390

ASTÉRISQUE

2017

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2015/2016
EXPOSÉ N° 1105

Benoît CLAUDON

Positivité du cotangent logarithmique et conjecture de Shafarevich-Viehweg

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 390

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
`christian.smf@cirm-math.fr`

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
`www.ams.org`

Tarifs

Vente au numéro: 65 € ($ 97)
Abonnement électronique : 500 € ($ 750)
Abonnement avec supplément papier : 657 €, hors Europe : 699 € ($ 1049)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél: (33) 01 44 27 67 99 • Fax: (33) 01 40 46 90 96
`astsmf@ihp.fr` • `http://smf.emath.fr/`

ISSN : print 0303-1179, electronic 2492-5926
ISBN 978-2-85629-855-8

Directeur de la publication: Stéphane Seuret

Séminaire BOURBAKI Novembre 2015
68[e] année, 2015-2016, n° 1105, p. 27 à 63

POSITIVITÉ DU COTANGENT LOGARITHMIQUE ET CONJECTURE DE SHAFAREVICH-VIEHWEG [d'après Campana, Păun, Taji, ...]

par **Benoît CLAUDON**

INTRODUCTION

Un des premiers objets intrinsèquement attachés à une variété [(1)] projective lisse X est son fibré canonique : $K_X := \mathrm{dét}(\Omega^1_X)$. Il est de plus bien connu que les propriétés de positivité/négativité de ce fibré en droites gouvernent une grande partie de la géométrie de X. Il est alors naturel de se demander si les propriétés en question sont la trace de propriétés vérifiées par le fibré cotangent lui-même. C'est l'objet des récents travaux de Campana et Păun [**9, 10, 11**] qui ont permis d'établir le résultat suivant [(2)].

Théorème 0.1. — *Soit X une variété projective lisse avec K_X pseudo-effectif. Le fibré cotangent a alors la propriété suivante : pour tout entier $m \geq 1$ et pour tout quotient sans torsion*

$$\Omega^1_X{}^{\otimes m} \twoheadrightarrow \mathscr{Q},$$

le fibré [(3)] en droites $\mathrm{dét}(\mathscr{Q})$ *est pseudo-effectif.*

Il faut bien sûr mettre ce résultat en parallèle avec les travaux de Miyaoka [**31**] qui a montré que, sous les mêmes hypothèses, le fibré Ω^1_X était *génériquement semi-positif* : le degré de ses quotients est positif sur toute courbe intersection complète

[(1)] Toutes les variétés considérées dans ce texte seront définies sur $\mathbb{C}$, lisses et connexes. Sauf mention explicite, elles seront de plus projectives. Nous identifierons également fibrés en droites et (classes d'équivalence linéaire de) diviseurs.
[(2)] Énoncé ainsi, le théorème 0.1 remonte à l'article [**12**]. Il semble cependant que la démonstration de *loc. cit.* ne soit pas complète : l'utilisation des résultats de Miyaoka (« Relative deformations of morphisms and applications to fibre spaces », *Comment. Math. Univ. St. Paul.* **42** (1993), p. 1–7) n'est pas légitime dans la situation de l'article [**12**].
[(3)] Rappelons que le déterminant d'un faisceau cohérent sans torsion $\mathscr{E}$ est le fibré en droites $(\bigwedge^r \mathscr{E})^{**}$, avec r le rang de $\mathscr{E}$. Voir également la définition 1.12.

dans le système linéaire d'un diviseur très ample. Le théorème 0.1 constitue donc une généralisation des travaux de Miyaoka.

L'élargissement du champ d'application vient aussi du fait que les articles [**9, 11**] traitent d'une situation bien plus générale puisqu'ils se placent dans le cadre des paires (X, Δ) où X est lisse et Δ un $\mathbb{Q}$-diviseur dont le support est à croisements normaux (et dont les coefficients sont compris entre 0 et 1). Une telle paire sera appelée une orbifolde dans la suite (conformément à la terminologie de [**7, 8**]). Sous l'hypothèse de pseudo-effectivité de $K_X + \Delta$, ils montrent qu'un fibré naturellement associé à la paire possède des propriétés similaires à celles énoncées dans le théorème 0.1. Une des difficultés vient du fait que ce fibré (qu'ils nomment *fibré cotangent orbifolde*) ne vit pas sur X mais sur un revêtement ramifié de X dont la ramification est en partie contrôlée par le diviseur Δ. Nous renvoyons au paragraphe 2.2 pour les notions esquissées et pour un énoncé complet (à savoir, le théorème 2.9).

En plus de la construction du cotangent orbifolde et de la mise au jour de ses propriétés essentielles, une des contributions majeures de la prépublication [**11**] est d'établir un critère d'intégrabilité algébrique pour les feuilletages.

Théorème 0.2. — *Soit $\mathscr{F}$ un feuilletage sur X (supposée projective et lisse) vérifiant $\mu_\alpha^{\min}(\mathscr{F}) > 0$ pour une classe mobile $\alpha \in \mathrm{Mob}(X)$. Le feuilletage est alors algébriquement intégrable : ses feuilles sont ouvertes dans leurs adhérences de Zariski. De plus, ces dernières sont des sous-variétés rationnellement connexes de X.*

Les notions de classe mobile et de pentes par rapport à une telle classe sont rappelées dans le paragraphe 1.3. À nouveau, ce résultat a des prédécesseurs : les travaux de Bost [**5**] et Bogomolov-McQuillan [**4**] fournissent un critère d'intégrabilité algébrique dans le cas d'une classe intersection complète de diviseurs amples.

Une fois le théorème 0.2 établi, la stratégie de la démonstration du théorème est alors transparente. En supposant que la conclusion du théorème 0.1 soit mise en défaut, nous obtenons une classe mobile α et un sous-faisceau de $T_X^{\otimes m}$ dont la pente par rapport à α est strictement positive. Des résultats de comparaison (cf. théorème 1.19) montre qu'il en est de même pour T_X lui-même : il existe un sous-faisceau de T_X de pente strictement positive (par rapport à α). Considérons alors le sous-faisceau de T_X maximal pour l'inclusion parmi les sous-faisceaux de pente positive et notons-le $\mathscr{F}$. Par construction, ce faisceau vérifie $\mu_\alpha^{\min}(\mathscr{F}) > 0$ et un raisonnement standard utilisant des inégalités sur les pentes montre que $\mathscr{F}$ est un feuilletage. Le théorème 0.2 montre que X doit être recouverte par des courbes rationnelles mais ceci n'est pas possible puisque nous avons supposé le fibré canonique de X pseudo-effectif (d'après le résultat principal de [**6**], ceci revient à dire que X n'est pas uniréglée). L'adaptation de cette stratégie au cas orbifolde nécessitera des aménagements qui feront l'objet de la deuxième partie.