions discontinues, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.* (2) 4 (1875).
- [Den] A. DENJOY *Leçons sur le calcul des coefficients d'une série trigonométrique.* 5 vol. Paris, Gauthier-Villars, 1941-1949.
- [Fat] P. FATOU Séries trigonométriques et séries de Taylor, *Acta Math.* 30 (1906), 335-400.
- [Fej0] L. FEJER *Gesammelte Arbeiten*, I.
- [Fej1] L. FEJER Sur les fonctions bornées et intégrables, *C. R. Acad. Sc. Paris* 131 (1900), 984-987.
- [Fis1] E. FISCHER Zwei neue Beweise für den Fundamentalsatz der Fouriersche Konstanten, *Monatshefte für Math. und Physik* 15 (1904), 69-92.
- [Fis2] E. FISCHER Applications d'un théorème sur la convergence en moyenne, *C. R. Acad. Sc. Paris* 144 (mai 1907).
- [Gis] H. GISPERT Sur les fondements de l'analyse en France, *Archive for History of Exact Sciences* 28, 1 (1983), 37-106.
- [Had0] J. HADAMARD *Oeuvres*.
- [Had1] J. HADAMARD Sur le rayon de convergence des séries ordonnées suivant les puissances d'une variable, *C. R. Acad. Sc. Paris*, 23 janvier 1888.
- [Had2] J. HADAMARD Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor (thèse), *J. Math. Pures et Appl.* (4) 8 (1892).
- [Had3] J. HADAMARD Sur la distribution des zéros de la fonction  $\zeta(s)$  et ses conséquences arithmétiques, *Bull. Soc. Math. France* 24 (1896), 186-187.
- [Had4] J. HADAMARD Théorème sur les séries entières, *Acta Math.* 22 (1897-1899), 55-64.
- [Had5] J. HADAMARD Sur les séries de Dirichlet, *Rendiconti del Circ. Matem. Palermo* 25 (1908), 326-330, 395-396.

- [HM] J. HADAMARD & S. MANDELBROJT La série de Taylor et son prolongement analytique, *Scientia*, Paris, Gauthier- Villars, 1926.
- [Hal] G. HALPHEN Sur une série de Fourier, *C. R. Acad. Sc. Paris* 95 (1882), 1217-1219. (Oeuvres, tome 2).
- [Her] C. HERMITE Sur la série de Fourier..., *C. R. Acad. Sc. Paris* 61 (1880), 1018 (Oeuvres, vol. 4).
- [HS] C. HERMITE & T. J. STIELTJES *Correspondance, II*. Paris, Gauthier-Villars, 1905.
- [Hob] E. W. HOBSON *The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier series*, Cambridge 1907.
- [Hug] H. P. HUGONOT Sur le développement d'une fonction en série d'autres fonctions, *C. R. Acad. Sc. Paris* 95 (1882), 90
- [Hur1] A. HURWITZ Sur le problème des isopérimètres, *C. R. Acad. Sc. Paris* 132 (1901), 401-403 ; Sur les séries de Fourier, *C. R. Acad. Sc. Paris* 132 (1901), 1473-1475.
- [Hur2] A. HURWITZ Ueber die Fourierschen Konstanten integrierbarer Funktionen, *Math. Ann.* 57 (1903), 425-446 (Math. Werke, I).
- [Jen1] J. L. W. V. JENSEN Om Raekkers Konvergens, *Tidssk. for Math.* 5, vol. 2 (1884), 7
- [Jen2] J. L. W. V. JENSEN Sur la fonction  $\zeta(s)$ , *C. R. Acad. Sc. Paris* 104 (1887), 1156-1159.
- [Jor] C. JORDAN Sur la série de Fourier, *C. R. Acad. Sc. Paris* 92 (1881), 228-230.
- [Kah1] J.-P. KAHANE *Some random series of functions*. 1ère édition, Heath (1968) ; 2ème édition, Cambridge University Press (1965).
- [Kah2] J.-P. KAHANE Around Bohr's thesis, *The Harald Bohr Centenary*. Copenhagen 1989.
- [Kech] A. KECHRIS & A. LOUVEAU Descriptive set theory and the structure of sets of uniqueness, *London Math. Soc.*, Lecture Notes 128 (1987).
- [Lan1] Ed. LANDAU *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, réimpression. Chelsea 1953.
- [Lan2] Ed. LANDAU Ueber die Multiplikation Dirichlet'scher Reihen, *Rendiconti del Circ. Matem. Palermo* 24 (1907), 81-160.
- [Leb0] H. LEBESGUE *Oeuvres Scientifiques*, I, p. 96.
- [Leb1] H. LEBESGUE Un théorème sur les séries trigonométriques, *C. R. Acad. Sc. Paris* 134 (1902), 585-587.
- [Leb2] H. LEBESGUE Sur les séries trigonométriques, *Ann. Sc. Ec. Norm. Sup.* 20 (1903), 453-485.
- [Leb3] H. LEBESGUE Sur une condition de convergence des séries de Fourier, *C. R. Acad. Sc. Paris* 140 (1905), 1378-1381.
- [Leb4] H. LEBESGUE Sur la divergence et la convergence non uniforme des séries de Fourier, *C. R. Acad. Sc. Paris* 141 (1905), 875-877.

