390

ASTÉRISQUE

2017

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2015/2016
EXPOSÉ N° 1111

Bertrand TOËN

Problèmes de modules formels

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 390

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
christian.smf@cirm-math.fr

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro: 65 € ($ 97)
Abonnement électronique : 500 € ($ 750)
Abonnement avec supplément papier : 657 €, hors Europe : 699 € ($ 1049)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél: (33) 01 44 27 67 99 • Fax: (33) 01 40 46 90 96
astsmf@ihp.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN : print 0303-1179, electronic 2492-5926
ISBN 978-2-85629-855-8

Directeur de la publication: Stéphane Seuret

Séminaire BOURBAKI Janvier 2016
68e année, 2015-2016, n° 1111, p. 199 à 244

PROBLÈMES DE MODULES FORMELS
[d'après Drinfeld, Kontsevich, Hinich, Manetti, Pridham, Lurie....]

par **Bertrand TOËN**

INTRODUCTION

La théorie des déformations se propose d'étudier les variations infinitésimales d'objets d'origines géométrico-algébriques. Il est d'abord question de déterminer des espaces tangents, approximations linéaires des problèmes de déformations considérés, dans l'esprit de l'étude des variations infinitésimales de structures complexes de [**12**], [**25**] etc. À la fin des années 50, la notion de schémas amène d'une part la possibilité d'utiliser des anneaux et des schémas artiniens, mais aussi le point de vue des *foncteurs des points* (voir [**17**]). Cela permet à la théorie des déformations de se formaliser autour de la notion de foncteurs définis sur la catégorie des anneaux artiniens, de leurs propriétés d'exactitudes et de leur représentabilité (voir [**38**]). L'exemple typique est le problème des déformations d'une variété algébrique lisse X_0 fixée sur k. Le foncteur correspondant

$$\mathrm{Def}_{X_0} : \mathrm{art}_k^* \longrightarrow \mathrm{Ens}$$

envoie une algèbre artinienne augmentée A sur l'ensemble des classes d'isomorphisme de paires (X, u), où X est un schéma plat sur $\mathrm{Spec}\, A$ et u un isomorphisme de variétés algébriques $u : X \otimes_A k \simeq X_0$. Étudier le foncteur Def_{X_0} revient à étudier la structure formelle de l'espace des déformations de X_0. Parmi les résultats standards on montre par exemple que $\mathrm{Def}_{X_0}(k[\varepsilon]) \simeq H^1(X_0, \mathbb{T}_{X_0})$, et que les obstructions à la lissité de Def_{X_0} vivent dans $H^2(X_0, \mathbb{T}_{X_0})$.

C'est plus tard, au cours des années 80, que le lien entre théorie de Lie et théorie des déformations émerge, à travers les idées combinées de P. Deligne et V. Drinfeld d'abord, puis de M. Kontsevich, J. Stasheff, M. Schlessinger, S. Barannikov, V. Schechtman, V. Hinich, M. Manetti et bien d'autres. Ce lien est resté pendant très longtemps un principe qui s'énonce de la manière suivante :

Tout problème de déformations naturel est contrôlé par une algèbre de Lie différentielle graduée.

Ce principe est basé sur la construction qui à une dg-algèbre de Lie associe un foncteur sur les anneaux artiniens (et donc un problème de déformations) donné par les solutions de l'équation de Maurer-Cartan. De manière plus précise, si L est une dg-algèbre de Lie (concentrée en degrés cohomologiques $[1,\infty[$ pour simplifier) et A une algèbre locale artinienne augmentée d'idéal maximal m, on forme l'ensemble $MC(L\otimes_k m)$ des éléments x de degré 1 dans $L\otimes_k m$ et vérifiant la fameuse équation de Maurer-Cartan $d(x)+\frac{1}{2}[x,x]=0$. Ceci définit un foncteur

$$X_L : art_k^* \longrightarrow \mathrm{Ens},$$

qui est le problème de déformations associé à L. Lorsqu'un problème de déformations s'écrit de la forme X_L la connaissance de L en donne énormément d'informations et permet, par des manipulations purement algébriques sur L, de comprendre et de décrire le problème de déformations en question. Par exemple, l'espace tangent est simplement $H^1(L)$, et $H^2(L)$ est toujours un espace d'obstructions à la lissité formelle de X_L. L'anneau des fonctions formelles de X_L s'identifie par ailleurs à $H^0(\widehat{C}^*(L))$, où $\widehat{C}^*(L)$ est le complexe de Chevalley de L (voir §1.2). Ceci permet de dire, par exemple, que si la différentielle de L est nulle, alors les singularités de X_L sont au plus quadratiques, et si le crochet de L est nul alors X_L est toujours formellement lisse. Enfin, la construction $L\mapsto X_L$ s'étend aussi au cas où L est en degré quelconque en remplaçant les ensembles $MC(L\otimes_k m)$ par les espaces de Maurer-Cartan $\underline{MC}(L\otimes_k m)$ (voir par exemple [**19**]). Dans ce cas $H^0(L)$ représente les symétries infinitésimales (automorphismes infinitésimaux), et les $H^i(L)$ pour $i<0$ des symétries d'ordre supérieur. Les espaces $H^i(L)$ pour $i>2$ sont quant à eux des espaces d'obstructions supérieurs qui n'interviennent pas dans la construction de X_L.

Sans que cela soit un théorème précis, on pouvait remarquer que la construction de Maurer-Cartan $L\mapsto X_L$ produisait tous les problèmes de déformations que l'on rencontre dans la pratique, et cela a permis de très nombreuses avancées, certaines spectaculaires. On pourrait par exemple citer la quantification par déformation des variétés de Poisson (voir [**26**]), l'étude locale des espaces de représentations de groupes fondamentaux de variétés projectives complexes (voir [**16, 41**]), ou encore le théorème de Bogomolov-Tian-Todorov et ses généralisations (voir par exemple [**22**, §4]). Cependant, la situation n'était pas satisfaisante car il n'y avait pas de méthode précise pour construire la dg-algèbre de Lie correspondant à un problème de déformations donné, il fallait donc la deviner au cas par cas. Pire, plusieurs dg-algèbres de Lie différentes pouvaient incarner le même problème de déformations, avec parfois plusieurs choix pertinents qui peuvent aller jusqu'à donner des espaces d'obstructions différents (voir