390 ASTÉRISQUE

2017

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2015/2016
EXPOSÉ N° 1108

Damien GABORIAU

Entropie sofique

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 390

Diffusion

Maison de la SMF	AMS
Case 916 - Luminy	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Providence RI 02940
France	USA
christian.smf@cirm-math.fr	www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro: 65 € ($ 97)

Abonnement électronique : 500 € ($ 750)

Abonnement avec supplément papier : 657 €, hors Europe : 699 € ($ 1049)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie

75231 Paris Cedex 05, France

Tél: (33) 01 44 27 67 99 • Fax: (33) 01 40 46 90 96

astsmf@ihp.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN : print 0303-1179, electronic 2492-5926

ISBN 978-2-85629-855-8

Directeur de la publication: Stéphane Seuret

Séminaire BOURBAKI Janvier 2016
68e année, 2015-2016, n° 1108, p. 101 à 138

ENTROPIE SOFIQUE
[d'après Lewis Bowen, David Kerr et Hanfeng Li]

par **Damien GABORIAU**

INTRODUCTION

L'entropie, dans les systèmes dynamiques, constitue une famille d'invariants multiformes avec des ramifications en grand nombre. L'objectif de ce texte est de fournir une modeste introduction à un sujet qui a fleuri en bouquets depuis 2008 : l'entropie sofique à la suite des travaux de L. Bowen, D. Kerr et H. Li.

On considérera l'entropie classique au sens de A. Kolmogorov et Y. Sinaĭ, de D. Ornstein et B. Weiss et l'entropie sofique au sens de L. Bowen, D. Kerr & H. Li ainsi qu'une entropie dite de Rokhlin. Il s'agit dans tous ces cas d'attacher un nombre à une action d'un groupe dénombrable G, préservant une mesure μ de probabilité [(1)], sur l'espace borélien standard X, c'est-à-dire à un homomorphisme de G dans le groupe $\mathrm{Aut}(X,\mu)$ des bijections de X préservant μ, modulo égalité presque partout.

Ces notions seront ensuite mutées en leur variante topologique, c'est-à-dire pour des actions continues de G sur un compact métrisable X, auxquelles elles seront reliées par un principe variationnel (travaux de D. Kerr & H. Li).

Ces invariants fournissent des éléments de réponse au problème général suivant : déterminer quand deux actions de G sont conjuguées [(2)].

Il s'agira dans cet exposé de décrire des résultats récents de Lewis Bowen, David Kerr et Hanfeng Li, qui étendent ces invariants au-delà des groupes moyennables : jusqu'aux groupes dénombrables sofiques.

[(*)] Travaux soutenus par le CNRS, par le « Project ANR-14-CE25-0004 GAMME » et par le LABEX MILYON (ANR-10-LABX-0070) de l'Université de Lyon, à travers le programme « Investissements d'Avenir » (ANR-11-IDEX-0007) opéré par l'Agence Nationale de la Recherche Française (ANR).

[(1)] On utilisera l'abréviation **p.m.p.** pour « préservant la mesure de probabilité ».

[(2)] Dans la catégorie mesurée ou dans la catégorie topologique.

On n'y trouvera essentiellement pas de démonstrations, mais plutôt des éléments de comparaison et quelques références. On a préféré parfois une présentation et des notations suggestives, évocatrices, et créant des échos entre différentes parties du texte, à d'autres plus strictes mais plus lourdes, en espérant rester dans des limites qui facilitent la lecture sans la rendre équivoque.

On a aussi fait le choix, certainement discutable, de repousser à la section 2 un certain nombre de définitions standard (partition génératrice, décalage, ...) et à la section 3 des explications concernant les groupes sofiques, afin de permettre de rentrer plus directement dans le vif du sujet. Le lecteur peu familier avec ces notions pourra s'y reporter.

1. PRÉSENTATION DE LA THÉMATIQUE

L'entropie, en théorie de l'information, est un concept fondamental introduit par C. Shannon en 1948 [**60**]. A. Kolmogorov [**36, 37**] l'a utilisée pour définir un invariant non moins fondamental en théorie ergodique : l'entropie d'une transformation préservant la mesure, dont il a posé les bases entre 1958 et 1962 avec quelques proches mathématiciens, notamment Y. Sinaĭ et V. Rokhlin.

L'entropie de Shannon d'une partition dénombrable $\alpha = (A_i)_{i\in K}$ de l'espace de probabilité (X, μ) est définie par

(**Entropie de Shannon**) $$H(\alpha) \overset{\text{def}}{=} -\sum_{i\in K} \mu(A_i)\log(\mu(A_i)).$$

1.1. Pour le groupe $G = \mathbf{Z}$

Pour un isomorphisme préservant la mesure $T\colon X \to X$, ou autrement dit une action **p.m.p.** $G \curvearrowright^{T} (X, \mu)$ de $G = \mathbf{Z}$, sur l'espace de probabilité standard, la définition de Kolmogorov nécessite l'existence d'une partition **génératrice** [(3)] α d'entropie de Shannon finie et considère les entropies de Shannon des joints des itérés (les raffinements de α obtenus par itérations) et normalisées :

(**Entropie de Kolmogorov**) $$h(G \curvearrowright^{T} X, \mu) \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H\Big(\bigvee_{i=0}^{n} T^{-i}\alpha\Big).$$

Le point clef est bien entendu l'indépendance vis-à-vis de la partition génératrice (l'existence de la limite n'est pas difficile).

Y. Sinaĭ [**61**] a apporté une amélioration significative en observant que, parmi les partitions d'entropie de Shannon finie, les partitions génératrices, lorsqu'elles existent,

[(3)] Avec l'aide de l'action de G, elle permet de séparer presque tous les points de X ; voir section 2.