- [Leb5] H. LEBESGUE Recherches sur la convergence des séries de Fourier, *Math. Ann.* 61 (1905), 251-280.
- [Leb6] H. LEBESGUE Sur la représentation trigonométrique approchée des fonctions satisfaisant à une condition de Lipschitz, *Bull. Soc. Math. France* 38 (1910), 184-210.
- [Leb7] H. LEBESGUE *Leçons sur les séries trigonométriques*, Paris, Gauthier-Villars, 1906.
- [Lec] L. LECORNU Sur les séries entières, *C. R. Acad. Sc. Paris* 104 (1887), 349-352.
- [Lin] E. LINDELOF Quelques remarques sur la croissance de la fonction  $\zeta(s)$ , *Bull. Sc. Math.* 2, vol. 32 (1908), 341-356.
- [Men] D. E. MENCHOFF Sur l'unicité du développement trigonométrique, *C. R. Acad. Sc. Paris* 163 (1916), 433-436.
- [Mer] Ch. MERAY *Nouveau précis d'analyse infinitésimale*, Paris, Gauthier-Villars, 1872; *Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale*, Paris, Gauthier-Villars, 1894.
- [Nic] J. NICOLAS Etude des fonctions de Fourier, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.* 2, 11 (1882).
- [Pap] A. B. PAPLAOUSKAS *Trigonometritcheskie riadi ot Eulera do Lebegua* (en russe). Moscou, Naouka, 1965.
- [Per] O. PERRON Zur Theorie der Dirichletschen Reihen, *Journal für die reine und angew. Mathematik* 134 (1908), 106-113.
- [Pic1] E. PICARD Sur la représentation approchée des fonctions, *C. R. Acad. Sc. Paris* 112 (1891), 183-186.
- [Pic2] E. PICARD *Traité d'analyse*, I. Paris, 1891.
- [Pla] M. PLANCHEREL Le développement de la théorie des séries trigonométriques dans le dernier quart de siècle, *l'Enseignement mathématique* 24 (1924-1925), 19-58.
- [Poi0] H. POINCARÉ *Oeuvres*
- [Poi1] H. POINCARÉ Sur les séries trigonométriques, *C. R. Acad. Sc. Paris* 95 (1882), 766-768 et 97 (1885), 588-590.
- [Poi2] H. POINCARÉ Sur la convergence des séries trigonométriques, *Bull. astron.* 1 (1884), 319-327.
- [Poi3] H. POINCARÉ Sur un moyen d'augmenter la convergence des séries trigonométriques, *Bull. astron.* 3 (1886), 521-528. (Oeuvres, tome 3).
- [Poi4] H. POINCARÉ Sur la divergence des séries trigonométriques, *C. R. Acad. Sc. Paris* 122 (1896), 497-499.
- [Poi5] H. POINCARÉ Sur la façon de grouper les termes des séries trigonométriques qu'on rencontre en mécanique céleste, *Bull. astron.* 15 (1898), 289-310 (Oeuvres, tome 7).
- [Poi6] H. POINCARÉ La logique et l'intuition dans la science mathématique, *l'Enseignement mathématique* I (1899), 157-162.
- [Poi7] H. POINCARÉ Sur les fonctions à espaces lacunaires, *Amer. J. Math.* 14 (1892), 201-221.

- [Rie1] F. RIESZ Sur les systèmes orthogonaux de fonctions, *C. R. Acad. Sc. Paris* 144 (mars 1907), 615-619.
- [Rie2] F. RIESZ L'évolution de la notion d'intégrale depuis Lebesgue, *Ann. Inst. Fourier* 1 (1949), p. 1.
- [Sal] R. SALEM *Oeuvres Mathématiques*, Paris, Hermann, p. 614.
- [Sch1] W. SCHNEE, Inauguraldissertation, Berlin 1908.
- [Sch2] W. SCHNEE Zum Konvergenzproblem der Dirichletschen Reihen, *Mathem. Annalen* 66 (1909), 337-349.
- [Schw] H. A. SCHWARZ Ueber die Integration der Differential-Gleichung  $\Delta u = 0$ , *J. reine und angew. Math.* 74 (1872). (Gesammelte Math. Abhand.)
- [Ser] J.-P. SERRE *Cours d'arithmétique*, Paris, Presses Universitaires de France, 1970.
- [Stä] P. STÄCKER *Ueber das Dirichlet'sche Integral*, Leipzig, Ber. Ges. Wiss. 53 (1901), 147.
- [Sti1] T. J. STIELTJES Sur une fonction uniforme, *C. R. Acad. Sc. Paris* 101 (1885), 153-154.
- [Sti2] T. J. STIELTJES Sur une loi asymptotique de la théorie des nombres, *C. R. Acad. Sc. Paris* 101 (1885), 153-154.
- [Val1] C. de la VALLEE POUSSIN Sur une démonstration des formules de Fourier généralisées, *Ann. Soc. Scient. Bruxelles* (première partie) 15 (1891), 39-41.
- [Val2] C. de la VALLEE POUSSIN Sur quelques applications de l'intégrale de Poisson, *Ann. Soc. Scient. Bruxelles* (deuxième partie) 17 (1893), 18-35.
- [Val3] C. de la VALLEE POUSSIN *Cours d'analyse infinitésimale*, Seconde édition. Louvain et Paris, 1912.
- [Wei1] K. WEIERSTRASS *Abhandlungen aus der Functionenlehre* (cité dans [HM]). Voir aussi : Zur Functionenlehre, *Monatsberichte*, août 1880 (cité par H. Poincaré [Poi7]).
- [Wei2] K. WEIERSTRASS Ueber die Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen reeller Argumente, Berlin, Königl. Akad. Wiss. 1885 (*Math. Werke*, vol. 3). Traduit dans le *J. de Math. Pures et Appl.* 4, 2 (1886), 105-138.
- [Wei3] K. WEIERSTRASS Ueber continuirliche Functionen eines reellen Arguments, die für keinen Werth des letzteren einen bestimmten Differentialquotienten besitzen, *Math. Werke* II, 71-74.
- [Zyg] A. ZYGMUND *Trigonometric series*, Cambridge Univ. Press 1959.

