390

ASTÉRISQUE

2017

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2015/2016
EXPOSÉ N° 1110

Benoît STROH

La paramétrisation de Langlands globale sur les corps de fonctions

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 390

Diffusion

Maison de la SMF	AMS
Case 916 - Luminy	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Providence RI 02940
France	USA
christian.smf@cirm-math.fr	www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro: 65 € ($ 97)
Abonnement électronique : 500 € ($ 750)
Abonnement avec supplément papier : 657 €, hors Europe : 699 € ($ 1049)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél: (33) 01 44 27 67 99 • Fax: (33) 01 40 46 90 96
astsmf@ihp.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN : print 0303-1179, electronic 2492-5926
ISBN 978-2-85629-855-8

Directeur de la publication: Stéphane Seuret

Séminaire BOURBAKI Janvier 2016
68e année, 2015-2016, no 1110, p. 169 à 197

LA PARAMÉTRISATION DE LANGLANDS GLOBALE SUR LES CORPS DE FONCTIONS [d'après Vincent Lafforgue]

par **Benoît STROH**

INTRODUCTION

Soit k un corps fini à q élément et soit X une courbe projective lisse géométriquement connexe sur k. Notons K_X le corps des fractions de X et choisissons $\bar{K}_X$ une clôture séparable de K_X. Notons $|X|$ l'ensemble des points fermés de X, notons $\mathbb{A}_X$ l'anneau des adèles de X et pour tout $v \in |X|$, notons O_v l'anneau local complété de X en v et K_v son corps des fractions. Soit N un diviseur de X dont on note O_N l'anneau de fonctions. Soit G un groupe réductif connexe déployé sur k. Notons $K_N = \mathrm{Ker}(\prod_{v\in|X|} G(O_v) \to G(O_N))$ le sous-groupe compact ouvert de $G(\mathbb{A}_X)$ associé à N. Soit Z le centre de G et $\Xi \subset Z(K_X)\backslash Z(\mathbb{A}_X)$ un réseau, c'est-à-dire un $\mathbb{Z}$-module libre de type fini et de covolume fini. Soit ℓ un nombre premier premier à q. L'objet principal de l'exposé, et plus généralement de la partie automorphe du programme de Langlands sur les corps de fonctions, est l'espace vectoriel de dimension finie

$$\mathfrak{H} = \mathcal{C}_{\mathrm{cusp}}\left(G(K_X)\backslash G(\mathbb{A}_X) \,/\, \Xi \cdot K_N \,,\, \bar{\mathbb{Q}}_\ell\right)$$

des fonctions automorphes localement constantes cuspidales [**9**]. Cet espace est muni de l'action de l'algèbre des opérateurs de Hecke sphériques en toute place de $X - N$. Notons $\mathscr{T} \subset \mathrm{End}_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell}(\mathfrak{H})$ l'image de l'algèbre de Hecke. La $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-algèbre $\mathscr{T}$ est commutative semi-simple.

Notons $\hat{G}$ le groupe réductif connexe sur $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ dual de Langlands de G. Par définition, ses racines sont les coracines de G et *vice versa*. Le but principal du programme de Langlands est de mettre en correspondance d'une part les formes automorphes cuspidales propres pour l'action de l'algèbre de Hecke et d'autre part certains morphismes continus de $\mathrm{Gal}(\bar{K}_X/K_X)$ dans $\hat{G}(\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$. Le théorème suivant permet de réaliser le sens « automorphe vers Galois » de cette correspondance.

THÉORÈME 0.1 (V. Lafforgue). — *On sait construire une $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-algèbre commutative canonique $\mathscr{B} \subset \mathrm{End}_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell}(\mathfrak{H})$ contenant $\mathscr{T}$. On peut en particulier décomposer $\mathfrak{H}$ en espaces propres généralisés*

$$\mathfrak{H} = \bigoplus_{\tilde{\chi}:\mathscr{B}\to\bar{\mathbb{Q}}_\ell} \mathfrak{H}_{\tilde{\chi}} .$$

À tout morphisme d'algèbres $\tilde{\chi} : \mathscr{B} \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell$ est canoniquement associé un paramètre de Langlands, c'est-à-dire une classe de $\hat{G}(\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$-conjugaison de morphismes

$$\chi : \mathrm{Gal}(\bar{K}_X/K_X) \longrightarrow \hat{G}(\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$$

semi-simples (d'image d'adhérence Zariski réductive) continus non ramifiés hors de N. La restriction de $\tilde{\chi}$ à $\mathscr{T} \subset \mathscr{B}$ est compatible à χ par l'isomorphisme de Satake en toutes les places de $X - N$.

Remarque 0.2. — Soit v une place de $X - N$ et soit χ comme dans l'énoncé. On dispose d'une classe de $\hat{G}(\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$-conjugaison semi-simple $\chi(\mathrm{Frob}_v)$ dans $\hat{G}(\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$, où Frob_v désigne la classe de conjugaison des Frobenius en v dans le quotient $\pi_1(X - N, \mathrm{Spec}(\bar{K}_X))$ de $\mathrm{Gal}(\bar{K}_X/K_X)$. La compatibilité à l'isomorphisme de Satake [7] apparaissant dans l'énoncé décrit explicitement cette classe de conjugaison en terme de la restriction de $\tilde{\chi}$ à la sous-algèbre de $\mathscr{T}$ engendrée par les opérateurs de Hecke sphériques en v.

Remarque 0.3. — Pour certains groupes autres que GL_n, l'inclusion $\mathscr{T} \subset \mathscr{B}$ est stricte donc un caractère de $\mathscr{B}$ n'est pas déterminé par sa restriction à $\mathscr{T}$. On ne peut donc pas associer un paramètre canonique à un caractère de $\mathscr{T}$. On peut par contre lui associer une famille de paramètres indexée par l'ensemble de ses prolongements en un caractère de $\mathscr{B}$. Les différents paramètres de cette famille sont conjugués sur les groupes de décomposition en toute place de $X - N$ mais ne sont pas globalement conjugués. De tels exemples ont été construits du côté automorphe dans [**2**] et [**12**] et du côté galoisien dans [**13**] et [**14**]. Ainsi l'algèbre $\mathscr{B}$ est fondamentale dans l'énoncé même de la correspondance de Langlands. L'article de Vincent Lafforgue est le premier dans lequel cette algèbre apparaît. Sur les corps de nombres, on ne connaît absolument pas d'analogue de $\mathscr{B}$.

Lorsque $G = \mathrm{GL}_n$ on peut montrer [**11**, rem. 12.13] que $\mathscr{B} = \mathscr{T}$ donc les problèmes évoqués ci-dessus disparaissent. Cela est relié aux théorèmes de multiplicité un.

Remarque 0.4. — Le théorème admet des généralisations : cas d'un groupe non déployé, d'un groupe métaplectique, des coefficients de torsion [**11**, ch. 12,13,14], de la correspondance locale [**6**]. Nous ne les aborderons pas dans cet exposé.