390

ASTÉRISQUE

2017

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2015/2016
EXPOSÉ N° 1104

Yves ANDRÉ

Groupes de Galois motiviques et périodes

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 390

Diffusion

Maison de la SMF	AMS
Case 916 - Luminy	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Providence RI 02940
France	USA
christian.smf@cirm-math.fr	www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro: 65 € (\$ 97)
Abonnement électronique : 500 € (\$ 750)
Abonnement avec supplément papier : 657 €, hors Europe : 699 € (\$ 1049)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél: (33) 01 44 27 67 99 • Fax: (33) 01 40 46 90 96
astsmf@ihp.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN : print 0303-1179, electronic 2492-5926
ISBN 978-2-85629-855-8

Directeur de la publication: Stéphane Seuret

Séminaire BOURBAKI Novembre 2015
68e année, 2015-2016, n° 1104, p. 1 à 26

GROUPES DE GALOIS MOTIVIQUES ET PÉRIODES

par **Yves ANDRÉ**

INTRODUCTION

0.1. Périodes

Les intégrales abéliennes sont des intégrales de 1-formes différentielles rationnelles sur une courbe algébrique. Elles dépendent du chemin choisi entre les extrémités ; pour les formes sans pôle, les ambiguïtés sont appelées *périodes abéliennes* car ce sont les (composantes des) périodes des fonctions abéliennes attachées à la courbe, par inversion d'Abel-Jacobi.

Bien que l'interprétation de telles intégrales comme périodes de fonctions fasse défaut en dimension supérieure, le terme de *période* a fini, sur le mode synecdotique, par désigner en géométrie algébrique toute intégrale $\int_\Delta \omega$ d'une n-forme algébrique ω prise sur un domaine Δ limité par des équations algébriques (pour $n = 1$, on retrouve les intégrales abéliennes). Dans une tradition qui remonte à Euler, Legendre et Gauss, deux cas particuliers ont pris une importance considérable :

– le « cas arithmétique », formalisé dans **[34]** : il s'agit de nombres complexes dont les parties réelle et imaginaire sont de la forme $\int_\Delta \omega$, où ω est une forme différentielle rationnelle sur une variété algébrique X définie sur le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, et où $\Delta \subset X(\mathbb{R})$ est défini par des inégalités polynomiales à coefficients dans $\mathbb{Q}$;

– le « cas fonctionnel » : il s'agit de périodes de formes différentielles dépendant algébriquement d'un paramètre t ou de plusieurs, le corps des constantes étant $\mathbb{C}$. Ces fonctions « multiformes » sont holonomes à croissance modérée (solutions d'équations différentielles linéaires à coefficients dans $\mathbb{C}(t)$ à singularités régulières), fait qui généralise le lien découvert par Gauss entre moyenne arithmético-géométrique et équation différentielle hypergéométrique.

0.2. Relations de périodes

Dans l'expression $\int_\Delta \omega$ d'une période, seul le signe $\int$ n'est pas de nature algébrique, et l'on s'attend de fait à ce que les périodes soient en général, dans l'un ou l'autre cas, des nombres ou des fonctions transcendant(e)s.

On peut s'interroger sur les exceptions [(1)], et plus généralement sur la nature des relations polynomiales entre périodes (à coefficients dans $\mathbb{Q}$ dans le cas arithmétique, dans $\mathbb{C}(t)$ dans le cas fonctionnel). Les transformations d'une expression $\int_\Delta \omega$ qu'on obtient en jouant avec les propriétés formelles de $\int$, — à savoir la bilinéarité en (Δ, ω), la multiplicativité (Fubini), le changement de variable algébrique $\int_\Delta f^*\omega = \int_{f_*\Delta} \omega$, et la formule de Stokes $\int_\Delta d\omega = \int_{\partial\Delta} \omega$ —, donnent tautologiquement lieu à des relations polynomiales entre périodes.

Une réponse très leibnizienne à la question serait alors le philosophème : *« les propriétés formelles de $\int$ constituent la raison suffisante des relations polynomiales entre périodes »*. Cette réponse a d'abord été proposée par M. Kontsevich, dans le cas arithmétique, sous forme d'une conjecture précise [**33**], illustrée de maint exemple en collaboration avec D. Zagier [**34**].

Tout récemment, J. Ayoub a montré que la même réponse vaut dans le cas fonctionnel, cette fois sous forme d'un théorème, que voici. Notons

• $\mathcal{O}(\bar{\mathbb{D}}^n)$ l'algèbre des fonctions analytiques au voisinage du polydisque unité fermé $|z_i| \leq 1$ $(i = 1, \dots, n)$,

• $\mathcal{O}^\dagger_{\mathrm{alg}}(\bar{\mathbb{D}}^n)$ le sous-espace de $\mathcal{O}(\bar{\mathbb{D}}^n)((t))$ formé des séries $\sum_{i \gg -\infty} h_i(z_1, \dots, z_n) t^i$ qui sont algébriques sur $\mathbb{C}(z_1, \dots, z_n, t)$, et $\mathcal{O}^\dagger_{\mathrm{alg}}(\bar{\mathbb{D}}^\infty) = \bigcup_n \mathcal{O}^\dagger_{\mathrm{alg}}(\bar{\mathbb{D}}^n)$.

THÉORÈME 0.1 ([**12**] th. 1.8). — *Le noyau de l'application $\mathbb{C}$-linéaire*

$$\sum h_i\, t^i \in \mathcal{O}^\dagger_{\mathrm{alg}}(\bar{\mathbb{D}}^\infty) \;\; \mapsto \;\; \sum \Big(\int_{[0,1]^\infty} h_i\Big)\, t^i \in \mathbb{C}((t))$$

est engendré par les éléments de la forme

$$\frac{\partial g}{\partial z_i} - g_{|z_i=1} + g_{|z_i=0} \quad et \quad \Big(f - \int_{[0,1]^\infty} f\Big)\, h$$

où $i \in \mathbb{N} \setminus 0$, $f, g, h \in O^\dagger_{\mathrm{alg}}(\bar{\mathbb{D}}^\infty)$, f ne dépend pas de t, et f et h ne dépendent pas simultanément d'une même variable.

---

(1) À l'instar de Leibniz, correspondant avec Huygens à propos du lemme XXVIII des Principia de Newton sur les aires de secteurs d'ovales (cf. e.g. [**42, 46**]). En langage moderne, ce lemme affirme qu'une telle aire (qui est une période dans le cas d'un ovale algébrique) n'est pas algébrique en les paramètres des droites découpant le secteur. Newton l'applique au cas de la trajectoire elliptique d'une planète et en déduit, via la seconde loi de Kepler, que sa position ne dépend pas de manière algébrique du temps.