

**408**

**ASTÉRISQUE**

**2019**

QUANTUM GROUPS AND QUANTUM COHOMOLOGY

Davesh MAULIK & Andrei OKOUNKOV

**SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE**

---

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 408, 2019

---

*Comité de rédaction*

Marie-Claude ARNAUD	Fanny KASSEL
Christophe BREUIL	Alexandru OANCEA
Damien CALAQUE	Nicolas RESSAYRE
Philippe EYSSIDIEUX	Sylvia SERFATY
Nicolas BURQ (dir.)	

*Diffusion*

Maison de la SMF	AMS
Case 916 - Luminy	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Providence RI 02940
France	USA
commandes@smf.emath.fr	<a href="http://www.ams.org">http://www.ams.org</a>

*Tarifs*

*Vente au numéro*: 45 € (\$ 67)

*Abonnement* Europe: 665 €, hors Europe: 718 € (\$ 1077)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

*Secrétariat*

Astérisque  
Société Mathématique de France  
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie  
75231 Paris Cedex 05, France  
Fax: (33) 01 40 46 90 96  
asterisque@smf.emath.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2019

*Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.*

ISSN: 0303-1179 (print) 2492-5926 (electronic)

ISBN 978-2-85629-900-5

doi:10.24033/ast.1074

Directeur de la publication: Stéphane Seuret

---

**408**

**ASTÉRISQUE**

**2019**

QUANTUM GROUPS AND QUANTUM COHOMOLOGY

Davesh MAULIK & Andrei OKOUNKOV

**SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE**

*Davesh Maulik*  
Department of Mathematics  
MIT  
77 Massachusetts Ave  
Cambridge MA 02138, USA

*Andrei Okounkov*  
Columbia University  
Mathematics Department  
Room 617, MC 4416  
2990 Broadway  
New York NY 10027, USA

---

*Mathematical Subject Classification (2010).* — 17B37, 14N35.

*Mots-clefs.* — Variétés carquois, groupes quantiques, cohomologie quantique,  $W$ -algèbres.

*Keywords.* — Quiver varieties, Quantum groups, Quantum cohomology,  $W$ -algebras.

# QUANTUM GROUPS AND QUANTUM COHOMOLOGY

par Davesh MAULIK & Andrei OKOUNKOV

**Abstract.** — In this paper, we study the classical and quantum equivariant cohomology of Nakajima quiver varieties for a general quiver  $Q$ . Using a geometric  $R$ -matrix formalism, we construct a Hopf algebra  $Y_Q$ , the Yangian of  $Q$ , acting on the cohomology of these varieties, and show several results about their basic structure theory. We prove a formula for quantum multiplication by divisors in terms of this Yangian action. The quantum connection can be identified with the trigonometric Casimir connection for  $Y_Q$ ; equivalently, the divisor operators correspond to certain elements of Baxter subalgebras of  $Y_Q$ . A key role is played by geometric shift operators which can be identified with the quantum KZ difference connection.

In the second part, we give an extended example of the general theory for moduli spaces of sheaves on  $\mathbb{C}^2$ , framed at infinity. Here, the Yangian action is analyzed explicitly in terms of a free field realization; the corresponding  $R$ -matrix is closely related to the reflection operator in Liouville field theory. We show that divisor operators generate the quantum ring, which is identified with the full Baxter subalgebras. As a corollary of our construction, we obtain an action of the  $W$ -algebra  $\mathcal{W}(\mathfrak{gl}(r))$  on the equivariant cohomology of rank  $r$  moduli spaces, which implies certain conjectures of Alday, Gaiotto, and Tachikawa.

**Résumé. (Groupes quantiques et cohomologie quantique)** — Dans cet article, nous étudions la cohomologie équivariante classique et quantique des variétés carquois de Nakajima pour un carquois général  $Q$ . Utilisant un formalisme de  $R$ -matrice géométrique, nous construisons une algèbre de Hopf  $Y_Q$ , le Yangian de  $Q$ , agissant sur la cohomologie de ces variétés, et démontrons plusieurs résultats sur leur structure. Nous prouvons une formule pour la multiplication quantique des diviseurs en termes de l'action du Yangian. La connexion quantique peut être identifiée avec la connexion trigonométrique de Casimir pour  $Y_Q$ ; de façon équivalente, les opérateurs de diviseurs correspondent à certains éléments des sous-algèbres de Baxter de  $Y_Q$ . Un rôle clé est joué par les opérateurs de décalage géométriques qui peuvent être identifiées à la connexion KZ aux différences.

Dans une seconde partie, nous donnons un exemple détaillé de la théorie générale des espaces de modules de faisceaux de  $\mathbb{C}^2$  trivialisés à l'infini. Dans ce cadre, l'action du Yangian est analysée explicitement en termes d'une réalisation par champs libres;