390

ASTÉRISQUE

2017

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2015/2016
EXPOSÉ N° 1109

Dennis GAITSGORY

Progrès récents

dans la théorie de Langlands géométrique

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 390

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
christian.smf@cirm-math.fr

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro: 65 € ($ 97)
Abonnement électronique : 500 € ($ 750)
Abonnement avec supplément papier : 657 €, hors Europe : 699 € ($ 1049)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél: (33) 01 44 27 67 99 • Fax: (33) 01 40 46 90 96
astsmf@ihp.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN : print 0303-1179, electronic 2492-5926
ISBN 978-2-85629-855-8

Directeur de la publication: Stéphane Seuret

Séminaire BOURBAKI Janvier 2016
68^{e} année, 2015-2016, n^{o} 1109, p. 139 à 168

PROGRÈS RÉCENTS DANS LA THÉORIE DE LANGLANDS GÉOMÉTRIQUE

par **Dennis GAITSGORY**

1. INTRODUCTION

Dans cet exposé on fixe une courbe algébrique X (supposée lisse, connexe et complète) et un groupe réductif G au-dessus d'un corps de base k.

Quand on parlera de relations avec la théorie de Langlands classique (c'est-à-dire la théorie de fonctions automorphes), on prendra $k = \mathbb{F}_q$. Quand on parlera de la théorie de Langlands géométrique *catégorique*, on supposera que k est de caractéristique 0.

1.1. La perspective historique

Ce que l'on appelle aujourd'hui la *théorie de Langlands géométrique* a ses origines dans les idées de quatre personnes : A. Beilinson, P. Deligne, V. Drinfeld et G. Laumon.

1.1.1. — La première observation a été faite par Deligne. Il a remarqué que l'on peut démontrer l'existence du Grössencharakter correspondant à un caractère non ramifié du groupe de Galois d'un corps de fonctions en utilisant des méthodes algébro-géométriques. Voici son idée :

On peut interpréter un Grössencharakter (non ramifié) du corps global correspondant à X comme une fonction sur l'ensemble (ou plutôt, le groupoïde) des $\mathbb{F}_q$-points du champ de Picard de X (noté $\mathrm{Pic}(X)$). La construction de cette fonction à partir d'un caractère galoisien σ procède en les deux étapes suivantes.

La première étape associe à σ un faisceau ℓ-adique sur $\mathrm{Pic}(X)$, que l'on va noter $\mathcal{F}_\sigma$. La deuxième étape associe à $\mathcal{F}_\sigma$ une fonction sur $(\mathrm{Pic}(X))(\mathbb{F}_q)$ en utilisant la correspondance faisceaux$\to$fonctions de Grothendieck, c'est-à-dire en prenant les traces de Frobenius.

La construction de $\mathcal{F}_\sigma$ est de nature géométrique. On interprète σ comme un système local (ℓ-adique) de rang 1 sur X, que l'on note E_σ. À la donnée de E_σ et un entier

$d \geq 0$, on associe la *puissance symétrique* de E_σ, notée $E_\sigma^{(d)}$, qui est un système local (ℓ-adique) de rang 1 sur le schéma $X^{(d)}$ paramétrisant les diviseurs effectifs sur X de degré d. (Le faisceau $E_\sigma^{(d)}$ est naturel du point de vue de la théorie des nombres : la fonction correspondant à $E_\sigma^{(d)}$ est la fonction construite à partir de σ sur l'ensemble des diviseurs effectifs.)

Puis on considère l'application d'Abel-Jacobi

$$X^{(d)} \to \mathrm{Pic}(X)$$

et notre but est de démontrer qu'il existe un faisceau ℓ-adique $\mathscr{F}_\sigma$ sur $\mathrm{Pic}(X)$, tel que, si on le tire en arrière sur $X^{(d)}$, on obtient $E_\sigma^{(d)}$. Il est facile de voir qu'il suffit de démontrer l'existence de $\mathscr{F}_\sigma$ sur les composants connexes $\mathrm{Pic}^d(X)$ de $\mathrm{Pic}(X)$ pour d grand (c'est-à-dire $d \geq d_0$ pour un entier d_0 fixé).

L'observation principale est que, pour $d > 2g-2$ (où g est le genre de X), l'application $X^{(d)} \to \mathrm{Pic}^d(X)$ est une fibration lisse dont les fibres sont simplement-connexes. Ce fait garantit l'existence (et l'unicité) de la descente de $E_\sigma^{(d)}$ sur $\mathrm{Pic}^d(X)$.

1.1.2. — Après le cas où σ est de rang 1 expliqué ci-dessus, Drinfeld a publié son article [**7**] où il considère le cas d'une représentation galoisienne σ de rang 2, à laquelle on veut associer une fonction automorphe cuspidale non ramifiée pour le groupe GL_2.

La stratégie générale de la construction de Drinfeld coïncide avec celle de Deligne : on interprète l'espace automorphe non ramifié comme le groupoïde des $\mathbb{F}_q$-points de l'espace des modules $\mathrm{Bun}_2 := \mathrm{Bun}_{GL_2}$ classifiant les fibrés vectoriels de rang 2 sur X. Drinfeld cherche à associer à σ un faisceau ℓ-adique $\mathscr{F}_\sigma$ sur Bun_2, et ensuite obtenir sa fonction automorphe en prenant les traces de Frobenius.

La différence principale entre le cas de Drinfeld et celui de Deligne (qui correspond au groupe $\mathbb{G}_m = GL_1$) est que la construction de $\mathscr{F}_\sigma$ à partir de E_σ est énormément plus compliquée. L'acteur intermédiaire, la puissance symétrique $E_\sigma^{(d)}$, est maintenant interprété comme un faisceau ℓ-adique qui tient compte des coefficients de *Whittaker* (en d'autres termes, de Fourier) de $\mathscr{F}_\sigma$. Donc notre but est de reconstruire un objet automorphe à partir de ces coefficients de Fourier. Finalement, on réalise cela en utilisant le même argument géométrique : le fait que les fibres d'une certaine application sont simplement-connexes.

1.1.3. — Après l'article de Drinfeld est paru celui Laumon, [**17**], qui a proposé une extension conjecturale de la construction de Drinfeld du cas de GL_2 au cas de GL_n pour n quelconque. À notre connaissance, c'est dans le titre de l'article de Laumon qu'est apparue pour la première fois l'expression « Langlands géométrique ».

Tandis que le but déclaré de l'article de Drinfeld était de construire une *fonction automorphe*, l'article de Laumon avait comme conséquence un changement de cet objectif : la communauté des mathématiciens commençait à s'intéresser aux *faisceaux*