390

ASTÉRISQUE

2017

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2015/2016
EXPOSÉ N° 1119

Kannan SOUNDARARAJAN

The Liouville function in short intervals

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 390

Diffusion

Maison de la SMF	AMS
Case 916 - Luminy	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Providence RI 02940
France	USA
`christian.smf@cirm-math.fr`	`www.ams.org`

Tarifs

Vente au numéro: 65 € ($ 97)

Abonnement électronique : 500 € ($ 750)

Abonnement avec supplément papier : 657 €, hors Europe : 699 € ($ 1049)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie

75231 Paris Cedex 05, France

Tél: (33) 01 44 27 67 99 • Fax: (33) 01 40 46 90 96

`astsmf@ihp.fr` • `http://smf.emath.fr/`

ISSN : print 0303-1179, electronic 2492-5926

ISBN 978-2-85629-855-8

Directeur de la publication: Stéphane Seuret

Séminaire BOURBAKI Juin 2016
68e année, 2015-2016, n° 1119, p. 453 à 479

THE LIOUVILLE FUNCTION IN SHORT INTERVALS [after Matomäki and Radziwiłł]

by **Kannan SOUNDARARAJAN**

Résumé [(1), (2), (3)] **(La fonction de Liouville dans les intervalles courts [d'après Matomäki et Radziwiłł])**

La fonction de Liouville λ est une fonction complètement multiplicative à valeur $\lambda(n) = +1$ [resp. -1] si n admet un nombre pair [resp. impair] de facteurs premiers, comptés avec multiplicité. On s'attend à ce qu'elle se comporte comme une collection « aléatoire » de signes, $+1$ et -1 étant équiprobables. Par exemple, une conjecture célèbre de Chowla dit que les valeurs $\lambda(n)$ et $\lambda(n+1)$ (plus généralement en arguments translatés par k entiers distincts fixes) ont corrélation nulle. Selon une autre croyance répandue, presque tous les intervalles de longueur divergeant vers l'infini devraient donner à peu près le même nombre de valeurs $+1$ et -1 de λ. Récemment Matomäki et Radziwiłł ont établi que cette croyance était en effet vraie, et de plus établi une variante d'un tel résultat pour une classe générale de fonctions multiplicatives. Leur collaboration ultérieure avec Tao a conduit ensuite à la démonstration des versions moyennisées de la conjecture de Chowla, ainsi qu'à celle de l'existence de nouveaux comportements de signes de la fonction de Liouville. Enfin un dernier travail de Tao vérifie une version logarithmique de ladite conjecture et, de là, résout la conjecture de la discrépance d'Erdős. Dans ce Séminaire je vais exposer quelques-unes des idées maîtresses sous-jacentes au travail de Matomäki et Radziwiłł.

1. INTRODUCTION

The Liouville function λ is defined by setting $\lambda(n) = 1$ if n is composed of an even number of prime factors (counted with multiplicity) and -1 if n is composed of an odd number of prime factors. Thus, it is a completely multiplicative function taking the value -1 at all primes p. The Liouville function is closely related to the Möbius

---

(1) Je sais gré au Prof. Tokieda d'avoir bien voulu traduire ce résumé en français.
(2) Je remercie Tokieda d'avoir traduit la note ci-dessus en français.
(3) Je remercie Tokieda d'avoir traduit la note ci-dessus en français.

function μ, which equals λ on square-free integers, and which equals 0 on integers that are divisible by the square of a prime.

The Liouville function takes the values 1 and -1 with about equal frequency: as $x \to \infty$

$$\sum_{n \le x} \lambda(n) = o(x), \tag{1}$$

and this statement (or the closely related estimate $\sum_{n \le x} \mu(n) = o(x)$) is equivalent to the prime number theorem. Much more is expected to be true, and the sequence of values of $\lambda(n)$ should appear more or less like a random sequence of ± 1. For example, one expects that the sum in (1) has "square-root cancelation": for any $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n \le x} \lambda(n) = O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}), \tag{2}$$

and this bound is equivalent to the Riemann Hypothesis (for a more precise version of this equivalence see [**33**]). In particular, the Riemann Hypothesis implies that

$$\sum_{x < n \le x+h} \lambda(n) = o(h), \qquad \text{provided } h > x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}, \tag{3}$$

and a refinement of this, due to Maier and Montgomery [**18**], permits the range $h > x^{1/2}(\log x)^A$ for a suitable constant A. Unconditionally, Motohashi [**27**] and Ramachandra [**30**] showed independently that

$$\sum_{x < n \le x+h} \lambda(n) = o(h), \qquad \text{provided } h > x^{\frac{7}{12}+\varepsilon}. \tag{4}$$

The analogy with random ± 1 sequences would suggest cancelation in every short interval as soon as $h > x^{\varepsilon}$ (perhaps even $h \ge (\log x)^{1+\delta}$ is sufficient). Instead of asking for cancelation in every short interval, if we are content with results that hold for almost all short intervals, then more is known. Assuming the Riemann Hypothesis, Gao [**4**] established that if $h \ge (\log X)^A$ for a suitable (large) constant A, then

$$\int_X^{2X} \Big| \sum_{x < n \le x+h} \lambda(n) \Big|^2 dx = o(Xh^2), \tag{5}$$

so that almost all intervals $[x, x+h]$ with $X \le x \le 2X$ exhibit cancelation in the values of $\lambda(n)$. Unconditionally one can use zero density results to show that almost all intervals have substantial cancelation if $h > X^{1/6+\varepsilon}$. To be precise, Gao's result (as well as the results in [**33**], [**18**], [**27**], [**30**]) was established for the Möbius function, but only minor changes are needed to cover the Liouville function.

The results described above closely parallel results about the distribution of prime numbers. We have already mentioned that (1) is equivalent to the prime number