390

ASTÉRISQUE

2017

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2015/2016
EXPOSÉ Nº 1106

Sylvain MAILLOT

Conjecture de Hilbert-Smith en dimension 3

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 390

Diffusion

Maison de la SMF	AMS
Case 916 - Luminy	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Providence RI 02940
France	USA
christian.smf@cirm-math.fr	www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro: 65 € ($ 97)

Abonnement électronique : 500 € ($ 750)

Abonnement avec supplément papier : 657 €, hors Europe : 699 € ($ 1049)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie

75231 Paris Cedex 05, France

Tél: (33) 01 44 27 67 99 • Fax: (33) 01 40 46 90 96

astsmf@ihp.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN : print 0303-1179, electronic 2492-5926

ISBN 978-2-85629-855-8

Directeur de la publication: Stéphane Seuret

Séminaire BOURBAKI Novembre 2015
68^e année, 2015-2016, n° 1106, p. 65 à 75

CONJECTURE DE HILBERT-SMITH EN DIMENSION 3 [d'après J. Pardon]

par **Sylvain MAILLOT**

INTRODUCTION

Pour toute variété topologique M, on note Homeo(M) le groupe des homéomorphismes de M, que l'on munit de la topologie *compacte-ouverte* (engendrée par les ensembles de la forme $V(K,U) = \{f \in \mathrm{Homeo}(M) \mid f(K) \subset U\}$ pour $K \subset M$ compact et $U \subset M$ ouvert). A toute action d'un groupe topologique G sur M on peut associer un morphisme continu de G dans Homeo(M). On rappelle que l'action est dite *fidèle* si ce morphisme est injectif. L'énoncé de la conjecture de Hilbert-Smith est le suivant :

CONJECTURE 0.1. — *Soient M une variété topologique connexe de dimension n et G un groupe topologique localement compact qui agit fidèlement sur M. Alors G est isomorphe à un groupe de Lie.*

L'hypothèse de locale compacité sur G ne peut être supprimée. Par exemple, le groupe Homeo(S^1) n'est pas un groupe de Lie (il n'est pas localement compact.) De même, l'énoncé devient faux si l'on omet l'hypothèse de connexité sur M : le groupe compact $\mathbf{T}^\infty = (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^{\mathbf{N}}$ agit fidèlement sur la variété $\mathbf{R}/\mathbf{Z} \times \mathbf{N}$ selon la formule

$$(g_n)_{n\in\mathbf{N}} \cdot (\theta, p) = (\theta + g_p, p).$$

Le sujet principal de cet exposé est le théorème suivant :

THÉORÈME 0.2 (J. Pardon [**15**]). — *La conjecture 0.1 est vraie pour $n = 3$.*

On renvoie à l'introduction de l'article de Pardon [**15**] pour une liste de résultats connus antérieurement. Il s'agit principalement de résultats partiels valables en toute dimension sous des hypothèses supplémentaires de régularité sur l'action. Par ailleurs la conjecture était connue en dimensions ≤ 2 ; le résultat de Pardon redémontre ceci puisque si l'on démontre la conjecture en dimension n, on la démontre aussi en toute dimension inférieure à n (faire le produit de M avec un espace euclidien).

La conjecture de Hilbert-Smith est issue du « 5-ième problème de Hilbert », dont l'interprétation moderne consiste à explorer les liens entre la notion de groupe topologique et celle de groupe de Lie. Ces questions ont beaucoup été étudiées dans la première moitié du XX$^{\text{e}}$ siècle ; une série de développements que nous ne détaillerons pas ici trouvent leur aboutissement au début des années 1950 dans les travaux de Gleason [**4, 5**], Montgomery-Zippin [**12**] et Yamabe [**26, 25**]. Nous renvoyons au livre de T. Tao [**22**] pour un exposé moderne de cette théorie. Citons simplement un résultat majeur de cette période :

Théorème 0.3 (Montgomery-Zippin). — *Soit n un entier naturel. Tout groupe topologique localement homéomorphe à $\mathbf{R}^n$ est isomorphe à un groupe de Lie.*

Ce texte est structuré comme suit : dans la section 1, nous donnons quelques éléments de topologie des variétés de dimension 3 ; certains résultats sont utilisés dans la preuve du théorème 0.2 ; d'autres permettent de mieux apprécier le contexte dans lequel cette preuve se déroule. Dans la section 2, nous reformulons la conjecture de Hilbert-Smith en termes du groupe topologique $\mathbf{Z}_p$ des entiers p-adiques. Dans la section 3 nous expliquons comment la preuve du théorème 0.2 se décompose en trois étapes. Par souci de simplification, l'exposition est informelle et les constructions quelque peu simplifiées. Enfin, la section 4 est consacrée à la notion de quasi-cylindre, laquelle est au cœur de la deuxième étape de la preuve.

Par convention, dans ce texte, l'homologie et la cohomologie sont toujours à coefficients dans $\mathbf{Z}$.

Remerciements — En préparant cet exposé j'ai bénéficié de remarques utiles de Christophe Bavard et Samuel Tapie. Je remercie également John Pardon pour sa relecture attentive de ce texte et ses commentaires.

1. VARIÉTÉS DE DIMENSION 3

1.1. TOP, PL et DIFF

En topologie des variétés, on distingue classiquement trois catégories : la catégorie TOP des variétés topologiques considérées à homéomorphisme près, la catégorie PL des variétés définies par des cartes affines par morceaux, considérées à homéomorphisme PL près, et la catégorie DIFF des variétés différentielles de classe $\mathcal{C}^\infty$, considérées à $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme près. Toute variété DIFF admet une structure PL compatible, unique au sens où deux variétés DIFF qui sont difféomorphes sont aussi